

מבוא לתהליכים סטוכסטיים

חוברת תרגילים

נכתב, נערך ולוקט על ידי

הדס ברגר וענת אטלס

נושא הפרק: חזרה על מושגים מתקדמים בהסתברות

1. קופידון, לב אמיץ ואל חשש הן 3 חברות שידוכים המתחרות על הצלחה בשוק הפנויים-פנויות. ל"קופידון" 30% מנתח השוק וידוע ש10% מהזוגות המשתדכים דרכה מתחתנים. ל"לב אמיץ" 30% מנתח השוק וידוע ש15% מהזוגות המשתדכים דרכה מתחתנים. 10% מהזוגות המשתדכים דרך "אל חשש" מתחתנים. מהו אחוז הזוגות המשתדכים המתחתנים?
2. כלה מעונינת לברוח מחתנה ביום חתונתה. לסלון הכלות 3 יציאות אפשריות. הראשונה-מובילה אותה החוצה תוך שעתיים. השנייה-מובילה אותה אל הספר אחרי שעה. השלישית מובילה אותה אל המאפרת אחרי חצי שעה.
- גדיר: X - סופר מספר שעות עד שהכלה בורחת. מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שהכלה תברח מסלון הכלות?
3. מספר התביעות שמשלמת חברת הביטוח בחודש הוא מ"מ N עם תוחלת 100 ושונות 500. גודל כל אחת מהתביעות הוא מ"מ X עם תוחלת 1800 ושונות 250000.
א. מצא את תוחלת סכום התביעות החודשי
ב. מצא את שונות סכום התביעות החודשי.
ג. אלו הנחות אי-תלות עליך להניח? האם הן מוצדקות?
4. רכוש חקלאי מבוטח נגד נזקי טבע וגניבות. מספר הגניבות הוא תהליך פואסון עם עצמה של 2 גניבות לשנה.
מספר נזקי הטבע גם הוא תהליך פואסון ב"ת עם עצמה של 0.5 נזקים לשנה. הנח ששני התהליכים ב"ת. הנח שגודלי התביעות בגין נזקי טבע הם מ"מ ב"ת ביניהם וב"ת במספר התביעות וגודלי התביעות האחרים, כולם בעלי אותה פונקציה התפלגות כמ"מ V עם תוחלת 10000 ושונות 20000.
גודלי התביעה בגין גניבה הם מ"מ ב"ת ביניהם וב"ת במספר התביעות וגודלי התביעות האחרים, כולם בעלי פונקציה התפלגות כמ"מ W עם תוחלת 1000 ושונות 15000.
א. חשב את תוחלת ושונות סה"כ התביעות במשך 5 שנים.
ב. נתון שבמשך השנתיים הראשונות נתבעו 30000 ש"ח, מהי תוחלת סכום התביעות שתשולם במשך 5 השנים הראשונות?
5. מספר הסטודנטים המגיעים ל"קפה דשא" בשעה מתפלג פואסונית עם פרמטר $\lambda=10$ באופן ב"ת. כל סטודנט מבזבז כסף לפי תהליך פואסון עם $\lambda=20$ באופן ב"ת. הנח שהתהליכים ב"ת. מצא תוחלת ושונות סך ההכנסות של קפה דשא מסטודנטים בשעה.
6. בקונדיטוריה "גם מתוקים זה סוג של נחמה" שני מדפים על מדף א ו 6 עוגות גזר ו 4 עוגות קצפת הדובדבן. על מדף ב 5 עוגות גזר ו 4 עוגות קצפת הדובדבן. הקונדיטור המשועמם בוחר באופן מקרי 2 עוגות ממדף א ומעביר אותן למדף ב. לאחר מכן שולף עוגה ממדף ב.
מה ההסתברות שהעוגה שנשלפה ממדף ב היא עוגת גזר (נכון שזה איכס...)?

7. מרקו עדיין מחפש את אמא שלו. הוא עומד על הרציף וצריך לבחור באקראי בין 3 אוניות למסע. האונייה הראשונה תחזיר אותו לרציף לאחר 30 ימים. האונייה השנייה תיקח אותו לאמא תוך 90 ימים. האונייה השלישית תחזיר אותו לרציף תוך 48 ימים. מהי תוחלת הזמן עד שיגיע ל"אמא שם מחכה"?
8. מספר הלקוחות המגיעים לכספומט בשעה מתפלג פואסון עם פרמטר $\lambda=30$.
- כמות הכסף שמושך הלקוח ה-I מתפלגת אחיד בין 50 ל-250, באופן ב"ת לכל i .
- מצא את תוחלת ושונות סכום הכסף שמושכים לקוחות בשעה.

נושא הפרק: תהליכים מרקוביים בזמן בדיד

1. גרשון נוהג לאכול מדי יום שניצל או דג (כן, גרשון מטורף-ממש חי על הקצה).
 בחירתו כל יום תלויה אך ורק במה שאכל ביום האתמול. הסיכוי שיאכל מחר שניצל אם היום אכל דג הוא a.
 הסיכוי שיאכל מחר שניצל אם היום אכל שניצל הוא b.
 נגדיר: X_n -מנת הפרוטאין היומית של גרשון ביום ה-n-י.
 הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.
2. כד מכיל 2 כדורים בקומבינציה לא ידועה של שחור או לבן, בכל צעד מוציאים באקראי כדור אחד.
 אם הכדור שהוצא שחור, הוא נצבע בלבן ומוחזר לכד. אם הכדור שהוצא לבן, מטילים מטבע הוגן-אם יצא H הוא נצבע בשחור ומוחזר לכד. אם יצא T – הוא מוחזר לכד כפי שהוא. נגדיר: X_n - מספר הכדורים השחורים בכד בזמן n.
 הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.
3. ארבעה קלפים הממוספרים 1,2,3,4 מחולקים באופן אקראי לא ידוע בין כיפה אדומה לזאב באופן הבא:
 בכל צעד נבחר באקראי מספר בין 1 ל-4, השחקן שמחזיק את הקלף שמספרו נבחר מעביר את הקלף לשחקן האחר. נגדיר: X_n – מספר הקלפים שבידי כיפה אדומה לאחר ההעברה ה-n.
 הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.
4. לסמי 2 מטבעות, מטבע 1 נופל על H בהסתברות 0.7, מטבע 2 נופל על H בהסתברות 0.6.
 הוא המציא משחק החוזר חלילה.
 אם המטבע שהטיל היום נפל על H מחר יטיל את מטבע 1, אם נפל על T מחר יטיל את מטבע 2.
 היום, יום ראשון, בחר סמי באופן אקראי מטבע להתחיל את משחקו החדש.
 מהי ההסתברות שהמטבע שיטיל ביום שלישי יהיה מטבע 1?
5. בכד אחד 3 כדורים לבנים ובכד השני 3 כדורים שחורים, בכל צעד מוציאים בבת אחת משני הכדים כדור אחד ומחליפים ביניהם. נגדיר: X_n -מספר הכדורים הלבנים בכד 1.
 האם X_n שרשרת מרקוב? אם-כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר

6. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2
0	0.75	?	0
1	0.25	0.5	?
2	0	0.75	?

א. השלם את המטריצה.

ב. $P(X_1=1/X_0=0)=?$

ג. $P(X_2=0, X_1=1/X_0=2)=?$

ד. נתון ווקטור הסתברויות התחלתי: $P(X_0=i)=1/3$ $i=0,1,2$ חשב:

ד.1. $P(X_1=1)$

ד.2. $P(X_3=0/X_1=1)$

ד.3. $P(X_5=1, X_3=0/X_2=1)$

ד.4. $P(X_3=2/X_1=2, X_4=1)$

7. בכיכר המדינה 3 בוטיקים יוקרתיים—"ציפה", "ציפה דריפה" ו"ציפה דריפה ימפפוני".

גברת "שאנל" יוצאת למסע שופינג אחת לשבוע. אם היא מרוצה מהיחס שקיבלה, תחזור לבוטיק ממנו קנתה בהסתברות 0.6 ובהסתברות 0.4 תלך לבוטיק אחר.

אם היא לא מרוצה תעבור לבוטיק הבא לפי הסדר: ציפה—ציפה דריפה—ציפה דריפה ימפפוני.

הסיכוי שתהיה מרוצה מציפה- 0.3 מציפה דריפה-0.4 ומציפה דריפה ימפפוני-0.5.

הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

8. למהמר i שקלים. מטרתו להגיע לסכום של 8 שקלים.

בכל צעד יהמר על הסכום הנמצא בידיו או על הסכום הדרוש כדי להגיע ל 8 שקלים.

למשל: אם בידיו 3 שקלים יהמר על כל הסכום. אם בידיו 5 שקלים יהמר רק על 3 שקלים.

המשחק נגמר כאשר הוא מפסיד את כל כספו או צובר 8 שקלים.

הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

9. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3
0	1/4	0	1/8	5/8
1	1/6	1/3	1/2	0
2	0	1	0	0
3	1/4	1/4	1/4	1/4

חשב:

א. $P(X_1=2/X_0=3)$ ב. $P(X_1=3/X_0=2)$

$$P(X_2=0, X_3=2, X_4=2 | X_0=3, X_1=1) \text{ ג.}$$

$$P(X_2=1 | X_0=3, X_1=2, X_3=0) \text{ ד.}$$

$$P(X_3=2 | X_1=2, X_4=1) \text{ ה.}$$

ו. נתון וקטור פרופורציות התחלתי: $P(X_0=i)=0.25$ חשב:

$$P(X_1=X_2) \text{ 1.1.}$$

$$P(X_1=0, X_2=2) \text{ 2.1.}$$

10. מטילים קובייה הוגנת פעם אחר פעם. יהי X_n – סכום הספרות שעל הקוביות שנזרקו עד ההטלה ה- n .

יהי Z_n – השארית המתקבלת ע"י חלוקת X_n ב-7. למשל, אם $X_n=9$ אזי $Z_n=2$.

הצג את מטריצות הסתברויות המעבר של X_n ו Z_n .

11. בשווקים בישראל פועלות 3 חברות גדולות לשיווק מוצרי חלב: א.ב.ג. בסקר צרכנות התגלו הממצאים

הבאים: צרכן הקונה מוצר ומרוצה חוזר ורוכש את המוצר של החברה ממנה היה מרוצה. במידה והלקוח אינו

מרוצה יפעל באופן הבא: אינו מרוצה מ-א (בסיכוי 0.6), ירכוש מוצר של חברה אחרת בהסתברויות שוות.

אינו מרוצה מ-ב (בסיכוי 0.5), ירכוש את מוצר חברה א בסיכוי 0.6 או את מוצר חברה ג בסיכוי 0.4.

אינו מרוצה מ-ג (בסיכוי 0.55), ירכוש את מוצר חברה א בסיכוי 0.7 או את מוצר חברה ב בסיכוי 0.3.

הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

12. בידי עוזי 4 שקלים ובידי גיא 2 שקלים. הם משחקים את המשחק הבא: בכל סיבוב זורק כל אחד מהם

קובייה סימטרית, השחקן שתוצאת הקובייה שלו גבוהה יותר זוכה בשקל מחברו. אם תוצאות הזריקות שלהם

שוות לא זוכה אף אחד. המשחק נגמר כאשר אחד מהם זוכה בכל הכסף. נגדיר: X_n – הסכום שבידי עוזי בסוף

הסיבוב ה- n . הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

13. במחסן החנות יש מקום ל-2 יחידות, בכל שבוע מסופקות יחידות מהמחסן לחנות על-מנת למלא ביקוש

למוצר. הביקוש למוצר הוא בעל ההסתברויות הבאות והוא תמיד מפולג כך, באופן ב"ת בשבועות קודמים.

הסתברות מס' יחידות מבוקשות

$$0 \text{-----} 0.5$$

$$1 \text{-----} 0.25$$

$$2 \text{-----} 0.25$$

במהלך השבוע ניתן לענות על ביקושים כמספר היחידות במחסן. בסוף השבוע אם המחסן ריק, מזמינים למחסן

2 יחידות המגיעות רק כעבור 7 ימים. (במהלך השבוע המחסן נשאר ריק). הגדר את מרחב המצבים והצג את

מטריצת הסתברויות המעבר.

14. נניח שמצב מזג האוויר תלוי במזג האוויר היומיים האחרונים: אם היה גשום יומיים רצוף, יהיה גשום מחר

בהסתברות 0.7. אם היה גשום היום אבל אתמול לא, יהיה גשום מחר בהסתברות בהסתברות 0.5. אם היה

גשום אתמול אבל היום לא, יהיה גשום מחר בהסתברות 0.4. אם לא היה גשום ביומיים האחרונים, יהיה גשום

מחר בהסתברות 0.2.

נגדיר X_n מזג האויר ביום ה- n .

הגדר את מרחב המצבים והצג מטריצת הסתברויות מעבר כך שמצב מזג האוויר ישקף תהליך מרקובי.
 15. בחדר במרכז הגמילה "קרחה בראש" 2 מטופלים. בכל בוקר הרופא מבקר בחדר ובודק מטופל אחד בלבד. מטופל שנגמל ישוחרר לביתו בהסתברות 0.2. אחרת, אם החדר אינו מלא, ייכנס אליו מטופל חדש בהסתברות 0.4.

נגדיר X_n מספר החולים בחדר בסוף היום ה- n .

א. הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב. נתון שביום שלישי החדר ריק. מהי ההסתברות שהחדר יהיה ריק גם ביום חמישי.

16. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	1	2	3	4
1	0	1	0	0
2	1/2	1/6	0	1/3
3	1/4	1/4	1/4	1/4
4	1/9	1/9	3/9	4/9

חשב:

א. $P(X_1=2/X_0=1)$

ב. $P(X_1=3/X_0=2)$

ג. $P(X_1=2/X_0=3)$

ד. $P(X_2=1, X_3=2, X_4=2/X_0=2, X_1=1)$

ה. $P(X_2=1/X_0=2, X_1=3, X_3=2)$

ו. $P(X_3=2/X_1=1, X_4=2)$

ז. נתון וקטור פרופורציות התחלתי - $P(X_1=i)=0.25$ $i=1,2,3,4$ חשב $P(X_3=2, X_2=2)$

17. הביקוש למוצר מסוים במשך השבוע הוא מ"מ Y המקבל את הערכים 0,1,2 בהסתברויות שוות.

בסוף כל שבוע נבדקת רמת המלאי, אם רמת המלאי קטנה או שווה ל-1, מיד מבצעים הזמנה אשר תביא את רמת המלאי לפחות ל-4 אך לא יותר מ-5. מלאי מוזמן מגיע מיד בחבילות של 2 בלבד, ונמצא במחסן בתחילת השבוע. נגדיר: X_n – רמת המלאי בתחילת השבוע ה- n מיד לאחר חידוש המלאי. הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

18. במטבח 4 אפרסקים ו-6 משמשים המחולקים באקראי בין 2 קערות-5 פירות בכל קערה. בכל שלב מוציאים באקראי פרי אחד מכל קערה ומניחים אותו בקערה השנייה. כלומר, החלפה בו-זמנית של פרי

מהקערה הראשונה עם פרי מהקערה השנייה.

נגדיר: X_n – מספר האפרסקים בקערה הראשונה אחרי ההוצאה ה- n .

הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

19. הענק מעסיק גנן לטיפול גנו וחווה העבודה הוא תמיד לשנה אחת. בסוף כל שנה הענק מעלה את שכר הגנן

בהסתברות 0.2 או משאיר אותו ללא שינוי. הגנן בשנה מסוימת יישאר בגן בהסתברות 0.95, במידה ושכרו

הועלה ויעזוב בהסתברות 0.4 אם שכרו נותר ללא שינוי. אם הגנן מחליט לעזוב, ישנה הסתברות שווה לכך שהענק ימצא גנן חדש או יגנן בעצמו.

נגדיר: X_n - וותק הגנן שעובד בגן בסוף השנה ה- n .

הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

20. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3
0	0.1	0.2	0.3	0.4
1	0.1	0.1	0.8	0
2	0.3	0.2	0.15	0.35
3	0.2	0.2	0.6	0

חשב:

א. $P(X_1=0/X_0=3)$. ב. $P(X_6=3/X_5=2)$.

ג. $P(X_1=2/X_0=3)$.

ד. $P(X_3=2, X_4=3, X_5=1/X_1=3, X_2=1)$.

ה. $P(X_5=1/X_2=3, X_4=3, X_6=0)$.

ו. $P(X_2=3/X_1=1, X_4=1)$.

ז. נתון וקטור פרופורציות התחלתי - $P(X_0=i)=0.25$ $i=1,2,3,4$ חשב $P(X_1=1, X_2=3), P(X_1=0, X_2=2)$

תת-פרק: תהליכים מרקוביים בזמן בדיד-סווג מצבים, f_{ij} , תוחלת מס' צעדים

1. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה, סווג את מצביה.

	0	1	2	3	4	5
0	0.5	0	0.5	0	0	0
1	0	0.5	0	0	0.5	0
2	0.5	0	0.5	0	0	0
3	0.25	0	0.25	0.25	0	0.25
4	0	0.5	0	0	0.5	0
5	0	0	0	0	0	1

2. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.125	0	0.875	0	0	0	0
2	0.1	0.2	0.1	0.3	0.1	0.1	0.1
3	0.25	0	0.75	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0.35	0	0	0.65	0
6	0	0	0	0.3	0	0.4	0.3
7	0	0	0	0	0	0.6	0.4

א. סווג את מצביה.

ב. $P(X_2=6, X_1=5/X_0=2)$.

ג. מהי ההסתברות להתחיל ממצב 7 ולהגיע למצב 6 לראשונה לאחר 10 צעדים?

ד. מהי ההסתברות להתחיל ממצב 3 ולהגיע למצב 1 לראשונה לאחר 10 צעדים?

3. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3
0	0	0	0.5	0.5
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	1	0	0

א. סווג את מצבי השרשרת.

ב. האם המטריצה פריקה?

ג. חשב- f_{00}

4. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.6	0	0.4	0	0	0	0	0	0
2	0.6	0	0	0	0.4	0	0	0	0
3	0.6	0	0	0	0	0	0.4	0	0
4	0.6	0	0	0	0	0	0	0	0.4
5	0	0	0.6	0	0	0	0	0	0.4
6	0	0	0	0	0.6	0	0	0	0.4
7	0	0	0	0	0	0	0.6	0	0.4
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1

א. סווג את מצבי השרשרת.

ב. f_{20} -ההסתברות להגיע ממצב 2 ל-0 אי פעם.

ג. f_{i0} -ההסתברות להגיע מכל מצב ל-0 אי פעם.

5. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	1	2	3	4
1	0.25	0.25	0.25	0.25
2	0	0	1	0
3	0	0	0	1
4	1	0	0	0

μ_{11} - מהי תוחלת מספר הצעדים עד הגעה ראשונה למצב 1, אם ידוע, שיצאנו ממצב 1?

6. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.5	0	0	0	0	0	0.5
1	0	0.2	0	0.8	0	0	0
2	0	0.2	0	0.8	0	0	0
3	0	0.3	0.3	0.4	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0.3	0.3	0.4
6	0.5	0	0	0	0	0	0.5

א. צייר דיאגרמת קשירות, סווג את מצבי השרשרת והגדר קבוצות אי-פריקות.

ב. חשב: $P(X_2=1/X_0=3)$

ג. חשב: $P(X_1=1/X_0=3, X_2=1)$

ד. ידוע $X_0=6$, מהי ההסתברות להיות במצב 0 לאחר 11 צעדים?

ה. ידוע $X_0=1$, מהי ההסתברות להגיע לראשונה למצב 3 לאחר K צעדים?

1. f_{65} כלומר- ידוע $X_0=6$, מהי ההסתברות להגיע אי פעם למצב 5?

ז. $f_{56}=?$, $f_{54}=?$ $f_{55}=?$.

ח. μ_{60} כלומר- ידוע $X_0=6$, מהי תוחלת מספר הצעדים הנדרשים על-מנת להגיע לראשונה למצב 0?

7. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	1	2	3	4	5	6	7
1	0	0	0	0.8	0	0.2	0
2	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0.2	0.1	0	0.3	0.4	0
4	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0.8	0	0.2	0	0
6	0	0	0	0.5	0	0.5	0
7	0.5	0	0	0	0	0	0.5

א. צייר דיאגרמת קשירות, סווג את מצבי השרשרת והגדר קבוצות אי-פריקות.

ב. $X_0=4$, מהי ההסתברות להיות במצב 4 לאחר 2 צעדים?

ג. $X_0=3$, מהי ההסתברות לחזור לראשונה למצב 3 לאחר K צעדים?

ד. f_{25} כלומר- ידוע $X_0=2$, מהי ההסתברות להגיע אי-פעם למצב 5?

8. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה, צייר דיאגרמת קשירות, סווג מצבי שרשרת והגדר קבוצות אי-

פריקות.

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.1	0.1	0.1	0.2	0.3	0.1	0.1
1	0	0	0	1	0	0	0
2	0	0	0.5	0.5	0	0	0
3	0	0	0	0	0.5	0.5	0
4	0	0	0	0	0	0	1
5	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	1	0	0

9. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה, צייר דיאגרמת קשירות, סווג מצבי שרשרת והגדר קבוצות אי-

פריקות.

	1	2	3	4	5	6	7
1	0.1	0.1	0	0.4	0	0.3	0.1
2	0.2	0	0	0.3	0	0.3	0.2
3	0	0	0.5	0	0.2	0.3	0
4	0.2	0.2	0	0.2	0	0.2	0.2
5	0	0	0.3	0.2	0.5	0	0
6	0.2	0.2	0	0.2	0	0.1	0.3
7	0.1	0.1	0	0.1	0	0.1	0.6

10. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3	4
0	1	0	0	0	0
1	1/3	0	2/3	0	0
2	0	1/3	0	2/3	0
3	0	0	1/3	0	2/3
4	0	0	0	0	1

א. צייר דיאגרמת קשירות, סווג את מצבי השרשרת והגדר קבוצות אי-פריקות.

ב. f_{14} -כלומר – ידוע $X_0=1$, מהי ההסתברות להגיע אי פעם למצב 4?

11. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	1	2	3	4	5	6
1	2/3	0	0	1/3	0	0
2	0	1/2	0	0	1/2	0
3	0	0	1/3	1/3	1/3	0
4	1/3	0	0	2/3	0	0
5	0	1/2	0	0	1/2	0
6	1/2	0	0	1/2	0	0

א. צייר דיאגרמת קשירות, סווג את מצבי השרשרת והגדר קבוצות אי-פריקות.

ב. חשב את הסתברות המעבר ממצב 3 למצב 1 ב-2 צעדים.

ג. חשב את הסתברות המעבר ממצב 2 למצב 5 ב-11 צעדים.

12. בוחנים 2 תרופות א וב בצורה הבאה: מנסים אותן על זוגות חולים שנבחרו בצורה אקראית.

אם תרופה א עזרה ותרופה ב לא-רושמים נקודת יתרון לתרופה א

אם תרופה ב עזרה ותרופה א לא-רושמים נקודת יתרון לתרופה ב .

אם שתיהן עזרו או לא עזרו – לא רושמים דבר.

מפסיקים את הניסוי כאשר לתרופה אחת ישנן 2 נקודות יתרון לעומת השניה ומחליטים שהיא התרופה העדיפה.

נניח שתרופה א עוזרת בהסתברות 0.9 ותרופה ב עוזרת בהסתברות 0.8 (באופן ב"ת בהסתוריה וזו בזו)

א. מהי ההסתברות שתרופה א תיבחר כעדיפה?

ב. מהי תוחלת מספר זוגות החולים שינוסו עד שייגמר הניסוי?

ג. ענו בקירוב: מה תהיה הסתברות הבחירה ב-א אם מספר נקודות היתרון להפסקת הניסוי הוא לא 2 ,

אלא 100 -לכל תרופה?

תת-פרק: תהליכים מרקוביים בזמן בדיד- הס' גבולית, תוחלת ופרופורציית מס' ביקורים

1. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	1	2
1	0.9	0.1
2	0.3	0.7

א. מצא וקטור הסתברויות גבוליות.

ב. חשב בעזרת הקשר בין תוחלת מס' צעדים להסתברויות גבוליות: μ_{11} , μ_{22} .

2. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	1	2	3
1	0	0.25	0.75
2	1	0	0
3	0	0.5	0.5

א. האם השרשרת פריקה?

ב. מצא וקטור הסתברויות גבוליות.

ג. חשב בעזרת הקשר בין תוחלת מס' צעדים להסתברויות גבוליות: μ_{11} , μ_{22} , μ_{33} .

3. במפעל "האב והבן" מעוניינים לדעת את פרופורציית האנשים בכל דרגה הצפויה בטווח הארוך.

החלוקה היא לפי מקצוע בסטטוס-נמוך (1), בינוני (2), גבוה (3).

בכל דור המקצוע נקבע לפי האב בלבד, ולכן ניתן לתאר את מעברי המקצוע כשרשרת מרקוב הבאה:

	1-נמוך	2-בינוני	3-גבוה
1-נמוך	0.5	0.4	0.1
2-בינוני	0.3	0.4	0.3
3-גבוה	0.2	0.3	0.5

חשב את פרופורציית האנשים בכל מעמד בחברה.

4. לחלקיק הנע סביב מעגל יש 5 תחנות מעבר. בכל צעד הוא נע עם כוון השעון בהסתברות P או נגד כוון

השעון. נגדיר: X_n - מיקום החלקיק על-פני המעגל בצעד ה-n.

א. הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב. חשב את ההסתברויות הגבוליות לטווח הארוך.

5. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.2	0.2	0	0.3	0	0	0.3
1	0.1	0.4	0.2	0.3	0	0	0
2	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0.4	0	0	0.6
4	0	0	0	0.5	0.5	0	0
5	0	0	1	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0.7	0	0.3

א. צייר דיאגרמת קשירות, סווג את מצבי השרשרת והגדר קבוצות אי-פריקות.

ב. חשב: f_{03}, f_{13}

ג. ידוע שיצאנו ממצב 0, מהי ההסתברות להגיע למצב 1 תוך 7 צעדים?

ד. ידוע שיצאנו ממצב 0, מהי פרופורציית מספר הביקורים במצב 3?

ה. ידוע שיצאנו ממצב 0, מהי תוחלת מספר הביקורים במצב 3?

ו. ידוע שיצאנו ממצב 2, מהי תוחלת מספר הביקורים במצב 2?

6. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה

	0	1	2	3	4	5	6
0	0.5	0	0	0	0	0	0.5
1	0	0.2	0	0.8	0	0	0
2	0	0.2	0	0.8	0	0	0
3	0	0.3	0.3	0.4	0	0	0
4	0	0	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	0.3	0.3	0.4
6	0.5	0	0	0	0	0	0.5

ידוע- $X_0=5$, מהי תוחלת מספר הביקורים במצבים: 4,5,6.

*נשים לב שמצאנו את f_{54}, f_{55}, f_{56} בשאלה 6 סעיף ז בתת-פרק: תהליכים מרקוביים-סווג מצבים, f_{ij} , תוחלת מס' צעדים.

7. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה, מצאו באיזה חלק מהזמן נימצא במצב 1 ובאיזה חלק מהזמן נימצא

במצב 2.

	1	2
1	0.8	0.2
2	0.3	0.7

8. בקורס "הסקה" ניתן בוחן כל שבוע. הציונים בבוחן הם-נכשל, עבר, מצטיין.
אם סטודנט נכשל בשבוע מסויים,הרי שיתכונן היטב ובשבוע הבא יקבל מצטיין בהסתברות 0.4 או עובר.
אם בשבוע מסויים קיבל עבר, בשבוע הבא ישנם סיכויים שווים לכל ציון.אם בשבוע מסוים קיבל מצטיין,
בשבוע הבא יקבל מצטיין בהסתברות 0.3,ציון עובר בהסתברות 0.4 או ייכשל.
א.תאר את התהליך כשרשרת מרקוב.
ב.מה הסיכוי שבשבוע השלישי יקבל מצטיין אם בשבוע הראשון קיבל מצטיין?
ג.כמה זמן בממוצע יחכה הסטודנט לציון מצטיין,אם בבוחן הראשון קיבל עובר?
ד.מהי ההסתברות שבמבחן ה-100 יקבל מצטיין ובמבחן ה-101 יקבל וה-102 יקבל עובר?
ה.מהם אחוזי השבועות בטווח הארוך שהסטודנט יקבל כל ציון?
- 9.אדם נוסע לעבודה במכונית או בהסעה, כל יום מחליט איך ייסע בהתבסס על יום האתמול בלבד.
אם נסע היום במכונית-ייסע מחר במכונית בהסתברות 0.3.
אם נסע היום בהסעה-ייסע מחר במכונית בהסתברות 0.2.
א.תאר את התהליך כשרשרת מרקוב.
ב.מהי פרופורצית הימים שנוסע אדם לעבודה במכונית ובהסעה בטווח הארוך?
ג.ביום הראשון נסע במכונית,מהי תוחלת מספר הימים שיעברו עד שייסע שוב פעם במכונית?
היעזר בקשר בין הסתברויות גבוליות ותוחלת מס צעדים.
10. צייד מציב לעצמו 10 כדורים ליום לצייד חיות.סיכוי פגיעה בכל ירייה הוא 0.5.
אם לא הצליח ביום מסוים לצוד,ביום המחרת יצטרף אליו עוזרו אשר בעל סיכויי פגיעה זהים, ויינתנו לו 5 כדורים.
אם שניהם יחד יפגעו לפחות ב-2 חיות,ביום המחרת יצא הצייד לבדו. אחרת,ימשיך עוזרו להתלוות אליו.
א. תאר את התהליך כשרשרת מרקוב.
ב.מהו אחוז הזמן בטווח הארוך שיצודו יחדיו?
ג.מהי ההסתברות שיצודו יחדיו ביום ד אם ידוע שצדו יחדיו ביום א?

חזרה על הפרק- "תהליכים מרקוביים בזמן בדיד"- שאלות ממבחנים.

מבחנים של פרופ' שמואל גל:

שאלה 1- מבחן סמסטר א-מועד ג-תשס"ב- 25-04-02

לתחנת מוניות מגיעים במשך שעה 1,2 או 0 אנשים בהסתברות $1/3$ לכל מאורע ובאי-תלות בהסטוריה. בתחנה יש מקום לכל היותר ל-2 אנשים. אנשים שמגיעים ורואים 2 אנשים מחכים, עוזבים את התחנה ולא חוזרים. בסוף כל שעה מגיעה מונית עם מקום פנוי אחד ולוקחת מהתחנה נוסע (אם יש). כאשר יש יותר מנוסע אחד בתחנה הנוסע השני מחכה למונית הבאה.

א. הראה שמספר האנשים בתחנה בתחילת כל שעה (כלומר מיד אחרי שהמונית נסעה) הינו שרשרת מרקוב.

ב. אם בתחילת השעה הנוכחית התחנה ריקה, מהי ההסתברות שהתחנה תהיה ריקה עוד שעתיים?

ג. לאורך איזה אחוז מהתקופות יחכו בתחנה בתחילת השעה שני נוסעים?

שאלה 2- מבחן סמסטר א-מועד ג-תשס"ב- 25-04-02

בידי חדוה 4 שקלים ובידי יפה 2 שקלים. הן משחקות במשחק הבא: בכל סיבוב זורקת אחת מהן קוביה סימטרית. זו שזורקת מספר גדול יותר זוכה בשקל מהשנייה. אם לשתייה יוצא אותו מספר-לא זוכה אף אחת. המשחק נגמר כאשר לאחת מהן אין יותר כסף.

א. מהי ההסתברות שחדוה תזכה במשחק (תרויח את 2 השקלים של יפה)?

ב. אם יפה זכתה בשני הסיבובים הראשונים מהי ההסתברות שתזכה במשחק?

שאלה 3- מבחן סמסטר ב-מועד א-תשס"ג- 20-06-03

מחשב פולט בכל יחידת זמן ביט אשר שוה ל-0 או ל-1. התפלגות הביט ביחידת הזמן הבאה תלויה רק בביט הנוכחי. ההסתברות שהביט הבא יהיה 0 כאשר הביט הנוכחי הוא 0 שוה ל-0.5.

ההסתברות שהביט הבא יהיה 1 כאשר הביט הנוכחי הוא 1 שוה ל-0.25.

א. תאר את התהליך בתור שרשרת מרקוב וכתוב את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב. הביט הנוכחי הוא 0, מה ההסתברות שהביט יהיה 0 בעוד 3 צעדים?

ג. לטוח ארוך- באיזה אחוז מהצעדים יופיע 0?

שאלה 4- מבחן סמסטר א-מועד א- תשס"ד- 08-02-04

מערכת מורכבת משני רכיבים זהים הפועלים בצורה בלתי תלויה. במשך כל תקופה הסתברותו של כל רכיב להתקלקל היא $1/2$ באופן ב"ת בהסטוריה. בתחילת כל תקופה מסתכלים על המערכת ושולחים רכיבים קולקלים לתיקון. ישנו מתקן אחד ומשך זמן תיקון תקופה אחת. כלומר-אם 2 הרכיבים מקולקלים אזי אחד מהם יתוקן

בתקופה הבאה והשני בתקופה שאחריה. אם רכיב אחד מקולקל אזי הוא נשלח לתיקון והרכיב השני ממשיך לעבוד.

- א. תאר את מצב המערכת בתחילת כל תקופה כשרשרת מרקוב.
 ב. כרגע 2 הרכיבים עובדים. מהי ההסתברות ששניהם יעבדו בעוד 2 תקופות?
 ג. לטווח הארוך-מהו % הזמן שבו 2 הרכיבים יהיו מקולקלים?

שאלה 5-מבחן סמסטר א-מועד ב-תשס"ד-2004-02-26

- מונית שיש בה מקום אחד נוסעת במסלול שמכיל מספר לא מוגבל של תחנות. בכל תחנה יש הסתברות $\frac{1}{2}$ שנוסע יחכה שם (והסתברות $\frac{1}{2}$ שלא יחכה אף אחד) באופן ב"ת בהסתוריה. אם יש מקום במונית עולה הנוסע למונית ונוסע בדיוק 2 תחנות (הוא יורד אחרי 2 תחנות ואז אם יש נוסע מחכה הוא יעלה למונית, אחרת, המונית תמשיך לתחנה הבאה ריקה).
 א. הגדר את משתנה המצב של המונית כאשר היא עוזבת תחנה כך שמשתנה זה יקיים את התנאי המרקובי. נמק בחירתך.
 ב. בניח שבתחנה 1 עלה נוסע למונית. מהי ההסתברות שהמונית תהיה ריקה כאשר תעזוב את תחנה 5?
 ג. לטווח הארוך-מהו % הזמן שבו המונית ריקה?

שאלה 6-סמסטר א-מועד ג-תשס"ד-2004-04-30

- ילד נע בין 3 חדרים המסודרים בצורת משולש. אם בתקופה הנוכחית הוא נמצא בחדר מסוים הרי שבתקופה הבאה הוא יעבור לאחד מהחדרים האחרים בהסתברויות שוות.
 א. הראה שמיקומו של הילד בתקופת זמן t ניתן לתיאור כשרשרת מרקוב.
 ב. אם ברגע $t=0$ נמצא הילד בחדר 1, מהי ההסתברות שב $t=4$ יהיה הילד בחדר 3?
 ג. הראה שהשרשרת היא ארגודית.
 ד. אם ברגע $t=0$ נמצא הילד בחדר 2, לטווח הארוך באיזה % מהתקופות יהיה הילד בחדר 2?
 ה. אם ברגע $t=0$ נמצא הילד בחדר 2, מהי תוחלת מספר התקופות שיעברו עד שיגיע (בפעם הראשונה) לחדר 1?

שאלה 7

- יוסי וטירן משחקים במשחק הבא: בכל סיבוב זורקים קובייה סימטרית, אם הקובייה מראה 1 או 2 – טירן זוכה ויוסי משלם לו 1 ש"ח. אם הקובייה מראה 6 יוסי זוכה וטירן משלם לו 1 ש"ח. בכל מקרה אחר לא זוכה אף-אחד. (4,3, או 5) בידי יוסי 3 ש"ח וכך גם בידי טירן. המשחק נגמר כאשר לאחד מהם נגמר הכסף.
 א. מהי ההסתברות שיוסי ירויח את 3 הש"ח של טירן?

ב. אם הגענו למשחק וראינו שיוסי זכה בסיבוב הראשון (כלומר-קיבל 1 ש"ח מטירן) מהי הסתברותו לקחת לטירן את 2 הש"ח שנותרו לו?

שאלה 8

חלקיק נע על הישר בין הנקודות השלמות, $0, 1, 2, \dots, n$. ימינה בהסתברות $1/3$, שמאלה בהסתברות $1/3$, ונשאר במקום בהסתברות $1/3$. כאשר מגיע החלקיק ל-0 או ל-n הוא נעצר. ברגע ההתחלה החלקיק נמצא בנקודה 1. נתון: $n=4$.

- א. מהי ההסתברות שהחלקיק יגיע אי פעם ל-0?
 ב. מהי תוחלת הזמן עד שיעצר החלקיק ?

מבחנים של פרופ' פרוסטינג אסתי

שאלה 9-מבחן סמסטר ב-מועד ב-17-07-02

נתונה השרשרת הבאה:

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		0.5			0.5			
2	0.5				0.5			
3			0.1			0.9		
4				1				
5	0.5	0.5						
6			1					
7	0.2		0.2	0.2		0.2		0.2
8		0.5					0.5	

1. סווג את מצבי השרשרת
 2. נתון בזמן 0 המערכת במצב 7, חשב את הסתברותה להגיע אי-פעם למצב 2.
 3. נתון בזמן 0 המערכת במצב 2, חשב את תוחלת מספר הצעדים עד שהשרשרת תבקר במצב 1.
 4. נתון בזמן 0 המערכת במצב 2, חשב את ההסתברות שבזמן 2 המערכת תהיה במצב 2.

שאלה 10- מבחן סמסטר ב-מועד ב-17-07-02- פרופ פרוסטינג אסתר

במפעל מערכת אלקטרונית העלולה להתקלקל. אם בתחילת היום המערכת עובדת היא תעבוד למחרת בהסתברות פ ותתקלקל בהסתברות פ-1. כאשר מגיע המפעיל בבוקר ורואה שהמערכת אינה עובדת הוא קורא מיד לטכנאי. לטכנאי לוקח יום להגיע, ויום אחד לתקן את המערכת. נגדיר את המצבים הבאים:
 0-מערכת עובדת 1-מערכת מקולקלת, טכנאי בדרך 2-מערכת בתיקון

א. השלם את מטריצת הסתברויות המעבר:

	0	1	2
0	P	?	?
1	?	?	1
2	1	?	?

ב. האם למערכת הסתברויות סטציונריות? אם-כן-מהן? אם לא-נמק מדוע.

ג. מהי פרופורצית מספר הימים שהמערכת אינה עובדת?

ד. כאשר המערכת עובדת מרויחים 1000 ש"ח ליום. עלות ביקור טכנאי 200 ש"ח. מה ממוצע הרווח היומי? בטא כפונקציה של הסתברויות סטציונריות שמצאת.

שאלה 11-

מחיר מנייה עולה בסיכוי 0.8 או יורד בסיכוי 0.2. משקיע קונה את המנייה וימכור אותה כאשר ערכה יגיע ל-0 או 5.

א. יהי X_n -ערך המנייה ביום ה-n, תאר את X_n כשרשת מרקוב ומצא את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב. רשום מערכת משוואות שתתאר את הסיכוי להגיע מכל מצב ל-5 לפני שמגיעים ל-0 ופתור את המערכת.

ג. נניח שהמשקיע קנה את המנייה כשערכה 3, מצא את תוחלת ערך המנייה בתום המשחק.

שאלה 12-

ענבל מבוססת בתוכנית ביטוח המכסה על נזקי פריצות. הסיכוי לפריצה בתקופה הוא 0.1 ב"ת בתקופות אחרות. ענבל משלמת 100% פרמיה אם בשנה הקודמת לא היתה לה תביעה, 150% פרמיה אם בשנה הקודמת היתה לה תביעה, 125% אם היתה לה תביעה פני שנתיים אך לא לפני שנה.

א. יהי X_n –רמת הפרמיה שתשלם בשנה n. הסבר מדוע X_n שרשרת מרקוב ומצא את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב. האם המטריצה מחזורית?

ג. נתון שענבל משלמת פרמיה של 100%, מה הסיכוי שבעוד 3 שנים תשלם 100%?

ד. נתון שכרגע ענבל משלמת 125% מהפרמיה. מה תוחלת מספר השנים עד שתשלם 100% מהפרמיה?

ה. האם קיימות הסתברויות סטציונריות? האם קיימות הסתברויות גבוליות? אם-כן, מהן?

ו. הנח ש-100% מהפרמיה הוא 1000 ש"ח לשנה, חשב את הפרמיה הממוצעת שענבל תשלם.

ז. גודל הנזק הוא משתנה אחיד בין 1000 ל-11000 ש"ח. ענבל מחליטה לדווח רק אם הנזק הוא 3000 ומעלה.

בנה שרשרת מרקוב עם מטריצת הסתברויות מעבר המתאימה לבעיה.

מבחנים של פרופ' גדעון וייס- שאלה 14-מבחן אמצע-סמסטר א' תשס"ב-3/12/02

מצבה של מערכת ביום n מתואר ע"י שרשרת מרקוב העוברת בין מצב 1-תקין למצב 2-מקולקל לפי ההסתברויות:

	1	2
1	0.7	0.3
2	1	0

א.מצא הסתברויות סטציונריות של השרשרת.

ב.חשב את תוחלת הזמן בין 2 קלקולים.

ג.אם הרווח מפעולת המערכת כשהיא תקינה הוא 30 והנזק כשהיא פגומה הוא 10- מה תוחלת הרווח ליום?

תהליך פואסון

חזרה על משתנה מקרי אקספוננציאלי

1. זמן המתנה ממוצע לציונים במבחן בסטוכסטים מפולג אקספוננציאלי עם תוחלת של 5 ימים.
 - א. מהי ההסתברות שסטודנטים יכסו ציפורניים יותר מ-7 ימים?
 - ב. אם ידוע שהמבחן היה לפני 3 ימים, מה ההסתברות שהסטודנטים יחכו לציונים עוד יומיים?
2. משך חיי סוללה הוא מ"מ אקס' עם תוחלת 8 שעות. חנה ועופרה נכנסו לחדר בו נשמע פתיה המצעד של גלגל"צ מרדיו העובד על סוללות. ידוע כי אורך המצעד הוא 4 שעות. מה ההסתברות שחנה ועופרה ישמעו את כל המצעד?
3. זמן הגעת מכונית ראשונה לתחנת דלק הוא מ"מ אקס' עם פרמטר θ . הזמן בין הגעת מכונית אחת לבאה אחריה הוא מ"מ אקס' עם פרמטר θ . זמנים בין הגעת מכוניות הם ב"ת. מהי תוחלת הזמן עד שתגענה עשר מכוניות לתחנה?
4. בוני וקלייד מתארגנים לקראת השוד הבא. הזמן שלוקח לבוני להתארגן הוא אקספוננציאלי עם תוחלת של שעה אחת. זמן ההתארגנות של קלייד מפולג אף הוא אקס' עם תוחלת של שלושת רבעי השעה. מה ההסתברות שבוני תהיה מוכנה לפני קלייד?
5. מיונים לכוכב נולד מסתכלים הבוחנים על 3 תכונות עיקריות: כשרון מוזיקלי, יכולת הופעה מול קהל ומראה חיצוני. אורך אודישן הוא חצי שעה בתנאי ששלושת התכונות מתקיימות. משך הזמן שמתמודד יכול לשיר בלי לזייף הוא אקס' עם תוחלת של חצי שעה. משך זמן הופעה "משוחררת" מול

קהל הוא אקס' עם תוחלת של 20 דקות. משך "חיי האיפור" מתפלג אקס' עם תוחלת של 45 דקות. מה ההסתברות שמתמודד ישרוד את האודישן?

תהליך פואסון הומוגני

6. יהי $N(t)$ תהליך פואסון עם קצב $\lambda=10$. מהי ההסתברות ש:
- בשש שעות יהיו 8 מופעים בדיוק?
 - $P(N(6)=9, N(20)=13, N(35)=22) = ?$
 - $P(N(20)=13 | N(6)=9) = ?$
 - $P(N(9)=6 | N(20)=13) = ?$
7. נניח שאנשים מהגרים לישראל לפי תהליך פואסון עם פרמטר 15 אנשים ליום. מהי תוחלת הזמן הצפוי עד שיגיע המהגר ה-10? מה ההסתברות שמרווח הזמן בין המהגר ה-10 למהגר ה-11 גדול מיומיים?
8. יהי $N(t)$ קצב כניסת לקוחות עם עוצמה λ לשעה. ידוע שבמשך 3 השעות הראשונות נכנס לקוח אחד בלבד.
- מה ההסתברות שהמופע קרה בשעה הראשונה?
 - מה ההסתברות שהמופע קרה בין השעה הראשונה לשנייה?
 - $P(N(3.5)-N(2.5)=1 | N(3)=1) = ?$
 - $P(N(2.5)-N(1.5)=1 | N(3)=1) = ?$
9. יהי $N(t)$ תהליך פואסון עם עוצמה $\lambda=2$. חשבו
- $P(N(2)=4) = ?$
 - $P(N(2)=4, N(3)=6) = ?$
 - $P(N(2)=4, N(7)=10, N(9)=13) = ?$
 - $P(N(2)=4 | N(3)=5) = ?$
 - $P(N(3)=5 | N(2)=4) = ?$
 - $S < t, K < N, P(N(S)=K | N(t)=N) = ?$
10. זבובים מגיעים לדוכן אבטיחים בקצב של $\lambda=8$ זבובים לדקה. ידוע שבשלוש הדקות הראשונות הגיעו 15 זבובים. מה ההסתברות ש-5 הגיעו בדקה וחצי הראשונות ובשתי הדקות הראשונות הגיעו 10 זבובים?
11. לקוחות מגיעים למגה לפי תהליך פואסון עם קצב λ לקוחות לשעה. מגה נפתחת בשעה 00:00 בדיוק. ענה על הסעיפים הבאים:
- מה ההסתברות שעד שעה 03:00 הגיעו 5 לקוחות?
 - מה ההסתברות שעד השעה 03:00 הגיעו 5 לקוחות, ועד שעה 05:00 הגיעו 8 לקוחות?
 - מה ההסתברות שבמשך 3 השעות הראשונות לא הגיע אף אחד?

- ד. מה ההסתברות שעד 08:00 יגיעו 8 לקוחות אם ידוע שעד 05:00 הגיעו 5?
- ה. מה ההסתברות שעד 05:00 יגיעו 5 לקוחות אם ידוע שעד 08:00 הגיעו 8?
- ו. מהי תוחלת מס' הלקוחות המגיעים עד 09:00?
- ז. מהי תוחלת מס' הלקוחות המגיעים עד 10:00 אם ידוע שעד 03:00 הגיעו 6?
- ח. מהי תוחלת מס' הלקוחות המגיעים עד 03:00 אם ידוע שעד 10:00 הגיעו 8?
- ט. $P(N(2)=1, N(3)=4, N(5)=8) = ?$
- י. $P(N(3)-N(2)=1, N(5)=8) = ?$
- יא. $P(N(10)=4 | N(2)=1, N(1)=0) = ?$
- יב. $P(N(5)=4 | N(2)=1) = ?$
- יג. $P(N(5)=2 | N(10)=11, N(13)=15) = ?$
- יד. $P(N(5)-N(3)=3 | N(4)=5, N(13)=15) = ?$
12. לקוחות מגיעים לחנות לפי תהליך פואסון עם קצב λ לקוחות לשעה. חנות נפתחת בשעה 00:00 בדיוק.
- א. מהי תוחלת מספר הלקוחות עד שעה 10:00?
- ב. מהי תוחלת מספר הלקוחות עד השעה 10:00, אם ידוע שעד שעה 02:00 הגיעו ארבעה לקוחות?
- ג. מהי תוחלת מספר הלקוחות עד שעה 10:00, אם ידוע שעד שעה 14:00 הגיעו חמישה לקוחות?
- ד. $P(N(3) \geq 11 | N(10)=5) = ?$
- ה. $E(N(6)) = ?$
- ו. $E(N(6) | N(10)=6) = ?$
- ז. $E(N(10) | N(6)=6) = ?$
- ח. $E(N(6)*N(10)) = ?$
- ט. $E(N(6)*N(10) | N(6)=6) = ?$
- י. $E(N(6)*N(10) | N(10)=6) = ?$
13. קצב אכילת שוקולדים של נערה שבורת לב מתפלג פואסונית עם קצב של 20 שוקולדים לשעה. ידוע שבמשך 5 שעות אכלה 50 שוקולדים. מה ההסתברות שבמשך השעתיים הראשונות אכלה 30 שוקולדים ובמשך 3 השעות הנותרות אכלה את השאר? (מה ההסתברות שלא השמינה?)
14. חתולים מתאספים ליד פח זבל לפי תהליך פואסון עם עוצמה של 6 חתולים לשעה.
- א. חשב את ההסתברות שבחמש שעות הגיע לפחות חתול אחד (שתי דרכים)
- ב. חשב את ההסתברות שבחמש שעות הגיע לפחות חתול אחד אם ידוע שבעשר שעות הגיעו 3 חתולים.
15. לאחר שחרורם מצה"ל נוסעים צעירים לטיול בחו"ל בקצב של 30 צעירים ליום.

- א. מהי תוחלת הזמן עד שעוזב הצעיר החמישי?
- ב. מהי ההסתברות שהזמן בין המופע התשיעי למופע העשירי גדול מיומיים?
16. יהי $N(t)$ תהליך פואסון עם עוצמה λ לקוחות לשעה. החנות נפתחת בשעה 00:00 בדיוק. נסמן ב- T_i , את הזמן עד המופע ה- i .
- א. מה ההסתברות שבין הופעת הלקוח הרביעי לחמישי חלפה פחות משעה?
- ב. מה ההסתברות שהלקוח השני הגיע אחרי השעה 02:00?
- ג. מה ההסתברות שהלקוח השביעי הגיע אחרי השעה 05:00?
- ד. מה ההסתברות שהלקוח הראשון הגיע אחרי השעה 05:00 אם ידוע שעד 07:00 הגיע לקוח אחד?
- ה. מה ההסתברות שעד 07:00 הגיע לקוח אחד אם ידוע שהלקוח הראשון הגיע אחרי 05:00?
- ו. מה ההסתברות שהלקוח הראשון יגיע אחרי 02:00 אם ידוע שהגיע אחרי 01:45?
- ז. חשב $E(T_4 - T_3)$, $E(T_4)$
- פיצול ואיחוד פואסון
17. מופע לקוחות לבלוקבסטר בערב יום כיפור מתפלג פואסונית עם $\lambda=20$ לקוחות לשעה. 20% מהלקוחות הן נשים. החנות נפתחת ב- 08:00.
- א. מה ההסתברות שעד השעה 11:00 הגיעו 12 גברים ו-3 נשים?
- ב. מה ההסתברות שעד השעה 12:00 הגיעו 15 גברים ועד השעה 13:00 5 נשים?
- ג. מה ההסתברות שעד השעה 12:00 הגיעו 36 לקוחות אם ידוע שעד 14:00 הגיעו 15 גברים?
18. מופע לקוחות לחנות צילום מתפלג פואסונית עם $\lambda=8$ לשעה. רבע מהלקוחות הם גברים.
- א. מה ההסתברות שבשעתיים הראשונות הגיעו 3 נשים, אם ידוע שבשעתיים הראשונות הגיעו 10 לקוחות?
- ב. מה ההסתברות שבשלוש השעות הראשונות הגיעו 3 נשים אם ידוע שבשעתיים הראשונות הגיע לקוח אחד בלבד?
- ג. מהי תוחלת מספר הגברים שהגיעו בשעתיים אם ידוע שבשעתיים אלה הגיעו 5 לקוחות?
19. יהי $X(t)$ מופע נשים למכולת המתפלג פואסונית עם עוצמה λ ויהי $Y(t)$ מופע הגברים לאותה מכולת, אף הוא פואסוני עם עוצמה μ . (המכולת, כמו כל מכולת, נפתחת בשעה 00:00 בדיוק). נגדיר $Z(t)=X(t)+Y(t)$.
- א. מה ההסתברות שעד שעה 01:30 הגיעו שתי נשים ושלושה גברים?
- ב. מה ההסתברות שעד 02:00 הגיעו שני גברים ועד 03:00 הגיעו ארבע נשים?
- ג. מה ההסתברות שעד 01:00 הגיעו 15 לקוחות, אם ידוע שעד 01:00 הגיעו 8 גברים?
- ד. מה ההסתברות שעד 02:00 הגיעו חמש נשים, אם ידוע שעד 02:00 הגיעו 8 לקוחות?
- ה. מה ההסתברות שהגיעו שלוש נשים עד 01:30, אם ידוע שעד 00:30 הגיע לקוח אחד בלבד?

1. מהי תוחלת מספר הגברים שהגיעו עד 03:00, אם ידוע שעד 03:00 הגיעו 7 לקוחות?
20. תיירים מגיעים לאי פיג'י לפי תהליך פואסון עם קצב $\lambda=10$ לשבוע. $1/12$ מהתיירים שמגיעים לאי הם דוברי אנגלית. מה ההסתברות שבחודש פברואר אף דובר אנגלית לא הגיע לפיג'י? (כלומר: הגיעו 0 דוברי אנגלית)
21. לגרנד קניון 4 כניסות אפשריות. הכניסה מכל אחת מהדלתות היא לפי תהליך פואסון עם קצב $\lambda_1=100, \lambda_2=200, \lambda_3=80, \lambda_4=20$. 40% מהלקוחות הם גברים. ההסתברות שגבר יקנה היא 0.3, ההסתברות שאישה תקנה היא 0.99. עלות קניה ממוצעת היא 70 שקלים.
- א. מהי תוחלת סכום הקניה ב- 5 שעות?
- ב. מה ההסתברות שהאישה החמישית שקנתה הגיעה ברבע השעה הראשונה?
- ג. מהי תוחלת הזמן עד הגעת הקונה הרביעי (גבר או אישה)?
22. שיחות טלפון מגיעות למזכירות החוג לסטטיסטיקה לפי תהליך פואסון עם קצב $\lambda=8$ לשעה. בהסתברות 0.8 השיחה מיועדת לחנה, בהסתברות 0.15 השיחה מיועדת לעפרה ובשאר המקרים זו טעות במספר.
- א. מה ההסת' שבמשך 3 שעות הגיעו לחנה 5 שיחות?
- ב. מה ההסת' שמס' השיחות המיועדות למזכירות החוג בשלוש שעות הוא שמונה?
- ג. כל שיחה רביעית שמגיעה נתקלת בקו תפוס. מהי התפלגות הזמן בין שתי שיחות בהן הטלפון במזכירת תפוס? (רמז: פיצול חדש עם הסת' לקו תפוס ופנוי).
23. מופע הנשים להופעה של סרנגה מתפלג פואסון עם קצב של 80 לשעה. מופע הגברים לאותה ההופעה מתפלג פואסונית עם קצב של 50 לשעה, באופן בלתי תלוי בנשים. יהי N מס' הגברים המגיעים להופעה לפני שהגיעה האישה הראשונה. כיצד מתפלג N?
24. מופע גברים לחדר כושר הוא תהליך פואסוני עם $\lambda=5$ לשעה. מופע נשים לחדר כושר מתפלג פואסונית עם $\lambda=3$.
- א. מה ההסתברות שאישה תגיע לפני גבר?
- ב. מה ההסתברות שגבר יגיע לפני אישה?
- ג. יהי N מס' הנשים שהגיעו עד הופעת הגבר הראשון. כיצד מתפלג N?
- ד. מה ההסתברות שהגיעו בדיוק 4 נשים לפני הגבר הראשון?
- ה. מה ההסתברות שהגיעו לפחות 4 נשים לפני הגבר הראשון?
25. בכפר הדרדסים נערכות בחירות לראשות הכפר. הדרדסים מגיעים לקלפי לפי מופע פואסון עם $\lambda=25$. קצב המופע של המצביעים לדרדסבא הוא 40, של המצביעים לדרדסית - 25, של המצביעים לרגזני-

15, של המצביעים לזללני-10, של המצביעים לישנוני-9 ושל המצביעים לחתלתול-1. ענה על

השאלות הבאות בהנחה שאף דרדס לא שם פתק לבן

- א. מה קצב המופע הכללי של הדרדסים? $\lambda = ?$
- ב. מה הסיכוי ששני הבוחרים הראשונים יצביעו לדרדסבא?
- ג. מה הסיכוי שלפחות שני הבוחרים הראשונים יצביעו לדרדסבא?
- ד. מה הסיכוי ששני המצביעים הראשונים יצביעו לדרדסבא, והשלושה הבאים אחריהם יצביעו לדרדסית?
- ה. נתון שבמשך שעה הצביע לזללני רק דרדס אחד. מה ההסתברות שהוא הצביע בעשר הדקות הראשונות לפתיחת הקלפי?

סטטיסטי הסדר

26. בנק אוצר החייל נפתח בשעה 08:00 בדיוק. לקוחות מגיעים לבנק לפי תהליך פואסון עם עוצמה $\lambda = 9$ לשעה. נתון שעד 12:00 הגיעו לבנק 30 אנשים.
 - א. מה הסיכוי שהלקוח הראשון הגיע בשעה הראשונה?
 - ב. מה הסיכוי שהלקוח האחרון הגיע בשעה הראשונה?
 - ג. מה הסיכוי שכולם הגיעו בין השעה השניה לשלישית?
 - ד. בנוסף לידוע, נתון שעד שעה 11:00 הגיעו 20 אנשים. מה הסיכוי שהראשון הגיע בשעה הראשונה?
27. מופע דוגמניות למסיבת כדורגלנים הוא פואסוני עם קצב $\lambda = 12$ דוגמניות לשעה. המסיבה מתחילה בשעה 20:00 בדיוק. נתון שעד חצות היו 50 דוגמניות במסיבה. מה ההסתברות שעד השעה 20:30 הגיעה הדוגמנית הראשונה אם נתון בנוסף שעד השעה 23:00 הגיעו 30 דוגמניות?
28. מופע הלקוחות לחנות קסטרו בגרנד קניון מתפלג פואסון עם קצב $\lambda = 8$ לשעה. החנות נפתחת בשעה 10:00 בדיוק. נתון שעד השעה 12:00 הגיעו לחנות 20 לקוחות.
 - א. מה ההסתברות שהלקוח הראשון הגיע אחרי השעה 11:00?
 - ב. מה ההסתברות שהלקוח הראשון הגיע לפני 11:00 ואחרי 10:15?
 - ג. מה ההסתברות שהלקוח האחרון הגיע לפני 11:30?
 - ד. מה ההסתברות שמ-11:00 עד 11:30 לא הגיע אף אחד?
 - ה. נתון שבין 11:00-13:00 הגיע לקוח אחד. מה ההסתברות שהוא הגיע עד 11:30?
29. מופע ארנבות מחוץ לכלוב הוא פואסוני עם $\lambda = 2$ לשעה. הכלוב נפתחת בשעה 07:00. בכלוב יש 8 ארנבות. ידוע שעד 12:00 כל הארנבות היו מחוץ לכלוב.
 - א. מה ההסתברות שהארנבת הראשונה יצאה לפני השעה 09:00?

- ב. מה ההסתברות שהארנבת השמינית יצאה לפני השעה 10:00?
- ג. נתון בנוסף שעד השעה 11:00 יצאו 6 ארנבות. מה ההסתברות שהארנבת הראשונה יצאה לפני השעה 09:00?
- ד. מה ההסתברות שכל הארנבות יצאו בין 08:00 ל- 10:00?
30. בתחנת אוטובוס מסוימת עוברים 3 קווי אוטובוס 16,24, ו-31. אוטובוסים של קו 24 מגיעים לפי תהליך פואסון עם קצב של 5 אוטובוסים לשעה. אוטובוסים של קו 31 מגיעים לפי תהליך פואסון עם קצב של 2 אוטובוסים לשעה. אוטובוסים של קו 16 מגיעים לפי תהליך פואסון עם קצב של אוטובוס 1 לשעה.
- א. נוסע המעוניין בקו 16 מגיע לתחנה, מהי התפלגות זמן ההמתנה שלו לאוטובוס?
- ב. נוסע המעוניין בקו 16 מגיע לתחנה, מה הסיכוי שיעברו 7 אוטובוסים עד שיגיע קו 16?
- ג. מה הסיכוי שבין 10:00 ל- 12:00 הגיעו סה"כ 12 אוטובוסים?
- ד. נתון שבין 10:30 ל- 12:30 הגיעו 20 אוטובוסים, מה ההסתברות שהגיעו 12 אוטובוסים של קו 24, 7 אוטובוסים של קו 31 ואוטובוס אחד של קו 16?
- ה. נתון שמשעה 10:00 עד 14:00 הגיעו 50 אוטובוסים, מה הסיכוי שעשרה הגיעו בין 10:00 ל- 11:00, 15 בין 11:00 ל- 12:00, 20 בין 12:00 ל- 13:30 והשאר בין 13:30 ל- 14:00?
- ו. נתון שמשעה 10:00 עד 12:00 עבר אוטובוס קו 16 אחד, אוטובוס קו 31 אחד ואוטובוס קו 24 אחד. מה הסיכוי שאוטובוס מס' 16 ואוטובוס מס' 24 עברו לפני 10:30 וקו 31 עבר בין 10:00 ל- 11:00?
- ז. נתון שאוטובוס מס' 16 הגיע בין 12:00 ל- 13:00. מה הסיכוי שהוא הגיע לפני 12:15?
- ח. נוסעת המחליטה לנסוע בקו 24 או בקו 16 מגיעה לתחנה, מהי התפלגות זמן ההמתנה שלה?
- ט. מה ההסתברות שהנוסעת מהסעיף הקודם תיסע בקו 24?
- י. נתון שבין 10:00 ל- 12:00 עברו 15 אוטובוסים, מה הסיכוי שהאוטובוס האחרון הגיע אחרי 11:45?
- יא. מופע הנוסעים לאוטובוס 24 הוא פואסוני עם פרמטר $\lambda=30$ לשעה. הנח שכאשר אוטובוס עוצר בתחנה הוא אוסף את כל הנוסעים. מה הסיכוי שהוא אוסף 30 נוסעים?
31. מופע ברווזים לאגם הברבורים הוא פואסוני עם $\lambda=4$ ברווזים לשעה. נתון שבמשך 4 שעות הגיעו 12 ברווזים לאגם.
- א. מה ההסתברות שבשעה הראשונה לא הגיע אף ברווז?
- ב. מה ההסתברות שהברווז הראשון הגיע בחצי השעה הראשונה?
- ג. מה ההסתברות שהברווז האחרון הגיע עד סוף שעה השלישית?
- ד. מה ההסתברות שכל הברווזים הגיעו בין סוף השעה הראשונה לסוף השעה השנייה?

32. ילדים מגיעים לגן שעשועים לפי תהליך פואסון עם עוצמה $\lambda=7$ לשעה החל מהשעה 16:00. נתון שעד 19:00 הגיעו 20 ילדים.

- א. מה ההסתברות שהילד הראשון הגיע לפני 17:00?
- ב. מה ההסתברות שהילד האחרון הגיע לפני 18:30?
- ג. מה ההסתברות שהילד הראשון והילד האחרון הגיעו בין 16:00 ל- 18:00?
- ד. מה ההסתברות שהילד הראשון הגיע לפני 16:45 אם נתון בנוסף שעד 17:15 הגיעו 3 ילדים?

תהליך פואסון מורכב

33. לקוחות מגיעים לחנות לפי תהליך פואסון עם קצב $\lambda=20$ לקוחות לשעה. מצא את תוחלת ההוצאה על קניות שהיו בשמונה שעות אם ההסתברות שלקוח יקנה היא 0.3.

34. תביעות מגיעות לחברת ביטוח לפי תהליך פואסון עם $\lambda=100$ תביעות לחודש. הנח שהתפלגות התביעה היא מ"מ עם תוחלת 2000 ש"ח וסטיית תקן 8000 ש"ח. נתון שתביעה היא מוצדקת בהסתברות 0.8. חשב תוחלת ושונות סך תשלומי החברה לשנה.

35. מכוניות מגיעות לתחנת דלק משני כבישים. מופע המכוניות מכביש א הוא פואסוני עם עוצמה של מכונית אחת לדקה. מופע המכוניות מכביש ב' הוא גם תהליך פואסון עם עוצמה של 0.5 מכונית לדקה. גובה הרכישה של כל לקוח הוא מ"מ נורמלי עם תוחלת 50 ושונות 5 ש"ח. מהי תוחלת ההכנסות של התחנה לשעה? מהי השונות?

36. חנות כלבו נפתחת בשעה 08:00. לקוחות מגיעים לחנות לפי תהליך פואסון עם קצב $\lambda=100$ ליום, כאשר 20% מהלקוחות המגיעים לחנות הן נשים. 60% מהגברים קונים ו- 30% מהנשים קונות. ערך קניה של גבר הוא מ"מ אחיד $Y_i \sim U(10,30)$.

- א. מצא את התפלגות הזמן עד הקניה הראשונה.
 - ב. מהי ההסתברות שעד הגעת האישה הראשונה יקנו בחנות K גברים?
 - ג. מהי תוחלת סך הפדיון עד הגעת האישה הראשונה?
37. מספר התביעות המגיעות לחברת ביטוח מתפלג פואסון עם קצב $\lambda=100$ לחודש.

- א. במחצית הראשונה של החודש התקבלו 30 תביעות. מהי תוחלת מספר התביעות בחודש?
- ב. נתון שמהראשון עד העשירי לחודש התקבלו 10 תביעות. מה ההסתברות שהתביעה הבאה תתקבל לפני העשרים לחודש?
- ג. נתון שהתביעה היא מוצדקת בסיכוי 0.8, מה התפלגות מס, התביעות המוצדקות בחודש?
- ד. הנח שהתפלגות התביעה היא מ"מ עם $\mu=20000$ ו- $\sigma=8000$. תחת הנחת הסעיף הקודם חשב את תוחלת ושונות סך תשלומי החברה.

38. מס' הפונים לחברת ביטוח הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ תביעות בשנה.

- א. הנח ש- 2% מהתביעות הן מזויפות והחברה אינה מטפלת בהן. מהי התפלגות מספר התביעות המזויפות בשנה?
- ב. מהי התפלגות מספר התביעות הלא מזויפות המגיעות בשנה?
- ג. מהי השונות המשותפת בין מספר התביעות המזויפות למספר התקינות בשנה אחת?
- ד. גודל התביעה הוא מ"מ נורמלי עם $\mu=3000$ ו- $\sigma^2=500^2$. מהי תוחלת ושונות סכום התביעות ששולמו בשנה? בחצי שנה?
39. לחנות כל בו מופיעים צרכנים משלושת הסוגים הבאים: נשים (1), ילדים (2) וגברים (3). ידוע כי התפלגות הזמן בין הופעות עוקבות של צרכנים מסוג i היא אקספוננציאלית עם פרמטר λ_i , $i=1,2,3$
- א. תאר את התפלגות המופע לחנות הכלבו
- ב. תאר את התפלגות תהליך המופע של הילדים לחנות הכלבו
- ג. מהי התפלגות הזמן מרגע פתיחת החנות ועד כניסת הגבר החמישי
- ד. סכום הכסף שמוציא לקוח מסוג i מתפלג נורמלי עם μ_i ו- σ_i^2 . מצא את תוחלת ההכנסות של החנות בשמונה שעות.
- ה. חשב את ההסתברות המותנית שמתוך 50 לקוחות שהגיעו לחנות במשך 8 שעות, בדיוק 10 הגיעו בשעה הראשונה.
- ו. כיצד תשתנה תשובתך לסעיף הקודם אם קצב המופע יוכפל?
40. מופע לקוחות לחנות A הוא תהליך פואסון עם פרמטר של 20 לקוחות לשעה. מופע הלקוחות לחנות B הוא תהליך פואסון עם פרמטר של 30 לקוחות לשעה. ההסתברות שלקוח בחנות A ישלם בכרטיס אשראי היא 0.7. ההסתברות שלקוח בחנות B ישלם בכרטיס אשראי היא 0.8. המופעים לשתי החנויות הם בלתי תלויים.
- א. יהי X מ"מ המציין מספר לקוחות הרוכשים בכרטיס אשראי שהגיעו לחנות במהלך 3 שעות. יהי Y מ"מ המציין מספר לקוחות הרוכשים בכרטיס אשראי שהגיעו לחנות B במהלך 2 שעות. חשב $P(X=m|X+Y=n)$, $m \leq n$
- ב. נניח כי היקף הקנייה של לקוח בודד כלשהו בשקלים הוא מ"מ אחיד רציף בקטע (0,500). הנח כי היקפי הקניות של לקוחות שונים הם ממי"ם ב"ת זה בזה ואינם תלויים בתהליך המופע. חשב תוחלת ושונות של היקף הקנייה הכולל בשתי החנויות במהלך שעתיים.
- ג. חשב את ההסתברות שהלקוח השלישי המשלם בכרטיס אשראי יכנס לחנות A לפני שיכנס B הלקוח השני המשלם בכרטיס אשראי.

41. מספר החורים בשיניו של מבוטח בביטוח שיניים הוא תהליך פואסון עם קצב $\lambda=2$ חורים לשנה. 90% מהחורים דורשים סתימה רגילה שעלותה מתפלגת נורמלית עם תוחלת 250 ש"ח וסטית תקן 10 ש"ח. יתר החורים דורשים טיפול שורש. עלות טיפול שורש מתפלגת נורמלית עם תוחלת 750 ש"ח וסטית תקן 10 ש"ח.

- א. מהי התפלגות הזמן עד לטיפול השורש הראשון?
- ב. מהי התפלגות הזמן עד לטיפול השיניים העשירי?
- ג. מה הסיכוי שטיפול השיניים העשירי יהיה טיפול שורש?
- ד. מה הסיכוי שמשנת 2002 עד 2004 יהיו 4 טיפולי שיניים וב- 2003-2005 3 טיפולי שיניים?
- ה. הנח שהביטוח מכסה את כל עלויות הטיפול של מבוטח. מהי תוחלת ושונות סך הוצאות חברת הביטוח על מבוטח במשך 3 שנים?

הרחבה לפיצול פואסון

42. קצב ההדבקות בוירוס ה-HIV מתפלג פואסון עם עוצמה λ . זמן הופעת הסימפטומים של המחלה מרגע ההדבקות בוירוס הוא מ"מ בעל התפלגות כלשהי F . נגדיר $N_1(t)$ מס' החולים שחלו באיידס עד זמן t . $N_2(t)$ מס' הנשאים של הוירוס אשר לא חלו במחלה עד זמן t . מצא כיצד מתפלגים $N_1(t)$, $N_2(t)$.
43. לקוחות נכנסים לחנות לפי תהליך פואסון עם קצב $\lambda=4$ לקוחות לשעה. כל אדם שנכנס הוא גבר בהסתברות 0.5. יש אי תלות בין המאורעות. אם ידוע שגבר שוהה בחנות לפי התפלגות אחידה בקטע (0,1) ואישה שוהה בחנות לפי התפלגות אחידה בקטע (0,2) מהי תוחלת מס' האנשים בחנות בסוף השעה הראשונה?

תהליך פואסון לא הומוגני

44. לקוחות נכנסים לחנות לפי תהליך פואסון לא הומוגני עם עוצמה $\lambda(t)$.
- $$\lambda(t) = \begin{cases} 2t+3 & t \leq 10 \\ 23 & t > 10 \end{cases}$$
- א. $P(N(10)=5)$
 - ב. $P(N(12)-N(9)=5)$
 - ג. $P(T_3-T_2 > 1 \mid T_2=2)$
45. מופע הגעת גברים למופע רוק הינו תהליך פואסוני עם עוצמה λ . כל גבר קובע עם אישה בשעה 00:00. ההסתברות שאישה תחכה לגבר בזמן t היא e^{-t} .
- א. מה התפלגות מס' הזוגות הנכנסים למופע רוק בין השעות 01:00 ל 02:00?
 - ב. מה ההסתברות שעד כניסת הזוג הראשון עברו יותר מעשר דקות?

46. הסנדוויץ' בר נפתח בשעה 00:00 בדיוק ונסגר בשעה 09:00. משעה 00:00 עד 03:00 מגיעים לקוחות בקצב לינארי עולה המתחיל במינימום של 5 לקוחות לשעה ב- 00:00 ומגיע למקסימום של 20 לקוחות ב- 03:00. משעה 03:00 עד 05:00 הקצב הממוצע הוא 20 לקוחות לשעה. בשעה 05:00 הקצב הממוצע יורד לינארית מ-20 לקוחות לשעה עד למינימום של 12 לקוחות לשעה בשעת הסגירה.

- א. הצג את המודל של λ .
- ב. מה הסיכוי שבין 00:30 ל- 01:30 לא נכנס אף לקוח?
- ג. מצא את מס' הלקוחות הצפוי בין 00:30 ל- 01:30
- ד. מה ההסתברות שבין 01:00 ל- 04:00 יגיעו 8 לקוחות?
- ה. ידוע שהלקוח העשירי הגיע ב- 02:00, מה ההסתברות שהזמן בין כניסת הלקוח העשירי ללקוח האחד – עשר גדול משעה?

47. נתון תהליך פואסון לא הומגני עם עוצמה $\lambda(t)$

$$\lambda(t) = \begin{cases} t^2 & t \leq 2 \\ 2+t & t > 2 \end{cases}$$

- א. $P(N(5)=3)$
- ב. $P(T_4 - T_3 \geq 2 \mid T_3=4)$
- ג. $P(N(5)=8 \mid N(1)=2)$
48. מופע המתרחצים לים הוא מ"מ פואסוני עם עוצמה המשתנה בהתאם לעונה. בעונת החורף (ינואר עד מרץ) מגיעים מתרחצים לים בקצב לינארי עולה המתחיל במינימום של 20 מתרחצים לחודש ומגיע למקסימום של 60 מתרחצים במרץ ב- 03:00. מחודש אפריל עד חודש יוני הקצב הממוצע הוא 60 מתרחצים לחודש. בחודש יולי הקצב הממוצע עולה לינארית מ-60 מתרחצים בחודש יולי עד למקסימום של 180 מתרחצים בחודש ספטמבר. מאוקטובר הקצב מתחיל לרדת לינארית מ-180 מתרחצים באוק' למינימום של 20 מתרחצים בחודש דצמבר.

- א. הצג את המודל של λ .
- ב. מה הסיכוי שלא הגיע אף מתרחץ לים בחודש פברואר?
- ג. מה ההסתברות שבין מאי לאוגוסט יגיעו 95 מתרחצים לים?
- ד. מהו מס' המתרחצים הצפוי להגיע בין פברואר לאפריל?
- ה. ידוע שמתרחץ מס' 100 הגיע בחודש יוני, מה ההסתברות שהזמן בין הגעת מתרחץ מס' 100 לבין זמן הגעת המתרחץ ה- 101 גדול מחודש?

שאלות ממבחנים

פרופ' שמואל גל

1. בין השעות 8 ל-9 נכנסים לחנות אנשים לפי תהליך פואסון בעל קצב של 4 לקוחות לשעה. כל אדם שנכנס הוא גבר הוא בהסתברות $\frac{1}{4}$ גבר ובהסתברות $\frac{3}{4}$ אישה באופן ב"ת בהיסטוריה.
 - א. מהי ההסתברות שבמשך השעה ייכנסו מס' שווה של גברים ונשים
 - ב. מהי ההסתברות המאורע הבא: בין 8 לבין 8:30 לא נכנס אף גבר ובין 8:30 עד 9 לא נכנסה אף אישה
 - ג. אם ידוע שבין 8 ל-9 הגיעו גבר אחד ושתי נשים מה ההסתברות שבין 8 ל-8:30 נכנסה אישה אחת ובין 8:30 ל-9 נכנסו גבר ואישה
2. לחנות נכנסים אנשים בתהליך פואסון בקצב של 3 לשעה. כל אדם שנכנס הוא בהסתברות $\frac{1}{2}$ גבר ובהסתברות $\frac{1}{2}$ אישה ויש אי תלות בין המאורעות.
 - א. אם ידוע שגבר שוהה בחנות לפי הת' אחידה בקטע $(0, \frac{1}{2})$ ואישה שוהה בחנות לפי הת' אחידה בקטע $(0,1)$ מהי תוחלת מס' האנשים שיהיו בחנות בסוף השעה הראשונה?
 - ב. אם ידוע שבשעה הראשונה נכנסו 3 אנשים מהי ההסתברות ששנים מהם נכנסו בחצי השעה הראשונה ואחד בחצי השעה האחרונה?
 - ג. אם ידוע שלחנות נכנסו במשך השעה גבר אחד ושתי נשים מהי ההסתברות שבחצי השעה הראשונה נכנסו גבר ואישה ובחצי השעה השניה אישה אחת?
3. לקוחות נכנסים לחנות במופע פואסוני עם קצב של 2 אנשים לשעה. כל לקוח הוא גבר בסיכוי $\frac{1}{3}$ ואישה בסיכוי $\frac{2}{3}$ באופן ב"ת בהיסטוריה.
 - א. מהי ההסתברות שהלקוח הרביעי יגיע תוך שעתיים?
 - ב. מהי ההסתברות שבין הלקוח השני והשלישי יהיה מרווח זמן של לפחות שעה?
 - ג. נתון שבמשך השעתיים הראשונות הגיעו 4 לקוחות. מהי ההסתברות המותנה שבשעה הראשונה הגיעו גבר ואישה ובשעה השנייה עוד גבר ואישה?
4. אנשים נכנסים למוזיאון בתהליך פואסון עם קצב של 1 לשעה. המוזיאון נפתח בשעה 8 בבוקר. כל אחד מהסעיפים הבאים מתייחס למצב נפרד
 - א. מהי ההסתברות שבין 8 ל-11 נכנסו 3 אנשים?
 - ב. מהי תוחלת הזמן עד שייכנס האדם החמישי?
 - ג. אם ידוע שבין 8 ל-11 נכנסו 3 אנשים מהי ההסתברות שהאדם הראשון ביניהם יגיע לפני 9 בבוקר?
 - ד. אם ידוע שבין 8 ל-11 נכנסו 3 אנשים מהי ההסתברות שאדם אחד יגיע בין 8 ל-9, אף אחד לא יגיע בין 9 ל-10 ושני אנשים יגיעו בין 10 ל-11?

- ה. אם כל מבקר שוהה במוזיאון תקופת זמן המפולגת אחיד בין 0 שעות לשעתיים באופן ב"ת במבקרים האחרים, מהי תוחלת מס' האנשים הנמצאים במוזיאון בשעה 11? ד"ר יונית ברון
1. לתחרות קליעה לסל מגיעים אנשים לפי מופע פואסוני בקצב של 5 אנשים לשעה. רדיוס הסל הוא 10 ס"מ. ההסתברות שאדם יקלע ויזכה בפרס היא $\frac{2}{3}$. האנשים זורקים את הכדור באופן ב"ת זה בזה.
- א. מה ההסתברות שבמשך שעתיים חולקו 7 פרסים?
- ב. התחרות התחילה בשעה 18:00. חשב את ההסתברות שהפרס השני חולק לכל המאוחר בשעה 18:30. יהי X מ"מ המציין את מספר האנשים שהגיעו לתחרות בין 18:00 ל- 18:30. יהי Y מ"מ המציין את מס' האנשים שהגיעו בין 18:00 ל- 18:45. חשב את $E(XY)$
2. במפעל מכונה לכיפוף פחים. אל המכונה מגיעים 3 סוגי פחים. פחים בעובי 2 מ"מ, בעובי 4 מ"מ ובעובי 8 מ"מ. מניחים שתהליכי המופע של הפחים הם תהליכים פואסונים ב"ת בעוצמות 2 פחים לשעה, 10 פחים לשעה ו- 0.5 פחים לשעה, בהתאמה. זמני הכיפוף זניחים. המכונה מתקלקלת מידי פעם. הזמן הנדרש לכל קלקול הוא שעתיים בדיוק.
- א. בשעה 10 התקלקלה המכונה. חשב את מספר החלקים שהצטברו לפני המכונה עד השעה 11
- ב. חשב את ההסתברות שבמשך הזמן שנמשך לתיקון המכונה יצטברו 4 פחים של 2 מ"מ, 10 פחים של 4 מ"מ ו- 2 פחים של 8 מ"מ.
- ג. מהי תוחלת הזמן בין 2 כיפופים כאשר המכונה עובדת?
- ד. כל 10 כיפופים יש לכוון את מעצור המכונה. חשב את התוחלת והשונוות של הזמן בין כיוונים עוקבים.
3. משאיות מרחבי הארץ מביאות תערובת דגנים למפעל. המשאיות מגיעות לפי תהליך פואסון $N(t)$ ותוחלת מספר המשאיות לשעה הוא 1. משקל המטען שמביאה משאית הוא מ"מ X המפולג אחיד רציף בקטע (15,25)
- א. נסמן מ"מ $Z = \text{סה"כ משקל הדגנים שהביאו המשאיות עד זמן } t$ מצא ביטוי ל Z ע"י שימוש בשאר המשתנים.
- ב. מהי תוחלת ושונוות משקל הדגנים שמגיע למפעל במשך 8 שעות.
- ג. נניח שכמות הדגנים של כל משאית המגיעה נבדקת ומשאית המכילה פחות מ- 19.5 טון מופנית למפעל אחר מה ההסתברות שבמשך 8 שעות יגיעו למפעל האחר 3 משאיות בדיוק?
- פרופ' אסתי פרוסטיג
1. נוסעים מגיעים לתחנת אוטובוס לפי תהליך פואסון עם פרמטר 10 נוסעים לשעה. אוטובוס מגיע אחת לשעה נניח בשעות שלמות. וכאשר מגיע אוסף את הנוסעים.

- א. מה הסיכוי שאוטובוס יאסוף 10 נוסעים?
- ב. נתון שבאוטובוסים של שעות 10 ו-11 עלו 40 נוסעים. מה הסיכוי שבאוטובוס של שעה 10 נסעו 25 נוסעים?
- ג. רון נסע באוטובוס של שעה 1. מה הסיכוי שחיכה פחות מ-15 דקות?
- ד. האוטובוס של שעה 10 אסף 10 נוסעים. מה הסיכוי שהאדם האחרון שהגיע חיכה פחות מ-5 דקות?
- ה. משעה 10 עד 10:30 הגיעו 5 נוסעים, משעה 10:20 עד 11:00 הגיעו 15 נוסעים. מה הסיכוי שמשעה 10:20 עד 10:30 לא הגיע אף נוסע?
- הנח כעת שזמנים בין אוטובוסים הם מ"מים ב"ת בעלי פילוג אקספוננציאלי עם תוחלת שעה.
- ו. מה התפלגות זמן ההמתנה של נוסע לאוטובוס?
- ז. מה תוחלת ושונות מספר הנוסעים שנסעו באוטובוסים מהתחנה במשך 8 שעות?
- ח. הנח שמופע הנוסעים הוא תהליך פואסון לא הומוגני עם פונקצית הקצב הבאה
- $$\lambda(t) = \begin{cases} 10 + (10-t)^2 & 8 < t < 10 \\ 10 & t > 10 \end{cases}$$
- תן ביטוי לסיכוי שמשעה 8:30 עד 10:30 יגיעו 20 נוסעים.
2. למוכר גלידה חנות עם גלידות משלושה סוגים. גלידות שמנת, יוגורט קפוא וסורבה פירות. קוני גלידות השמנת מגיעים לפי מופע פואסון עם ממוצע של 100 קונים ליום. קוני היוגורט מגיעים לפי מופע פואסוני עם פרמטר 50 קונים ליום. קוני הסורבה מגיעים לפי מופע פואסוני עם פרמטר 10 קונים ליום. הנח שכל קונה קונה גלידה אחת בלבד ותהליכי המופע של שלושת הסוגים הם ב"ת. ענה על הסעיפים הבאים:
- א. מה הסיכוי שבשעה ימי עבודה יגיעו 550 קוני גלידות שמנת, 60 קוני יוגורט קפוא ו-8 צרכני סורבה?
- ב. מה הסיכוי שבמשך 3 ימים יגיעו 600 קונים?
- ג. נתון שבמשך 6 ימי עבודה הגיעו 900 קונים. מה הסיכוי ש-650 מהם רכשו גלידת שמנת 200 יוגורט קפוא והשאר קנו סורבה?
- ד. נתון שבמשך שבוע (6 ימים) נקנו 1000 גלידות מכל הסוגים. מה הסיכוי ש-600 נקנו בשלושת הימים האחרונים.
- ה. נתון שבמשך 6 ימים הגיעו 50 קוני סורבה. מה הסיכוי שקונה הסורבה הראשון הגיע אחרי יום ראשון?
3. מספר הלילות בהם זוג יוצא לבילוי הוא תהליך פואסון עם קצב של 5 פעמים בחודש (הנח שבחודש 30 יום). בני הזוג נוהגים לבלות באופן הבא: 40% מהפעמים הם רואים סרט. 20% מהפעמים הם רואים הצגה. 10% מהפעמים הם יוצאים לאירוע משפחתי. 30% מהפעמים יוצאים למסעדה.

- א. כיצד מתפלג מס' האירועים המשפחתיים בהם ביקרו בני הזוג בשנה? מהי תוחלת מס' האירועים המשפחתיים בהם ביקרו בני הזוג בשנה?
- ב. נתון שבמשך החודש האחרון יצאו בני הזוג 5 פעמים לבילוי. מה ההסתברות שנהנו מכל סוג של בילוי לפחות פעם אחת?
- ג. מה הסיכוי שיראו לפחות 3 סרטים לפני שיראו הצגה?
- ד. נתון שבמשך 3 חודשים ראו בדיוק 6 סרטים. מה הסיכוי שראו בדיוק שני סרטים בכל חודש?
- ה. חשב את התוחלת והשונות של מספר הפעמים שהזוג יצא לאירועים משפחתיים במשך 3 חודשים.
- ו. חשב את הקווריאנס בין מס' הפעמים שאכל הזוג במסעדה במשך 5 חודשים לבין מספר הפעמים שאכלו במסעדה במשך 9 חודשים.
4. מופע נוסעים לתחנת אוטובוסים הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ נוסעים לשעה. מופע אוטובוסים לתחנה הוא תהליך פואסון עם פרמטר μ אוטובוסים לשעה. אוטובוס המגיע לתחנה אוסף את כל הנוסעים בתחנה.
- א. מהי תוחלת ושונות מספר הנוסעים שאוסף האוטובוס?
- ב. הנוסעים שהאוטובוס אוסף בתחנה יורדים בארבע תחנות באופן הבא: 20% בתחנה מס' 1, 30% בתחנה מס' 2, 40% בתחנה מס' 3 והשאר בתחנה מס' 4. מהי תוחלת ושונות מס' הנוסעים היורדים בתחנה 1?
- ג. נתון שנוסע מחכה לאוטובוס כבר 10 דקות. מהי תוחלת זמן ההמתנה שלו לאוטובוס?
- ד. נתון שמשעה 10 עד שעה 11 הגיעו 5 אוטובוסים.
- ד1. חשב את הסיכוי שהאוטובוס הראשון הגיע לפני 10:15
- ד2. מהי תוחלת מס' הנוסעים שאסף האוטובוס הראשון? (כביטוי בלבד)

נושא הפרק: שרשראות מרקוב בזמן רציף

1. במעבדה נערך ניסוי על אמבות. ידוע כי אמבה מתחלקת לפי קצב \exp עם $\lambda=3$, כמו-כן, ידוע שאורך חיי אמבה \exp עם $\mu=2$, וקצב הופעת אמבה חדשה הוא \exp עם $\delta=1$.
- א. תאר את התהליך כתהליך לידה ומוות.
- ב. רשום את מטריצת היוצר.
- ג. רשום את המטריצה המשוכנת.
2. בחדר דולקות 2 נורות. משך חיי הנורה \exp עם $\lambda=2$, כאשר נורה מתקלקלת היא מוחלפת ע"י איש התחזוקה של הבניין אשר זמן עבודתו מפולג \exp עם $\mu=3$.
- א. רשום את המטריצה המשוכנת.
- ב. רשום את מטריצת עוצמות המעבר - מטריצת היוצר.
- ג. מצא את ההסתברויות הסטציונריות.
3. בקונדיטורית "גם יפה וגם אופה" 3 תנורי אפייה. משך הזמן שעובר עד שתנור מתקלקל הוא מ"מ \exp עם $\lambda=2$, זמן תיקון התנור הוא מ"מ \exp עם $\mu=3$. אורכי החיים של התנורים וזמני התיקון ב"ת. הקונדיטוריה מעסיקה 2 טכנאים. נגדיר: $X(t)$ - מספר תנורים מקולקלים עד זמן t .
- א. רשום את המטריצה המשוכנת.
- ב. מצא את תוחלת משכי השהייה בכל מצב.
- ג. מצא את פרופורציית הזמן שהמערכת בכל מצב.
- ד. הקונדיטוריה מפסידה 50 ₪ לשעה על תנור מקולקל ועלות טכנאי היא 30 ₪ לשעה, חשב את תוחלת ההפסד של הקונדיטוריה לשעה.
4. בחנות 2 מכונות "פאנטה שוקאטה" ושני טכנאים. הזמן עד לקלוקל כל מכונה הוא מ"מ \exp עם $\lambda=3$ לשעה. זמני קלוקל המכונות ב"ת. זמן התיקון הוא מ"מ \exp עם $\mu=6$ לשעה. זמני התיקון ב"ת.
- א. רשום את המטריצה המשוכנת.
- ב. מהי פרופורציית הזמן ש- i מכונות מקולקלות $i=0,1,2$?
- ג. על כל מכונה מקולקלת החנות מפסידה 15 ₪ לשעה, מהו ההפסד הממוצע של החנות?
5. ל-MR.BIG 3 טלפונים ניידים זהים (ו 3 מטענים זהים). אורך חיי סוללת הטלפון הוא \exp עם תוחלת של 4 שעות. משך זמן הטענת הסוללה הוא \exp עם תוחלת של שעתיים. זמני ההטענה והתרוקנות הסוללה ב"ת.
- א. רשום את מטריצת הסתברויות המעבר.
- ב. מהי תוחלת משך השהייה בכךל מצב?

- ג. חשב את פרופורציית הזמן שבדיוק i - סוללות בהטענה $i=0,1,2,3$
6. בקומת ה-5000 4 מכונות צילום ו-3 טכנאים העומדים לרשותן. אורך חיי מכונה הוא מ"מ \exp עם פרמטר $\lambda=2$. זמן תיקון מכונה הוא מ"מ \exp עם פרמטר $\mu=3$. אורכי החיים וזמני התיקון הם ב"ת. יהי $X(t)$ מספר המקולקלות בזמן t .
- א. כתוב את מטריצת הסתברויות המעבר של השרשרת.
- ב. מצא את תוחלת זמני השהייה בכל מצב.
- ג. מצא את פרופורציית הזמן שהמערכת נמצאת בכל מצב.
7. במספרת "וואו וואו שופו עליה" 5 פנים, הזמן עד לקלקול פן מתפלג \exp עם תוחלת של 5 ימים. פן מקולקל נשלח לג'גו' הטכנאי ומתוקן לפי תהליך \exp עם תוחלת של יומיים. זמני הקלקול והתיקון ב"ת.
- א. רשום את מטריצת הסתברויות המעבר.
- ב. חשב את פרופורציית הזמן שבדיוק i - פנים בתיקון $i=0,1,2,3,4,5$
- ג. המספרה מפסידה ש"ח ליום בגין פן מקולקל, ג'גו' לוקח 150 ש"ח ליום עבודה. חשב תוחלת הפסד המספרה בגין פן מקולקל.
8. לקוחות מגיעים לרופא שיניים לפי מופע פואסון עם $\lambda=1/12$ אנשים ליום. זמן טיפול בלקוח מפולג \exp עם $\mu=1/8$.
- א. מצא את דרגת התעסוקה של הרופא.
- ב. מצא מספר אנשים ממוצע במרפאה.
- ג. אם קצב המופעים יגדל ב-20%, מה תהיה תוחלת מספר האנשים במרפאה?
- ד. רופא השיניים שוקל העסקת סייעת על-מנת לקצר את התורים. הסייעת יכולה להגדיל את קצב הטיפול ל $\mu=1/6$ עלות העסקת הסייעת 200 ש"ח ליום, שהות לקוח במרפאה עולה לרופא השיניים 100 ש"ח ליום (הרופא מגיש ללקוחותיו הממתנים קפה ועוגיות יקרות), האם על הרופא להעסיק סייעת?
9. מופע אנשים לתא טלפון ציבורי הוא לפי תהליך פואסון עם זמן ממוצע של 10 דקות בין מופע למופע. זמן שיחה ממוצעת הוא מ"מ \exp עם ממוצע של 3 דקות.
- א. מה הסיכוי שאדם המגיע לתא הטלפון ייאלץ להמתין?
- ב. מהי תוחלת אורך התור?
- ג. מהי תוחלת משך ההמתנה בתור?
- ד. מה הסיכוי שאדם יצטרך להמתין בתור יותר מ-10 דקות עד שהטלפון יתפנה?
- ה. מה הסיכוי שמשך זמן שהות אדם במערכת (תור+שימוש בטלפון) יעלה על 10 דקות?

- ו. מהו החלק היום שהטלפון בשימוש?
- ז. חברת הטלפונים תתקין טלפון נוסף אם תשתכנע שאדם צריך להמתין לפחות 3 דקות עד שיוכל להשתמש בטלפון. בכמה צריך לגדול קצב מופע האנשים כדי להצדיק הקמת תא טלפון נוסף?
- ח. במערכת כרגע 2 אנשים, מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שיהיו 3 אנשים?
(נשים לב שיש להביא בחשבון את העובדה שאנשים גם עוזבים)
- ט. במערכת כרגע אדם אחד, מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שיהיו במערכת 3 אנשים?
10. לקוחות מגיעים ל"מגדה-פוחתת בקלפים, קוראת בקפה וברטוב של העין" לפי קצב פואסון עם תוחלת של $1/9$ אנשים ביום. משך הזמן שמגדה מגלה את העתיד הוא מ"מ \exp עם תוחלת של $1/10$.
- א. תאר את משוואות שו"מ.
- ב. מצא את פרופורצית הזמן שמגדה שותה קפה לבד.
- ג. מהו מספר האנשים הממוצע המחכים בתור?
- ד. מצא את משך ההמתנה הממוצע בתור.
11. מופע לקוחות למכולת בשעה הוא פואסוני עם קצב $\lambda=5$. במכולת קופאית אחת שמשך שירותה הוא מ"מ \exp עם $\mu=8$.
- א. מצא את תוחלת אורך התור.
- ב. מהי דרגת התעסוקה של הקופאית?
- ג. מהו משך הזמן הממוצע שלקוח שוהה במכולת?
- ד. מהי ההסתברות שלקוח ישהה יותר משעתיים במכולת?
- ה. המי ההסתברות שלקוח ישהה יותר משעה בתור?
- ו. דורון נכנס למכולת לקנות חלב ושם לב שהוא הלך היחיד, מהי תוחלת הזמן עד שיהיו 2 אנשים במכולת?
(נשים לב שיש להביא בחשבון את העובדה שאנשים גם עוזבים)
12. נתון תור $M/M/1$ עם קצב מופעים של 2 צרכנים בשעה, וזמן שירות ממוצע של 15 דקות. כרגע ישנו צרכן אחד במערכת.
- א. מהי תוחלת הזמן עד שנגיע בפעם הראשונה ל-3 צרכנים?
- ב. חשב את ההסתברות שהמערכת תתרוקן לפני שתגיע למצב של 2 צרכנים.
- ג. מבלי לחשב במפורט-איך ישתנו התשובות לא וב אם קצב מופע הצרכנים ומשך השירות יוכפלו?

13. לקוחות מגיעים לסופר לפי מופע פואסוני בקצב 1 לדקה. זמן שהיית לקוח הוא מ"מ המפולג \exp עם תוחלת של 2 דקות, ב"ת באחרים ובהסטוריה.

א. תאר את התהליך בתור לידה ומוות.

ב. מהי ההסתברות לטו"א שהסופר ריק?

ג. מהו ממוצע מספר האנשים בסופר לטו"א?

ד. כרגע הסופר ריק, מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שיהיו בסופר 3 אנשים?

(נשים לב שיש להביא בחשבון את העובדה שאנשים גם עוזבים)

14. בדוכן הנקניקיות "משה, תביא ב'חרדל" 2 מוכרים. אנשים מגיעים לדוכן לפי קצב פואסון עם $\lambda=8$ לקוחות לשעה. קצב שירות המוכרים הוא מ"מ \exp עם $\mu=5$ כ"א.

א. תאר את דיאגרמת המצבים, רשום משוואות שו"מ.

ב. מצא את תוחלת מספר האנשים בדוכן.

15. לקוחות מתקשרים למוקד 144 לפי מופע פואסון בקצב 2 לקוחות לדקה. במוקד 2 טלפניות שושי ושמה

הפועלות בצורה ב"ת עם ממוצע זמן שירות של 0.5 דקה. כל אדם שמתקשר מופנה לטלפנית פנויה או מחכה

בתור אם 2 הטלפניות תפוסות.

א. מהי ההסתברות שאין אף אדם במערכת?

ב. מהי ההסתברות שאף אדם לא ימתין בתור?

ג. מהו ממוצע מספר האנשים במערכת?

ד. מהי תוחלת משך הזמן ש"יבלה" כל אחד מהאנשים במערכת?

ה. הטלפנית שושי חלתה ולכן לא תגיע היום לעבודה. מה תהיה תשובתך לסעיפים א-ד?

16. בחנות מקום ל-2 אנשים, אנשים מגיעים לחנות לפי קצב פואסון של 6 לשעה, אדם המגיע לחנות ומוצא

אותה מלאה, לא נכנס ועוזב. עבור כל אדם משך השהייה הוא מ"מ המפולג \exp עם תוחלת של 15 דקות, ב"ת

בזמן השהייה של אנשים אחרים.

א. כרגע החנות ריקה, מהי תוחלת הזמן עד שתתמלא?

ב. לטווח ארוך-באיזה % מהזמן החנות מלאה?

ג. ענה מבלי לחשב-איך ישתנו תשובותיך לא' וב' כאשר:

1. קצב ההגעה יוכפל?

2. משך שהייה ממוצעת ירד ל-7.5 דקות?

3. כאשר יתקיימו גם 1 וגם 2?

17. מופע ילדים ל"דוד הגולן-בחצר ביה"ס" מתפלג פואסון עם $\lambda=6$, משך השירות הוא מ"מ \exp עם $\mu=8$. כאשר ילד מגיע ורואה 4 ילדים, הוא חוזר לכיתה כשמבט מאוכזב נסוך על פניו.

- מהי תוחלת מספר הילדים במערכת?
- מהי תוחלת משך הזמן שילד נמצא במערכת?
- מהי פרופורציית הזמן ש"דוד הגולן-בחצר ביה"ס" בטל?
- מהי תוחלת משך הזמן שילד מחכה בתור?
- מהי ההסתברות שילד חוזר לכיתה כשמבט מאוכזב נסוך על פניו?

18. מופע לקוחות למוסך מתפלג פואסון עם פרמטר $\lambda=5$, במוסך מוסכניק אחד בלבד שמשך שירותו הוא \exp עם $\mu=2$. לקוח המגיע ורואה 3 לקוחות-עוזב. המוסכניק מרויח 180 ש"ח על כל לקוח.

- הצג את המטריצה המשוכנת.
- מצא את פרופורציית הזמן שבמוסך i לקוחות. $i=0,1,2,3$.
- מצא את תוחלת הרווח של המוסכניק ב-5 שעות.
- פי כמה יגדל הרווח אם יכפיל את קצב עבודתו?

19. תחנת מוניות מסוימת משורתת ע"י מונית אחת בלבד. לקוחות מגיעים לתחנה לפי תהליך פואסון עם $\lambda=5$, משך זמן הנסיעה הוא מ"מ \exp עם תוחלת 0.5 לשעה. לקוח המגיע לתחנה ריקה מחכה עד בוא המונית, לקוח המגיע ורואה לקוח ממתין, עוזב מיד. מונית המגיעה לתחנה ריקה מחכה עד בוא לקוח ועם בואו מיד תסיעו, (אין זמן בו לקוח ומונית נמצאים יחדיו בתחנה פרט מכאשר הם יוצאים לדרך).

- תאר את המצבים האפשריים, תאר את המערכת כתהליך מרקובי.
- חשב הסתברויות סטציונריות.

- מה הסיכוי שנוסע המגיע לתחנה יקבל שירות מבלי להמתין?
- מה הסיכוי שלקוח המגיע יעזוב מבלי לקבל שירות?
- הנח שעבור נסיעה מרויח הנהג 50 ש"ח, מהי תוחלת הרווח שלו?

20. סטודנטים מגיעים לשעת קבלה לפי תהליך פואסון עם $\lambda=3$ לשעה. משך זמן השירות לסטודנט מתפלג \exp עם תוחלת של 0.5 שעה. בחדר המתרגלים יושבות ענת והדס וכן ישנם 2 מקומות המתנה, סטודנט המגיע ורואה חדר מלא הולך. (גם כך ממילא לא ממש רצה לבוא...).

- מה הסיכוי שסטודנט המגיע ייאלץ להמתין?
- מהי תוחלת מספר הסטודנטים בשעת הקבלה?
- מהי תוחלת מספר הסטודנטים הממתינים בתור?

ד. מהי ההסתברות שהדס וענת סתם מקשקות להן?

ה. מהי תוחלת משך הזמן שסטודנט נמצא במערכת?

ו. מהי תוחלת משך ההמתנה בתור?

ז. גיורא הגיע לשעת קבלה ומצא שענת והדס פנויות, מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שיגיע סטודנט נוסף?

21. במספרת "סרג'-עיצובים בסטייל" 3 מעצבי שיער, ו-2 מקומות המתנה. מופע הלקוחות למספרה הוא פואסוני עם $\lambda=3$ לשעה. זמן תספורת הוא מ"מ \exp עם $\mu=2$. לקוח המגיע ורואה מספרה ריקה, הולך לבלי שוב.

א. כתוב את מטריצת הסתברויות המעבר של המטריצה המשוכנת.

ב. חשב את פרופורציית הזמן בו 3 מעצבי השיער בטלים.

ג. המספרה מרויחה על כל תספורת לפי מ"מ אחיד בקטע (100,450), מהי תוחלת הרווח של המספרה ב-3 שעות?

22. בסטקיית "מה שתבקש-ישר על האש" 2 מוכרים. מופע הלקוחות לסטקייה הוא לפי תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda=3$, משך השירות הוא מ"מ \exp עם $\mu=4$, אדם המגיע לסטקייה ורואה 5 אנשים, הולך לפלאפל שממול. יהי $X(t)$ -מספר הרעבים בסטקייה בזמן t .

א. כתוב את מטריצת הסתברויות המעבר.

ב. חשב את פרופורציית הזמן בו המוכרים בטלים.

ג. מהו אורך התור הממוצע?

ד. מהו משך זמן שהייה הממוצע במערכת?

23. שיחות מגיעות למרכזיה טלפונית בה 4 קוים, לפי קצב פואסוני של 4 שיחות לשעה. משך זמני השיחות הם מ"מ ב"ת בעלי התפלגות \exp עם תוחלת של 0.5 לשעה. שיחה המגיעה כאשר כל הקוים תפוסים, אינה נענית ועוזבת את המערכת לבלי שוב. נגדיר $X(t)$ -מספר קוים תפוסים בזמן t .

א. ידוע שכעת 4 הקוים תפוסים, מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שיתפנה לפחות קו אחד?

ב. מהי פרופורציית הזמן שכל הטלפניות בטלות?

ג. מהי פרופורציית הזמן שכל הטלפניות עסוקות?

ד. מהו ממוצע הקוים התפוסים?

ה. על כל שיחה נכנסת מרויחים 20 ש"ח, מהי תוחלת הרווח לשעה?

24. לפקיד במשרד ממשלתי מחכים בתור, כאשר הראשון בתור מקבל שירות מהפקיד והשאר ממתינים לתורם ומקבלים שירות לפי סדר הופעתם. הלקוחות מגיעים לפי מופע פואסון, כאשר קצב ההגעה הוא 4 בשעה. משך זמן השירות הוא M^{exp} ב"ת בהסתוריה עם ממוצע של 10 דקות.

- א. מהו % הזמן בטווח הארוך שבו אין לקוחות במשרד?
- ב. מהו המספר הממוצע של לקוחות במשרד?
- ג. מהי תוחלת הזמן בו ימתין לקוח לתורו?
- ד. מהי ההסתברות שלקוח ישהה במשרד יותר מ-30 דקות?
- ה. ענה מבלי לחשב-איך ישתנו התשובות לא'-ג' אם המשרד יכול להכיל רק 5 אנשים?

25. בית קפה פועל בצורה רציפה 24 שעות ביממה. בבית הקפה n מקומות ישיבה ולקוחות הבאים ומוצאים אותו מלא-עוזבים. הלקוחות מגיעים בקצב של 4 לשעה. הלקוחות משורתים לפי קצב הגעתם ע"י מלצר אחד שמשך זמן שירותו הוא M^{exp} עם ממוצע 15 דקות. המלצר משרת בו-זמנית רק לקוח אחד.

- א. לטווח ארוך-מה % הזמן שבית הקפה ריק?
- ב. כרגע בית הקפה ריק, מהי תוחלת הזמן שיעבור עד שיהיו בו 3 אנשים?
- ג. בעל בית הקפה מרוויח מכל לקוח 10 ש"ח, מה יהיו תקבוליו בממוצע במשך 24 שעות?
- ד. בית הקפה הורחב מ- n ל- $2n$, האם התקבולים הוכפלו? נמק מתמטית.

שאלות ממבחנים

1. מכוניות מגיעות לתיקון במערכת בת שרת יחיד. המכוניות מגיעות לפי תהליך פואסון עם קצב של $\lambda=1$ מכונה לשעה. זמן התיקון של השרת הוא אקס' כאשר מס' התיקונים הממוצע לשעה הוא 3.
 - א. מה ההסתברות שזמן השהיה במערכת יהיה קטן משעתיים?
 - ב. מהי תוחלת הזמן שהמכונה תשהה במערכת?
 - ג. מהי תוחלת אורך התור?
 - ד. מהי ההסתברות לזמן ארוך שבו המערכת ריקה?
 - ה. כיצד ישתנו תשובותייך לסעיפים הנ"ל אם קצב המופע של המכוניות יעלה ל-2? עבור כל סעיף ענה האם התשובה תהיה קטנה יותר, גדולה יותר או ללא שינוי.
2. לקוחות מגיעים לפי תהליך פואסון בקצב של 3 לשעה. ישנו שרת אחד המטפל בלקוחות בקצב של 4 לשעה. המוסך קולט לכל היותר 2 לקוחות.
 - א. לטווח ארוך, מהי ההסתברות שבמערכת ישו 2 לקוחות?
 - ב. מהו ממוצע מס' הלקוחות במערכת?
 - ג. מהי תוחלת הזמן שישהה לקוח במערכת?

7. מהי ההסתברות שלקוח ישהה יותר משעה במערכת?
3. לקוחות מגיעים למוסך בתהליך פואסון בעל קצב 2 לשעה. במוסך ישנו שרת אחד בעל קצב תיקונים של 4 לשעה. כל לקוח שמגיע מחנה את מכוניתו באזור התיקונים ומחכה בחדר ההמתנה שגודלו 3 עד אשר מכוניתו תתוקן. אנשים הרואים שחדר ההמתנה מלא לא עוזבים את המוסך אלא מחכים בחוץ.
- א. נניח שכרגע יש אדם אחד בחדר ההמתנה. כמה זמן יעבור עד אשר חדר ההמתנה יתמלא?
- ב. מהי פרופורצית הזמן שחדר ההמתנה יהיה ריק?
- ג. מהו % הזמן שחדר ההמתנה יהיה מלא?
- ד. לפנינו מוסך שני שבו קצב מופע המכוניות גדול פי 2 ושאר הנתונים ללא שינוי. כיצד ישתנו תשובותיך?
- ה. אם לקוחות שרואים חדר המתנה מלא הולכים ולא חוזרים, כיצד ישתנו תשובותיך?

בהצלחה!

ענת והדס.