

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן סופי, מועד א'

15.7.2007

מרצים: פרופסור אסתר פרוסטיג, מר. יוני נצרת.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, גב' אולגה פרידליאנד.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
 - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 21 נקודות.
 - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 30 נקודות.
 - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 49 נקודות.
- יש לענות על חלקים א' ו ב' אך ורק בטופס התשובות.
- יש לענות על חלק ג' אך ורק במחברת באופן מסודר.
- בסיום המבחן יש להגיש את כל הדפים לבוחנות (לא ניתן לשמור את טופס הבחינה).

בהצלחה

טופס תשובות

יש לרשום שם ומספר ת"ז באופן ברור:

שם: _____
 ת"ז: _____

עבור כל שאלה יש לסמן עיגול סביב תשובה אחת בלבד באופן ברור וחד-משמעי.

תשובות לחלק א:

1-א	נכון	לא נכון
2-א	נכון	לא נכון
3-א	נכון	לא נכון
4-א	נכון	לא נכון
5-א	נכון	לא נכון
6-א	נכון	לא נכון
7-א	נכון	לא נכון

תשובות לחלק ב:

1-ב	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
2-ב	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
3-ב	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
4-ב	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
5-ב	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
6-ב	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות בטופס ההגשה באופן ברור.

(1-א) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון. אזי $N_{20.4}$ ו $N_{10.2}$ הינם משתנים מקריים בלתי תלויים.

(2-א) נתונה מערכת תורים M/M/1 אשר התחילה לעבוד בזמן 0, עם 0 צרכנים במערכת. אם כך מתקיים כי מספר הצרכנים במערכת בזמן 3, מתפלג כמו משתנה מקרי גיאומטרי סופר כישלונות עם פרמטר λ/μ .

(3-א) יהיו $\{X_1, X_2, X_3, \dots\}$ סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים. אזי $\{S_n = \sum_{i=1}^n X_i, n = 1, 2, \dots\}$ הוא תהליך עם אינקרימנטים בלתי תלויים.

(4-א) בשרשרת מרקוב אי-פריקה קימות תמיד הסתברויות גבוליות.

(5-א) נתונה שרשרת מרקוב אי-פריקה עם מרחב מצבים סופי. נגדיר את המשתנה המקרי T_j - מספר הצעדים עד שלראשונה השרשרת מבקרת במצב j. אזי $P[T_j < \infty | X_0 = i] = 1$ לכל זוג מצבים i, j.

(6-א) נתונה שרשרת מרקוב עם 4 מצבים: 1, 2, 3, 4. נתון שמצב 2 מתמיד וש- $P(X_5 = 3 | X_0 = 2) > 0$. אזי מצב 3 הוא בהכרח מתמיד.

(7-א) נתונה שרשרת מרקוב הומוגנית בזמן עם שלושה מצבים. אזי:

$$P(X_5 = 3 | X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 1) = P(X_6 = 3 | X_1 = 3, X_2 = 3, X_4 = 1)$$

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) בטופס ההגשה באופן ברור.

ב-1) בסעיף זו הנח כי מספר הסטודנטים בחוג לסטטיסטיקה מתנהג כמו מערכת במצב יציב. נתון כי מספר הסטודנטים הממוצע בחוג הוא 350. כמו כן נתון כי סטודנט מסיים/עוזב את לימודיו בממוצע לאחר 2.8 שנים. בנוסף ידוע שמבין אלו המבקשים להיכנס ללימודים בחוג, 62.5% מתקבלים.

א) מספר הסטודנטים המצטרפים ללימודים בחוג בכל שנה בממוצע הוא 125. כמו כן מספר הסטודנטים המסיימים/עוזבים את הלימודים בכל שנה בממוצע הוא 125.

ב) מספר הסטודנטים המצטרפים ללימודים בחוג בכל שנה בממוצע הוא 125. לא ניתן להשתמש בנתוני השאלה לומר כמה מסיימים/עוזבים בכל שנה בממוצע.

ג) מספר המבקשים להיכנס ללימודים בחוג בשנה בממוצע הוא כ – 200.

ד) תשובות א' ו – ג' נכונות.

ה) תשובות ב' ו – ג' נכונות.

ב-2) נתונה שרשרת מרקוב, אי-פריקה $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים סופי ומטריצת מעבר P . התהליך הסטוכסטי $\{Y_n, n \geq 0\}$ מוגדר כך:

$$Y_n = X_{7n}, n = 0, 1, 2, \dots$$

א) התהליך $\{Y_n, n \geq 0\}$ אינו שרשרת מרקוב בגלל ש Y_1 אינו רק תלוי ב Y_0 אלא גם ב X_7 .

ב) $\{Y_n, n \geq 0\}$ היא שרשרת מרקוב עם מטריצת מעבר P^7 .

ג) ההתפלגות הסטציונרית של $\{Y_n, n \geq 0\}$ היא כמו זו של $\{X_n, n \geq 0\}$.

ד) תשובות א' ו- ב' נכונות.

ה) תשובות ב' ו – ג' נכונות.

ב-3) אנשים מגיעים לתחנת אוטובוס על פי תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda = 8$ אנשים בשעה. זמני הגעת האוטובוס הם $\{\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots\}$ (כל חצי שעה). כאשר אוטובוס מגיע לתחנה הוא אוסף את כל האנשים. נתון שהאוטובוס אשר הגיע בזמן $\frac{3}{2}$ אסף אדם בודד.

א) הסיכוי שלא הגיעה אף אדם בשעה הראשונה הוא e^{-8} .

ב) הסיכוי שלא הגיעה אף אדם ב 75 הדקות הראשונות הוא $e^{-8} \frac{1}{2}$.

ג) הסיכוי שלא הגיעה אף אדם ב 75 הדקות הראשונות הוא e^{-10} .

ד) תשובות א' ו - ב' נכונות.

ה) תשובות א' ו - ג' נכונות.

ב-4) נתון תהליך קפיצה מרקובי עם מרחב מצבים 1,2,3 ומטריצת יוצר

$$.Q = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 0.08 & -0.2 & 0.12 \\ 0 & 0.1 & -0.1 \end{pmatrix}$$

יהי T_3 הזמן עד שלראשונה התהליך מגיע ל-3. אזי $= E[T_3 | X_0 = 2]$

א) 0.2

ב) 5

ג) 9.666

ד) 10

ה) 0.1

ב-5) נתונה שרשרת מרקוב עם מצבים 1,2,3,4 מטריצת הסתברויות מעבר כדלקמן :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נתון $X_0 = 3$. הסיכוי שהשרשרת תבקר אי פעם במצב 1 הוא:

א) 0

ב) 1

ג) 0.12

ד) 1/3

ה) 1/2

ב-6) נתונה שרשרת מרקוב עם מצבים 1,2,3,4 מטריצת הסתברויות מעבר כדלקמן :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נתון $X_0 = 3$.

א) ההסתברות שמספר הביקורים במצב 2 הוא 0 היא 1/2.

ב) תוחלת מספר הביקורים ב-2 היא אינסוף.

ג) תוחלת מספר הביקורים ב-2 היא 2/3.

ד) תשובות א' ו- ב' נכונות.

ה) תשובות א' ו- ג' נכונות.

חלק ג – שאלות פתוחות:

ענה על כל השאלות והסעיפים במחברת באופן ברור ומסודר.

שאלה 1 (25 נקודות):

נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד $\{X_n, n \geq 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ומטריצת מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 0 & a \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

בשביל סעיפים א', ב' הנח כי $a = \frac{1}{2}$:

(א) מהן מחלקות הקשירות בשרשרת זו.

(ב) סווג את מחלקות הקשירות (מי הן המחלקות המתמידות, מי הן מהחלקות החולפות).

בשביל סעיפים ד', ה' הנח כי השרשרת מתחילה במצב 3. בנוסף הנח כי $0 < a \leq 1$.

(ג) מה תוחלת מספר הצעדים עד אשר השרשרת תגיע בפעם הראשונה לאחד מהמצבים 1, 2 או 5? רשום תשובתך כפונקציה של a .

(ד) מה ההסתברות שמספר הצעדים עד אשר השרשרת תגיע בפעם הראשונה לאחד מהמצבים 1, 2 או 5 גדולה מ-20? רשום תשובתך כפונקציה של a .

בשביל סעיפים ה', ו' הנח שההסתברות שהשרשרת תתחיל במצב k נתונה ע"י

$$P(X_0 = k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k=1 \\ \frac{1}{4} & k=2 \\ 0 & k=3 \\ 0 & k=4 \\ \frac{1}{4} & k=5 \end{cases}$$

(ה) חשב את ההסתברות הסטציונרית של התהליך במידה וקיימת כזאת. אחרת הסבר מדוע לא קיימת.

(ו) מהו $P(X_{13} = 2)$?

שאלה 2 (24 נקודות):

בתחנה לעזרה ראשונה יש שלוש ניידות טיפול נמרץ (אמבולנסים). קריאות לתחנה מגיעות לפי תהליך פואסון בקצב של קריאה אחת כל 5 שעות. אם בתחנה נמצאת ניידת אחת או יותר כאשר מגיעה קריאה, יוצאת ניידת מיד לדרך. משך הזמן מרגע יציאת ניידת עד חזרתה לתחנה הוא מ"מ אקספוננציאלי עם תוחלת של שעה אחת. אם בתחנה אין ניידות כאשר מגיעה קריאה, הקריאה מופנית לתחנה אחרת.

(א) (4) נתון שניידת א' יצאה לפני שעה, ניידת ב' לפני 1/2 שעה וניידת ג' לפני 1/4 שעה ואף אחת מהניידות עדיין לא חזרה לתחנה. מה ההסתברות שהקריאה הבאה שתגיע תופנה לתחנה אחרת?

(ב) (4) מה תוחלת הזמן עד למופע הקריאה ה-10.

(ג) (4) יהי X_t מספר הניידות בתחנה בזמן t . הסבר מדוע X_t תהליך קפיצה מרקובי ומצא את מטריצת קצבי המעבר.

(ד) (4) נסמן $P_{3,j}(t) = P(X_t = j | X_0 = 3)$ רשום את המשוואות הקדמיות עבור $P_{3,j}(t)$.

(ה) (4) נמק מדוע קיימות הסתברויות סטציונריות ומצא משוואות לקבלתן. (אין צורך לפתור).

בשביל סעיף ו', הנח שהפתרון הוא $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3$.

(ו) (4) רשום ביטוי עבור תוחלת מספר הניידות בתחנה לאחר שהמערכת עובדת זמן רב.

בהצלחה