החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250</u>

פתרון למבחן סופי, מועד ב'

2.8.2007

מרצים: פרופסור אסתר פרוסטיג, מר. יוני נצרתי.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, גב' אולגה פרידליאנד.

גרסא לפתרון: 2

<u>תשובות לחלק א:</u>

א-1) **לא-נכון.** לא כל שרשרת מרקוב מקיימת אינקרימנטים סטציונרים. העובדה שמטריצת המעבר אינה משתנה בזמן גוררת שהשרשרת היא הומוגנית בזמן, אבל לצורך אינקרימנטים סטציונרים דרוש שההפרש בין המצב בשתי זמנים יהיה תלוי רק בהפרש של הזמנים.

א-2) **לא-נכון**. קל למצוא דוגמאות לשרשראות עם מרחב מצבים סופי ויותר ממחלקת קשירות אחת.

א-3) **לא-נכון**. אמרה זו נכונה עבור שרשראות בעלות מרחב מצבים סופי, אבל קיימות הרבה שרשראות עם מרחב מצבים אין-סופי שבהן אין מצבים מתמידים. (לדוגמא: השרשרת המשוכנת של תהליך פואסון).

א-4) **לא-נכון**. ניתן בקלות למצוא דוגמא של שרשרת מרקוב עם 2 מחלקות קשירות (היא פריקה) כאשר מחלקה אחת היא עם מצבים מתמידים ומחלקה אחת עם מצבים חולפים. במידה ובמחלקה עם המצבים המתמידים יש יותר ממצב אחד- אז אף אחד מהמצבים אינו סופג.

א-5) **נכון**. מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב תכיל את פונקצית מסת ההסתברות של המשתנים המקריים בכל שורה.

א-6) **נכון**. נסתכל על האינקרימנטים $X_{t_1}-X_{s_1}$ ו- $X_{t_2}-X_{s_2}$ כאשר $s_1<t_1\le s_2<t_2$. אזי:

$$X_{t_1}-X_{s_1}=c(t_1-s_1)+\sum_{i=N_{s_1}+1}^{N_{t_1}}W_i \quad \text{ו-} \quad X_{t_2}-X_{s_2}=c(t_2-s_2)+\sum_{i=N_{s_2}+1}^{N_{t_2}}W_i$$

ולכן האינקרימנטים ב"ת (הם מורכבים ממשתנים מקריים בלתי תלויים שונים).

א-7) **נכון**. מצב מתמיד אפס הוא מצב מתמיד. והתכונה אשר צוינה (חזרה למצב בהסתברות 1) מאפיינת מצבים מתמידים. ה"אפס" בהתמדה אפס מתייחס לכך שתוחלת הזמן עד החזרה למצב היא אין-סופית.

תשובות לחלק ב:

ב-1) **ה' (ב' + ג' + ד')**

סעיף ב' נכון: מצב הרוח היום הוא 3 בכל אחד מהמצבים $(1,3),(2,3),(3,3)$. פרופורציית הזמן שהתהליך שוהה במצב היא $\pi_{(a,b)}$ ולכן נסכם את $\pi_{(1,3)}+\pi_{(2,3)}+\pi_{(3,3)}$.

הערה: ערך זה צריך להיות שווה ל - $\pi_{(3,1)}+\pi_{(3,2)}+\pi_{(3,3)}$ בגלל שלא משנה עם מסתכלים על "היום" או "אתמול".

סעיף ג' נכון: לא יתכנו מעברים מ - (x,y) ל (z,w) כאשר $y \neq z$. הסיבה היא שכל מעבר "חוקי" צריך להפוך את ה"היום" ל"אתמול".

סעיף ד' נכון: המקרה היחיד בו נישאר בשרשרת באותו מצב הוא כאשר הערך של אתמול שווה לערך של היום ושווה לערך של מחר. במקרים אחרים נהייה חייבים לעבור מ - (x,y) ל (y,w) (w הערך של מחר).

ב-2) **ג'**

סעיף א' לא נכון: זהו המקרה הלא-יצב של מערכת M/M/1 במקרה זה משוואות שווי משקל מורכבות מטור גיאומטרי אשר אינו מתכנס ולכן לא קיימת התפלגות סטציונרית.

סעיף ב' לא נכון: אמנם מספר הצרכנים במערכת ילך ויגדל אבל ייתכנו מקרים בהם לפרק זמן מסוים מצב הצרכנים ירד מתחת לכמות הראשונית.

סעיף ג' **נכון** סעיף ד' לא נכון: אמנם לא קיימת התפלגות סטציונרית ל M/M/1 אבל במידה ומספר הצרכנים במערכת חסום (M/M/1/K), אז מקבלים תהליך קפיצה מרקובי עם מרחב מצבים סופי אשר שרשרת המרקוב המשוכנת שלו אי-פריקה ולכן קיימת התפלגות סטציונרית (במקרה של $\lambda > \mu$ התפלגות זו תיתן משקל גדול יחסית למצבים הקרובים ל – K).

סעיף ה': גם במקרה ה לא-יציב יש כאן תהליך מרקובי, פשוט אין לו התפלגות סטציונרית.

ב-3) **ה'**

תשובה א' לא נכונה: ייתכן וניתן לעבור ממצב 1 למצב 3 ומצב 3 סופג ואז $f_{12} < 1$.

תשובה ב' לא נכונה: אכן רואים ש $f_{22} > 0$ בגלל שרואים ש $P_{22} > 0$ אבל ייתכן ו - $P_{14} = 0$ (אין מעבר כזה בריאליזציה).

תשובה ג' לא נכונה: שוב ייתכן ומצב 3 הוא סופג ואז $f_{22} < 1$.

תשובה ד' לא נכונה: אם ידוע ש $P_{32} > 0$ אז מצב 3 אינו סופג, למרות זאת ייתכן ואין מעברים לתוך מצב 3 ואז הוא במחלקת קשירות משל עצמו (והשרשרת פריקה).

תשובה ה' <u>נכונה</u>: במקרה זה רואים: $1 \to 2$, $2 \to 3$, $3 \to 4$, $4 \to 1$ ואז השרשרת אי-פריקה.

ב-4) **ג'**

$$\begin{aligned}
&Cov(N_{10},N_{20}) = Cov(N_{10},N_{20}-N_{10}+N_{10})\\
&= E[N_{10}(N_{20}-N_{10}+N_{10})] - E[N_{10}]E[N_{20}-N_{10}+N_{10}]\\
&= E[N_{10}(N_{20}-N_{10})] + E[N_{10}{}^{2}] - E[N_{10}]E[N_{20}-N_{10}] + E^{2}[N_{10}]\\
&= E[N_{10}]E[N_{20}-N_{10}] + E[N_{10}{}^{2}] - E[N_{10}]E[N_{20}-N_{10}] + E^{2}[N_{10}]\\
&= Var(N_{10})
\end{aligned}$$

ולכן $Cov(N_{10},N_{20}) = 10\cdot 5 = 50$

ב-5) **ה' (כל התשובות נכונות).**

תשובה א' נכונה: $P_{ii} = P(X_1 = i \mid X_0 = i) = P(all\, i\, survived \mid i\, existed) = \left(\frac{1}{4}\right)^{i}$.

תשובה ב' נכונה: $j > i : P_{ij} = 0$ כי לא ניתן להגדיל את האוכלוסייה (או שהיא נשארת באותו גודל או קטנה בכל צעד).

תשובה ג' נכונה: כאשר מגיעים למצב 0, לא יכולים להוולד יותר פריטים.

תשובה ד' נכונה: ניתן להסתכל על זמן ההגעה למצב 0 באופן הבא: נניח שבכל צעד הפריטים שנולדו לאותו צעד מסודרים בסדר $1,2,\ldots$. כך לדוגמא נניח ובצעד החמישי $X_5 = 6$ אז הפריטים החיים באותו צעד הם $1,2,3,4,5,6$. בצעד הבא, ייתכן והפריטים יהיו $1,2,3,4,5,6$ (במידה וכולם הולידו עוד פריט) או שהם יהיו $1,\ldots,k$ עבור $k < 6$.
ניתן אם כך להסתכל על מספר הצעדים שפריט מס' j חי כאל התוצאה של משתנה מקרי גיאומטרי הסופר כמה ניסיונות היו לאותו פריט. אם כך המקסימום של עשרת המשתנים הגיאומטרים מתאר כמה זמן חיה האוכלוסיה.

ב-6) **ה' (ג' + ד')**

תשובה ג' נכונה: מעבר ממצב 0 למצב 4 הוא מעבר סדרתי דרך מצבים 1,2,3 (זהו המסלול היחיד עקב המבנה של מטריצת המעבר). אם כך תוחלת הזמן עד מעבר ל – 2 היא $1 = \frac{12}{12}$, תוחלת הזמן עד מעבר ל – 3 היא $\frac{3}{12} = {}^{1}\!/_{4}$ ותוחלת עד מעבר ל -4 היא $\frac{4}{12} = {}^{1}\!/_{3}$. תוחלת הסכום היא סכום התוחלת וזה $\frac{19}{12}$.

תשובה ד' נכונה: באופן דומה לתשובה ג' כאשר מדובר בצפיפות של סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים אז הצפיות היא קונבולוציה של הצפיפויות.

תשובות לחלק ג:

שאלה 1:

א) מחלקות הקשירות (יש 2): $\{A,B,C\}$ ו - $\{D\}$.
המצבים במחלקה $\{A,B,C\}$ הם חולפים, המצב במחלקה $\{D\}$ הוא מתמיד (סופג).

ב) עבור $i \in \{A,B,C\}$, ההסתברות לפשיטת רגל היא 1. זאת בגלל שמצבים $\{A,B,C\}$ הינם חולפים ולכן לאחר זמן סופי השרשרת חייב להגיעה למצב D.

הסתברות להגיעה ל – D בלי לבקר ב C בדרך:

דרך טכנית:
נסמן f_A, f_B - ההסתברות להגיע ל D בלי לעבור בדרך ב C כאשר מתחילים במצבים A ,B בהתאמה.

אז להלן ניתוח צעד ראשון:
$$f_A = 0.9f_A + 0.1f_B$$
$$f_B = 0.1f_A + 0.7f_B + 0.1\cdot 1$$

ולפי המשוואה הראשונה $f_A = f_B$ ואז לפי המשוואה השנייה $f_A = f_B = \frac{1}{2}$

דרך לוגית (יותר פשוטה):
רואים לפי מטריצת המעבר/דיאגראמת המעבר שממצב A ניתן לעבור רק ל – B וממצב B ניתן או לחזור ל A או להגיעה ל C או להיספג בD. אם כך כל עוד שהמצב הוא A, או B כל מה שצריך זה לא להגיע למצב C. "ניסויים" של יציאה ממצבים A או B לכוון C או D מתבצעים רק כאשר נמצאים במצב B והסיכויים למעבר ל C או ל D הם שווים (שניהם 0.1). לכן יש סיכוי של ½ שקודם נעבור ל C וסיכוי זהה של ½ שקודם נעבור לD.

ג) התשובה היא גיאומטרי סופר ניסיונות עם פרמטר להצלחה 0.3. זה בגלל שבמצב B יש אוסף ניסויים בלתי תלויים בכל צעד: הצלחה: יציאה ממצב B, כשלון: השארות במצב B.

ד)

$$\begin{aligned}
m_A &= 0.9(1+m_A) + 0.1(1+m_B) &&= 1 + 0.9m_A + 0.1m_B \\
m_B &= 0.1(1+m_A) + 0.7(1+m_B) + 0.1(1+m_C) + 0.1\cdot 1 &&= 1 + 0.1m_A + 0.7m_B + 0.1m_C \\
m_C &= 0.2(1+m_B) + 0.6(1+m_C) + 0.2\cdot 1 &&= 1 + 0.2m_B + 0.6m_C
\end{aligned}$$

הפתרון למערכת (לא נשאל בשאלה) הוא:
$$m_A = 10$$
$$m_B = 15$$
$$m_C = 25$$

ה) מחפשים את האיבר ה B,A במטרית המעבר הדו-שלבית. צריך להכפיל את השורה במטריצת המעבר של B בעמודה של A:

$$\begin{pmatrix}0.1 & 0.7 & 0.1 & 0.1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.9\\0.1\\0\\0\end{pmatrix}=0.09+0.07=0.16$$

ו) לא קיימת התפלגות סטציונרית בגלל שזוהי שרשרת פריקה.

שאלה 2:

א) אנו מחפשים את הסיכוי של המאורע A = משעה 7:30 עד 8:30 הגיעו 2 רכבים.
מאורע זה הוא האיחוד הזר של שלושת המאורעות הבאים:
A_0 = משעה 7:30 עד 8:00 הגיעו 0, מ-8:00 עד 8:30 הגיעו 2.
A_1 = משעה 7:30 עד 8:00 הגיעו 1, מ-8:00 עד 8:30 הגיעו 1.
A_2 = משעה 7:30 עד 8:00 הגיעו 2, מ-8:00 עד 8:30 הגיעו 0.

כל אחד משלושת המאורעות הללו הוא חיתוך של שתי מאורעות בלתי תלויים (בגלל אינקרימנטים בלתי תלויים של תהליך פואסון) – מאורע אחד עבור 7:30 עד 8:00 ומאורע אחד עבור 8:00 עד 8:30.

עבור פרק הזמן מ – 7:30 ל – 8:00 יש מידע נוסף (הגיעו בין 7:00 ל 8:00 4 רכבים).

לכן הסיכוי שמספר הרכבים ב 7:30 – 8:00 הוא 0 הוא $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

הסיכוי שמספר הרכבים ב 7:30 – 8:00 הוא 1 הוא $4\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

והסיכוי שמספר הרכבים ב 7:30 – 8:00 הוא 2 הוא $6\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

זוהי תכונת הפילוג הבינומי של מספר המגיעים בפרק זמן חלקי (חצי שעה) כאשר נתון כמה הגיעו בפרק זמן הכולל (שעה) הוא.

עבור פרק הזמן מ – 8:00 ל – 8:30:
הסיכוי ל-0 הגעות הוא $e^{-2/2}$
הסיכוי ל-1 הגעה הוא $e^{-2/2}\frac{2}{2}$
הסיכוי ל -2 הגעות הוא $e^{-2/2}\frac{(2/2)^2}{2}$

ולכן סה"כ (נסמן ב – B את המאורע – 4 הגעות בין 7:00 ל – 8:00):

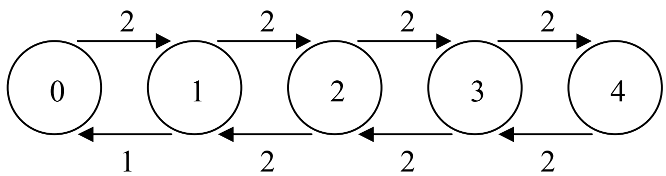
$$P(A \mid B) = P(A_0 \mid B) + P(A_1 \mid B) + P(A_2 \mid B) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^4 e^{-2/2}\frac{(2/2)^2}{2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 e^{-2/2}\frac{2}{2} + 6\left(\frac{1}{2}\right)^4 e^{-2/2} =$$
$$= e^{-1}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3}\right)$$

ב) בגלל תכונת פיצול פואסון, תהליך הגעת המשאיות ותהליך הגעת המכוניות הפרטיות בלתי תלויים. לכן המידע של הגעת המשאיות אינו משפיע על הגעת המכוניות.

הסיכוי להגעת 2 מכוניות פרטיות בין 8 ל 9.

$$e^{-2\cdot 0.9}\frac{(2\cdot 0.9)^2}{2}$$

בשביל שאלות ג,ד,ה,ו, להלן דיאגראמת המעבר:



ג) $\dfrac{2}{2+2}$

ד) קיימת התפלגות סטציונרית (שרשרת בעלת מרחב מצבים סופי אי-פריקה). להלן משוואות שווי משקל מפורטות:

$$\pi_0 2 = \pi_1$$
$$\pi_1 2 = \pi_2 2$$
$$\pi_2 2 = \pi_3 2$$
$$\pi_3 2 = \pi_4 2$$
$$\sum_{k=0}^{4}\pi_k = 1$$

הפתרון הוא:

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = 2\pi_0$$
$$\pi_0 + 2(\pi_0 + \pi_0 + \pi_0 + \pi_0) = 1$$

ולכן:

$$(\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4) = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$$

ה) $\sum_{k=0}^{4} k\pi_k$

ו) כאשר המערכת במצב 4, אז רכבים אינם מקבלים שרות במוסך (עוברים למוסך אחר). הסיכוי לכך הוא π_4. מספר הרכבים הממוצע המגיעים למוסך בשעה הוא 2 ו $2(1-\pi_4)$ מרכבים אלו מקבלים שרות ולכן הרווח הממוצע לשעה הוא $500\cdot 2\cdot(1-\pi_4)$.