

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן סופי, מועד ב'

2.8.2007

מרצים: פרופסור אסתר פרוסטיג, מר. יוני נצרת.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, גב' אולגה פרידליאנד.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
 - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 21 נקודות.
 - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 30 נקודות.
 - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 49 נקודות.
- יש לענות על חלקים א' ו ב' אך ורק בטופס התשובות.
- יש לענות על חלק ג' אך ורק במחברת באופן מסודר.
- בסיום המבחן יש להגיש את כל הדפים לבוחנות (לא ניתן לשמור את טופס הבחינה).

בהצלחה

טופס תשובות

יש לרשום שם ומספר ת"ז באופן ברור:

שם: _____
 ת"ז: _____

עבור כל שאלה יש לסמן עיגול סביב תשובה אחת בלבד באופן ברור וחד-משמעי.

תשובות לחלק א:

- | | | |
|---------|------|-------|
| לא נכון | נכון | (א-1) |
| לא נכון | נכון | (א-2) |
| לא נכון | נכון | (א-3) |
| לא נכון | נכון | (א-4) |
| לא נכון | נכון | (א-5) |
| לא נכון | נכון | (א-6) |
| לא נכון | נכון | (א-7) |

תשובות לחלק ב:

- | | | | | | |
|-----|-----|-----|-----|-----|-------|
| (ה) | (ד) | (ג) | (ב) | (א) | (ב-1) |
| (ה) | (ד) | (ג) | (ב) | (א) | (ב-2) |
| (ה) | (ד) | (ג) | (ב) | (א) | (ב-3) |
| (ה) | (ד) | (ג) | (ב) | (א) | (ב-4) |
| (ה) | (ד) | (ג) | (ב) | (א) | (ב-5) |
| (ה) | (ד) | (ג) | (ב) | (א) | (ב-6) |

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות בטופס ההגשה באופן ברור.

א-1) כל שרשרת מרקוב בזמן בדיד הומוגנית בזמן היא תהליך סטוכסטי עם אינקרימנטים סטציונרים בגלל שמטריצת המעבר אינה משתנה בזמן.

א-2) כל שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים סופי היא אי-פריקה.

א-3) בכל שרשרת מרקוב קיים לפחות מצב מתמיד אחד.

א-4) בשרשרת מרקוב פריקה קיים לפחות מצב סופג אחד.

א-5) יהיו X_1, X_2, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות. אזי התהליך $\{X_n, n \geq 1\}$ הוא שרשרת מרקוב.

א-6) יהיו W_1, W_2, \dots סדרת משתנים מקריים בלתי תלויים שווי התפלגות. יהי N_t תהליך פואסון בלתי תלוי ב- W_1, W_2, \dots . יהיו u, c קבועים.

אזי לתהליך $X_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} W_i$ יש אינקרימנטים בלתי תלויים.

א-7) בשרשרת מרקוב, אם מצב i הוא מתמיד אפס אז בהינתן שהשרשרת נמצאת במצב i , היא תחזור למצב i , בעתיד בהסתברות 1.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) בטופס ההגשה באופן ברור.

ב-1) נתונה שרשרת מרקוב אי-פריקה ולא מחזורית בעלת מרחב מצבים: $\{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ משמעות המצב (a,b) היא: "מצב הרוח של אדם אתמול היה a , ומצב הרוח היום הוא b ", כאשר $a, b \in \{1,2,3\}$.

(א) מטריצת המבער של שרשרת מרקוב זו חייבת להכיל 81 איברים אשר כולם גדולים מאפס.

(ב) לצורך חישוב פרופורציית הזמן שמצב הרוח של אדם הוא 3, יש לפתור משוואות שווי משקל עבור תשעת המשתנים $\{\pi_{(a,b)} : a, b \in \{1,2,3\}\}$. התוצאה היא $\pi_{(1,3)} + \pi_{(2,3)} + \pi_{(3,3)}$.

(ג) מטריצת המעבר של שרשרת מרקוב זו יכולה להכיל לכל היותר 27 איברים אשר גדולים ממש מאפס.

(ד) נתון שביום מסוים המצב הוא (x,y) . אם $x \neq y$ אז למחרת המצב לא יכול להיות שוב (x,y) .

(ה) סעיפים ב', ג', ו- ד' נכונים.

ב-2) נתונה מערכת תורים M/M/1 עם קצב הגעה λ וקצב שרות μ . נתון שבזמן 0, מספר הצרכנים במערכת הוא 200.

(א) במידה ו $\lambda > \mu$ אז תמיד קיימת למערכת התפלגות סטציונרית.

(ב) במידה ו $\lambda > \mu$ אז מספר הצרכנים במערכת יהיה תמיד גדול מ-200 (הסיכוי שמספר הצרכנים במערכת יהיה 199 או פחות הוא 0).

(ג) במידה ו $\lambda > \mu$ אז למערכת לא קיימת התפלגות סטציונרית. מאידך, למערכת עם מספר מקומות חסום (מערכת M/M/1/K) יש התפלגות סטציונרית.

(ד) במידה ו $\lambda > \mu$ אז למערכת לא קיימת התפלגות סטציונרית וגם לא למערכת עם מספר מקומות חסום (M/M/1/K).

(ה) לא ניתן להתייחס למערכת עם $\lambda > \mu$ כתהליך מרקובי.

ב-1

ב-3 נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1, 2, 3, 4\}$. לאחר הרצה של סימולציה של השרשרת התקבלה הריאליזציה הבאה:
 $X_0 = 1, X_1 = 2, X_3 = 2, X_4 = 2, X_5 = 4, X_6 = 1, X_7 = 1$
תזכורת:

$$P_{ij} = P(X_1 = j | X_0 = i)$$

$$f_{ij} = P(\exists n \geq 1 X_n = j | X_0 = i)$$

(א) בהכרח מתקיים $f_{12} = 1$.

(ב) בהכרח מתקיים $P_{14} > 0, f_{22} > 0$.

(ג) בהכרח מתקיים $f_{22} = 1$.

(ד) במידה ו $P_{32} > 0$ אז השרשרת אי-פריקה.

(ה) במידה ובריאליזציה היינו מקבלים $X_3 = 3$ (במקום $X_3 = 2$) אז השרשרת אי-פריקה.

ב-4 N_t הוא תהליך פואסון עם קצב 5 מופעים לשעה. $Cov(N_{10}, N_{20}) =$

(א) 0

(ב) 10

(ג) 50

(ד) 100

(ה) 500

עזרה: $Cov(X, Y) = E[XY] - E(X)E(Y)$

ב-1

ב-5) נסמן ע"י $\{X_n, n \geq 0\}$ את מספר הפריטים באוכלוסיה בזמן n . נתון שאורך החיים של כל פריט הוא בדיוק יחידת זמן אחת. בנוסף נתון שכל פריט מוליד פריט נוסף (אשר חי ביחידת הזמן הבאה) בהסתברות $\frac{1}{4}$ אחרת הוא לא מוליד אף פריט. ילודת הפריטים מתבצעת באופן בלתי תלוי בשאר הפריטים. נתון שבזמן 0 חיים 10 פריטים ($P(X_0 = 10) = 1$).

א) האיבר i, i במטריצת המעבר עבור $i \in \{1, \dots, 10\}$ הוא $\left(\frac{1}{4}\right)^i$.

ב) $\{X_n, n \geq 0\}$ היא שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים $\{0, 1, 2, \dots, 10\}$ ומטריצת מעבר אלכסונית תחתונה (כל האיברים מעל לאלכסון הם אפסים).

ג) מצב 0 הוא מצב סופג.

ד) הזמן הכי מוקדם אשר בו התהליך מגיע למצב 0 מתפלג כמו המקסימום של 10 משתנים מקריים גיאומטרים עם סיכוי להצלחה $\frac{3}{4}$.

ה) כל התשובות נכונות.

ב-6) נתון תהליך קפיצה מרקובי עם מרחב מצבים $\{1, 2, 3, 4\}$ ומטריצת מעבר

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נתון $P(X_0 = 1) = 1$.

נסמן $T = \min\{t \mid X_t = 4\}$ - הזמן הראשון בו התהליך מגיעה למצב 4.

א) $T \sim \exp(8)$

ב) $ET = 8$

ג) $ET = \frac{19}{12}$

ד) הצפיפות של T היא הקונבולוציה של הצפיפות של משתנים מקריים $\exp(1)$, $\exp(4)$ - 1, $\exp(3)$.

ה) תשובות ג' ו- ד' נכונות.

חלק ג – שאלות פתוחות:

ענה על כל השאלות והסעיפים במחברת באופן ברור ומסודר.

שאלה 1 (25 נקודות):

מצבן הכלכלי של חברות מדורג באופן הבא:

A - מצב החברה מצוין.

B - מצב החברה טוב.

C - מצב החברה גרוע.

D - פשיטת רגל.

הנח שמצב החברה בתחילת כל שנה מתנהג לפי תהליך מרקוב בזמן בדיד עם מטריצת הסתברויות מעבר כדלקמן:

	A	B	C	D
A	0.9	0.1		
B	0.1	0.7	0.1	0.1
C		0.2	0.6	0.2
D				1

(א) (4) סווג את מצבי השרשרת: רשום מהן מחלקות הקשירות, ציין איזה מצבים חולפים ואיזה מתמידים.

(ב) (4) מהי ההסתברות לפשיטת רגל (שהחברה אי-פעם תפשוט רגל) כאשר נתון ש-
 $X_0 = i$ עבור $i \in \{A, B, C\}$.
 בנוסף עבור $i \in \{A, B\}$, מצא את ההסתברות לפשיטת רגל מבלי לבקר במצב C.

(ג) (4) נתון $X_0 = B$. מה התפלגות מספר השנים עד שלראשונה דרוג החברה שונה מ-B?

(ד) (4) נסמן ב m_i עבור $i \in \{A, B, C\}$ את תוחלת מספר השנים עד לפשיטת רגל. רשום מערכת משוואות למציאת $m_i, i \in \{A, B, C\}$.

(ה) (4) חשב את $P(X_2 = A | X_0 = B)$.

(ו) (5) האם קיימת התפלגות סטציונרית? הסבר. במידה וקיימת חשב אותה.

שאלה 2 (24 נקודות):

מספר הרכבים המגיעים למוסך הוא תהליך פואסון עם קצב של 2 רכבים לשעה. 10% מהרכבים הם משאיות והשאר מכוניות פרטיות.

הבהרה: הנח שלכל רכב יש סיכוי של 10% להיות משאית ו- 90% להיות מכונית פרטית באופן בלתי תלוי בשאר הרכבים.

(א) (4) נתון שמשעה 7 עד 8 הגיעו 4 רכבים. מה הסיכוי שמ-7:30 עד 8:30 הגיעו 2 רכבים.

(ב) (4) נתון שמ-7 עד 10 הגיעו 3 משאיות. מה ההסתברות שמ-8 עד 9 הגיעו 2 מכוניות פרטיות.

במוסך עובדים 2 פועלים ויש מקום לעד 4 רכבים. משך הזמן שלוקח לפועל לתקן רכב הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי עם תוחלת של 1 שעה. על כל רכב עובד פועל בודד. כאשר המוסך מלא ומגיעים רכבים נוספים, הם הולכים לחפש מוסך חלופי (עוזבים מייד).

(ג) (4) הנח שבמוסך שני רכבים (2 הפועלים עובדים עליהם). מה ההסתברות שרכב יסיים את הטיפול לפני שיגיעה הרכב הבא למוסך?

(ד) (4) האם קיימת התפלגות סטציונריות? הסבר. במידה וקיימת, חשב אותה. סמן תשובתך ע"י $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$.

(ה) (4) מה תוחלת מספר הרכבים הנמצאים במוסך במצב יציב?

(ו) (4) מוסך מרוויח על כל רכב בממוצע 500 ₪. מה ממוצע הרווח לשעה?

הערה: ניתן לסמן את התשובה לסעיפים ה, ו ע"י $\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$.

בהצלחה