ג

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן סופי, מועד ג'

23.8.2007

מרצים: פרופסור אסתר פרוסטיג, מר. יוני נצרתי.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, גב' אולגה פרידליאנד.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
  - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 21 נקודות.
  - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 30 נקודות.
  - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 49 נקודות.
- יש לענות על חלקים א' ו ב' אך ורק בטופס התשובות.
- יש לענות על חלק ג' אך ורק במחברת באופן מסודר.
- בסיום המבחן יש להגיש את כל הדפים לבוחנות (לא ניתן לשמור את טופס הבחינה).

בהצלחה

ג

טופס תשובות

יש לרשום שם ומספר ת"ז באופן ברור:

שם:______________________________

ת"ז:______________________________

עבור כל שאלה יש לסמן עיגול סביב תשובה אחת בלבד באופן ברור וחד-משמעי.

תשובות לחלק א:

א-1)	נכון	לא נכון
א-2)	נכון	לא נכון
א-3)	נכון	לא נכון
א-4)	נכון	לא נכון
א-5)	נכון	לא נכון
א-6)	נכון	לא נכון
א-7)	נכון	לא נכון

תשובות לחלק ב:

ב-1)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-2)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-3)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-4)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-5)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-6)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)

ג

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות בטופס ההגשה באופן ברור.

א-1) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר קצב λ ו $\{M_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר קצב μ. אז תוחלת הזמן הבין מופעי בתהליך $\{N_t + M_t, t \geq 0\}$ היא $\lambda + \mu$.

א-2) בשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי אשר לא כל מצבייה מתמידים, חייב להיות מצב סופג אחד לפחות.

א-3) בכל שרשרת מרקוב קיים לפחות מצב מתמיד אחד.

א-4) ניתוח של מערכת תורים $M/M/\infty/K$ ומערכת תורים $M/M/K/K$ ייתן את אותן תוצאות לגבי פילוג מספר הצרכנים במערכת במצב יציב.

א-5) יהיו i, j שני מצבים בשרשרת מרקוב. נתון ש - $P(X_5 = i \mid X_0 = j) > 0$ וגם $P(X_3 = j \mid X_0 = i) > 0$ אזי אם i מתמיד אז גם j מתמיד ואם i חולף אז גם j חולף.

א-6) בשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי, תוחלת מספר הביקורים בכל מצב היא בהכרח אין-סופית.

א-7) תהליך פואסון עם פרמטר קצב λ הוא תהליך קפיצה מרקובי (שרשרת מרקוב בזמן רציף) עם מטריצת יוצר

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda & -\lambda & & \\ & \lambda & -\lambda & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \end{pmatrix}$$

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) בטופס ההגשה באופן ברור.

ב-1) נתונה שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

א) $$P^{20}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ב) $$P^{20}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{20} & \left(\frac{1}{2}\right)^{20} & 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{19} \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{20} & 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \end{pmatrix}$$

ג) $$P^{20}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{19} & \left(\frac{1}{2}\right)^{20} & \left(\frac{1}{2}\right)^{20} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ד) $$P^{20}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ה) אף אחת מהתשובות לא נכונה.

ב-2) יהי $\{X_n, n\geq 0\}$ שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$P=\begin{pmatrix} 0.354 & 0.245 & 0.401 \\ 0.354 & 0.245 & 0.401 \\ 0.354 & 0.245 & 0.401 \end{pmatrix}$$

א) $P^{17}=P$.

ב) בשרשרת יש מחלקת קשירות אחת: $\{1,2,3\}$

ג) $\{X_n, n\geq 1\}$ היא סדרת משתנים שווי התפלגות בלתי תלויים.

ד) תשובות א' ו- ב' נכונות.

ה) תשובות א', ב' ו- ג' נכונות.

ג

ב-3) יהי $\{X_t, t \geq 0\}$ תהליך קפיצה מרקובי עם מרחב מצבים $\{0,1\}$ ומטריצת יוצר $Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. ידוע שעל פי משוואות קולמוגורוב הקדמיות מקבלים:

$$P_{00}(t) = \frac{1}{1+2} e^{-(1+2)t} + \frac{2}{1+2}$$

תזכורת:

$$P_{ij}(t) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

נתון בנוסף:

$$P(X_0 = 0) = 1$$

א) $\lim_{t \to \infty} P_{01}(t) = \frac{1}{3}$

ב) $P(X_5 = 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} e^{-15}$

ג) $P(X_5 = 1) = \frac{1}{3} e^{-15} + \frac{2}{3}$

ד) תשובות א' ו- ב' נכונות.

ה) תשובות א' ו- ג' נכונות.

ב-4) נתונה מערכת תורים $M/M/1/1$ עם קצב הגעת צרכנים $\lambda = 1$ וקצב שרות $\mu = 1$. בהינתן שיש צרכן 1 במערכת, מה תוחלת הזמן עד אשר המערכת תתרוקן (לא יהיו יותר צרכנים במערכת).

א) $\frac{1}{2}$

ב) המערכת לא תתרוקן בגלל ש $\lambda = \mu$ ולכן המערכת אינה יציבה.

ג) 1

ד) 2

ה) אף אחת מהתשובות לא נכונה.

ג

ב-5) נתונה מערכת תורים במצב יציב. צרכנים מגיעים למערכת על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ צרכנים בדקה. כל צרכן אשר מגיע למערכת מקבל שרות (נכנס למערכת) ולאחר מכן עוזב. תוחלת מספר הצרכנים במערכת היא 20. זמן השהייה הממוצע של צרכן במערכת הוא 10 דקות.

א) הסיכוי שבמהלך 10 דקות לא יגיע אף צרכן הוא e^{-10}.

ב) הסיכוי שבמהלך 10 דקות לא יגיע אף צרכן הוא e^{-20}.

ג) הסיכוי שבמהלך 10 דקות לא יגיע אף צרכן הוא $1-e^{-10}$.

ד) הסיכוי שבמהלך 10 דקות לא יגיע אף צרכן הוא $1-e^{-20}$.

ה) לא ניתן לחשב את הסיכוי שבמהלך 10 דקות לא יגיע אף צרכן ללא מידע נוסף.

ב-6) נתון תהליך קפיצה מרקובי עם מרחב מצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת יוצר

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נתון $P(X_0=1)=1$.

נסמן $T=\min\{t \mid X_t=5\}$ - הזמן הראשון בו התהליך מגיעה למצב 5.

א) $ET=\frac{9}{2}$.

ב) $ET=\frac{7}{3}$

ג) $ET=3$

ד) על פי מטריצת היוצר לעולם לא מגיעים למצב 5.

ה) תשובות א' ו- ב' נכונות.

חלק ג – שאלות פתוחות:

ענה על כל השאלות והסעיפים במחברת באופן ברור ומסודר.

שאלה 1 (25 נקודות):

נתונה מערכת התורים $M/M/\infty$ עם קצב הגעה λ וקצב שרות μ .

א) (4) מה מסמלת מערכת התורים הזאת? כמה שרתים? האם יש מגבלת מקום בתור?

ב) (4) רשום משוואות שווי משקל עבור המערכת ומצא את ההתפלגות הסטציונרית $\{\pi_k, k = 0,1,2...\}$.
π_k היא ההסתברות שמספר הצרכנים במערכת הוא k כאשר המערכת במצב יציב (תהליך הקפיצה המרקובי הוא סטציונרי).

ג) (4) האם המערכת יציבה (קיימת התפלגות סטציונרית) עבור כל צמד ערכים חיוביים של λ ו- μ ? הסבר.

ד) (4) מה הסיכוי שצרכן אשר הגיעה למערכת ישהה במערכת יותר מ T יחידות זמן?

ה) (4) נתון שבזמן t במערכת יש צרכן בודד. הוכח (מעקרונות ראשוניים) שהסיכוי שהצרכן יעזוב לפני שיגיעה צרכן נוסף הוא $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

ו) (5) רשום את מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב המשוכנת.

<u>שאלה 2 (24 נקודות):</u>

נסמן ע"י $\{X_n, n\geq 0\}$ את מספר הפריטים באוכלוסיה בזמן n. נתון שאורך החיים של כל פריט הוא בדיוק יחידת זמן אחת. בנוסף נתון שכל פריט מוליד פריט נוסף (אשר חי ביחידת הזמן הבאה) בהסתברות $\frac{1}{4}$, אחרת הוא לא מוליד אף פריט. ילודת הפריטים מתבצעת באופן בלתי תלוי בשאר הפריטים. נתון שבזמן 0 חיים 5 פריטים ($P(X_0=5)=1$).

א) (4) מהי מטריצת המעבר עבור שרשרת המרקוב $\{X_n, n\geq 0\}$.

ב) (4) סווג את מצבי השרשרת למחלקות קשירות. ציין עבור כל מחלקה האם היא חולפת או האם היא מתמידה.

ג) (4) האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P_{11}^{(n)}$ מתבדר או מתכנס? הסבר את תשובתך .
סימון (תזכורת): $P_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$.

ד) (4) מהי תוחלת מספר יחידות הזמן עד אשר מספר הפריטים באוכלוסיה הוא 0?

עבור סעיפים ה', ו' השתמש בנתון הבא:
כעת נתון שאם בזמן n מספר הפריטים באוכלוסיה הוא קטן ממש מ-2 אז בזמן $n+1$ מספר הפריטים באוכלוסיה עולה ל – 4. ז"א: $P(X_{n+1}=4 \mid X_n=1)=1$.

ה) (4) חזור על סעיף ב'.

ו) (4) למה שווים הערכים הבאים: $f_{5,4}$ $f_{5,0}$, $f_{1,5}$ $f_{2,3}$?
סימון (תזכורת): $f_{ij} = P(\exists n\geq 1\ X_n = j \mid X_0 = i)$

בהצלחה