החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

פתרון למבחן סופי, מועד ג'

23.8.2007

מרצים: פרופסור אסתר פרוסטיג, מר. יוני נצרתי.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, גב' אולגה פרידליאנד.

תשובות לחלק א:

א-1) **לא-נכון.** התוחלת של הזמן הבין מופעי היא $\frac{1}{\lambda+\mu}$.

א-2) **לא-נכון**. קל למצוא דוגמא נגדית: מצבים 1,2,3,4, כאשר 1,2,3 מתמידים ונמצאים באותה מחלקת קשירות ומצב 4 חולף.

א-3) **לא-נכון**. קל למצוא דוגמא לשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים אין-סופי אשר בה כל המצבים חולפים. הטענה רק נכונה עבור שרשראות סופיות.

א-4) **נכון**. ההבדל בין המערכות הוא מספר השרתים. צריך אבל לשים לב שבמערכת $M/M/\infty/K$, מנוצלים לכל היותר K שרתים ולכן המערכת שקולה ל $M/M/K/K$.

א-5) **נכון**. בעצם נתון שמצבים i ו- j קשירים, ז"א הם באותה מחלקת קשירות. והוכנו שתכונת ההתמדה/חליפות היא תכונה אשר תקפה לכל מחלקת הקשירות.

א-6) **לא-נכון**. הטענה נכונה עבור שרשראות אשר בהן כל המצבים מתמידים (לדוגמא: שרשראות אי-פריקות). אבל באופן כללי יתכנו מצבים חולפים, ועבורם תוחלת מספר הביקורים היא סופית.

א-7) **לא-נכון**. המבנה מזכיר את מטריצת הגנרטור של תהליך פואסון אבל צריך לשים לב שהסימנים של האלכסון הראשי והאלכסון שמעליו הוחלפו. לכן המטריצה בשאלה היא בכלל לא מטריצת גנרטור (יש ערכים חיובים באלכסון הראשי).

<u>תשובות לחלק ב:</u>

ב-1) **ג'**

הדרך לפתור שאלה זו היא לראות מהם כל אחד מהערכים בנפרד. (ניתן גם לעלות את המטריצה בגובה 20 אבל זה יקח יותר מדי זמן).

ראשית קל לראות שהשורה הראשונה והשורה השלישית הן $(1 \quad 0 \quad 0)$. הסיבה היא שמצב 1 הוא סופג.

לגבי השורה השנייה:

$P(X_{20}=2 \mid X_0=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ - רואים זאת כי לאחר שיוצאים ממצב 2 כבר לא חוזרים אליו ולכן הסיכוי להיות במצב 2 למשך 20 צעדים רצופים הוא חצי בגובה 20.

$P(X_{20}=3 \mid X_0=2)=\left(\frac{1}{2}\right)^{19}\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$ - רואים זאת כי מצב 3 הוא כזה שברגע שנכנסים אליו אז מיד יוצאים למצב 1 ונספגים. ולכן דרוש להישאר ב 2, למשך 19 צעדים ואז לעבור למצב 3.

את $P_{2,1}{}^{(20)}=P(X_{20}=1 \mid X_0=2)$ נקבל ע"י המשלים.

ב-2) **ה' (א' + ב' + ג')**

א' נכונה -> נסתכל על איבר i,j במטריצה P^2:

$$P_{ij}{}^{(2)}=\sum_{k=1}^{3} P_{ik}P_{kj} \underset{\text{All values in collumn are the same}}{=} P_{1j}\sum_{k=1}^{3} P_{ik}=P_{1j}$$

מכאן השורות של P^2 שוות זו לזו ו $P^2=P$. מכאן באינדוקציה $P^{17}=P$.

ב' נכונה -> מכל מצב ניתן להגיעה לכל מצב.

ג' נכונה -> ברור שעבור סדרת משתנים i.i.d שרשרת המרקוב המדוברת היא בעלת מטריצה עם שורות שוות כאשר הפילוג של המשתנה נתון בכל שורה. גם ההיפך הוא נכון (עבור מטריצת מעבר כזאת, שרשרת המרקוב מורכבת מאוסף מ"מ בלתי תלויים שווי התפלגות). ניתן להוכיח זאת (ההוכחות בהמשך אינן נחוצות לצורך הפתרון):
ראשית נראה שהם משתנים שווי התפלגות: נוכיח $P(X_2=j)=P(X_1=j)$ (וניתן להמשיך הוכחה זו לזמני 2 ו -3 וכו' וכך באינדוקציה מקבלים את התוצאה):

$$P(X_1=j)=\sum_{k=1}^{3}P(X_1=j\mid X_0=k)P(X_0=k)=$$
$$P(X_1=j\mid X_0=1)\sum_{k=1}^{3}P(X_0=k)=P(X_1=j\mid X_0=1)$$

באופן דומה:
$$P(X_2=j)=\sum_{k=1}^{3}P(X_2=j\mid X_1=k)P(X_1=k)=$$
$$P(X_2=j\mid X_1=1)\sum_{k=1}^{3}P(X_1=k)=P(X_2=j\mid X_1=1)$$

על פי הומוגניות בזמן $P(X_2=j\mid X_1=1)=P(X_1=j\mid X_0=1)$ ומכאן התוצאה הרצויה.

בשביל לראות ש X_2 ו - X_1 בלתי תלויים, רואים מייד על פי המטריצה ש $P(X_2=j\mid X_1=i)$ הוא זהה לכל ערך של i.

זאת תוצאה ידועה: כאשר נתונים משתנים מקריים Z ו Y והפילוג המותנה של Z ב Y הוא זהה לכל ערך של Y אז Z ו - Y בלתי תלויים.

נתון:

$$P(Z=j\mid Y=1)=P(Z=j\mid Y=2)=....=P(Z=j\mid Y=M)$$

אז

$$P(Z=j)=\sum_{i=1}^{M}P(Z=j\mid Y=i)P(Y=i)=P(Z=j\mid Y=1)\cdot 1$$

באותו אופן מקבלים:
$P(Z=j)=P(Z=j\mid Y=i)$ לכל i ולכן Z ו – Y ב"ת

($P(X,Z)=P(X)P(Z)\Leftrightarrow P(X\mid Z)=P(X)$).

ב-3) **ד' (א' + ב')**

$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}e^{-3t}$$

מכאן א' נכון – לקחת גבול.
ב' נכון – בגלל שבוודאות מתחילים במצב מס' 0.

ב-4) **ג'**

יש במערכת זו מקום לצרכן יחיד בלבד. לכן בהינתן שיש כבר צרכן בשרות, צריך לחכות עד ששרותו יסתיים. צרכנים אשר מגיעים במהלך השרות שלו אינם נכנסים למערכת.

ב-5) **ב'**

ראשית על פי נוסחת ליטל, $\lambda = 2$.

מכאן תשובה ב' היא נכונה. $e^{-\lambda 10} = e^{-20}$.

ב-6) **ג'**

רואים שכאשר מתחילים במצב 1, אז המסלול למצב 5 הוא קבוע: 1-> 3-> 5.
אם כך תוחלת הזמן שלקוח לבצע מסלול זה היא $\frac{1}{1} + \frac{1}{1/2} = 3$.

תשובות לחלק ג:

שאלה 1:

א) זו מערכת תורים עם אינסוף שרתים וללא מגבלת מקום לצרכנים.

ב)

$$\pi_0+\pi_1+\pi_2+....=1$$
$$\pi_0\lambda=\pi_1\mu$$
$$\pi_1\lambda=\pi_2 2\mu$$
$$\pi_2\lambda=\pi_3 3\mu$$
$$...$$
$$\pi_{k-1}\lambda=\pi_k k\mu \quad k=1,2,....$$

מכאן $\pi_k=\dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^k}{k!}\pi_0$

ולכן $\pi_0=\dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(\lambda/\mu)^k}{k!}}=e^{-\lambda/\mu}$

קבלנו שמספר הצרכנים במערכת מתפלג פואסונית עם פרמטר λ/μ.

ג) המערכת יציבה לכל צמד λ,μ. הסיבה היא שהטור שאיתו חישבנו את π_0 בסעיף הקודם מתכנס לכל λ/μ.

ד) כל צרכן שוהה במערכת באופן בלתי תלוי משאר הצרכנים. זמן השהייה (שרות) של צרכן הוא $\exp(\mu)$ ידוע שהסיכוי שמשתנה מקרי זה גדול מ T הוא $e^{-T\mu}$.

ה) זוהי תחרות בין משתנים מקריים אקספונציאלים:

X – הזמן עד הגעת הצרכן הבא. $X\sim\exp(\lambda)$

Y – הזמן עד עזיבת הצרכן. $Y\sim\exp(\mu)$.

$$P(Y\le X)=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x}f_{X,Y}(x,y)dydx=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}dydx=$$

$$\int_{x=0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}\int_{y=0}^{x}\mu e^{-\mu y}dydx=\int_{x=0}^{\infty}\lambda e^{-\lambda x}(1-e^{-\mu x})dx=1-\lambda\int_{x=0}^{\infty}e^{-(\lambda+\mu)}dx=$$

$$1-\lambda\frac{1}{\lambda+\mu}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}$$

ו)

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{2\mu}{\lambda+2\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{3\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

שאלה 2:

א)
מרחב המצבים $S=\{0,1,2,3,4,5\}$
נשתמש בסימון
$$b(n,k)=\binom{n}{k}(\frac{1}{4})^k(\frac{3}{4})^{n-k}$$
אז:
$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b(1,0) & b(1,1) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b(2,0) & b(2,1) & b(2,2) & 0 & 0 & 0 \\ b(3,0) & b(3,1) & b(3,2) & b(3,3) & 0 & 0 \\ b(4,0) & b(4,1) & b(4,2) & b(4,3) & b(4,4) & 0 \\ b(5,0) & b(5,1) & b(5,2) & b(5,3) & b(5,4) & b(5,5) \end{pmatrix}$$

ב)
מחלקות הקשירות: $\{0\}$ - מחלקה מתמידה (מצב סופג).
המחלקות $\{5\}$, $\{4\}$, $\{3\}$, $\{2\}$, $\{1\}$ מחלקות חולפות. (שימו לב: אלו 5 מחלקות שונות. לדוגמא 2 ו – 3 אינם באותה מחלקה בגלל שהם לא קשירים (לא ניתן לעבור מ 2 ל 3).

ג) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P_{11}{}^{(n)}$ מתבדר בגלל שמצב 1 הוא מצב מתמיד. זה מתבסס על משפט המאפיין התמדה/חליפות של מצבים על פי התבדרות/התכנסות של הטור הנ"ל.
במקרה זה גם קל לראות ש $P_{11}{}^{(n)}=1$ (כי 1 מצב סופג) וזאת עוד סיבה להתבדרות הטור (האיבר הכללי אינו שואף ל – 0).

ד)
נסמן μ_k - תוחלת הזמן (מספר צעדים) עד שמגיעים למצב 0 כאשר מתחילים במצב k.
אז על פי התניה בצעד ראשון:
$$\begin{aligned}
\mu_5 &= 1+P_{55}\mu_5+P_{54}\mu_4+P_{53}\mu_3+P_{52}\mu_2+P_{51}\mu_1 \\
\mu_4 &= 1+P_{44}\mu_4+P_{43}\mu_3+P_{42}\mu_2+P_{41}\mu_1 \\
\mu_3 &= 1+P_{33}\mu_3+P_{32}\mu_2+P_{31}\mu_1 \\
\mu_2 &= 1+P_{22}\mu_2+P_{21}\mu_1 \\
\mu_1 &= 1+P_{11}\mu_1
\end{aligned}$$

כאשר $P_{ij}=\binom{i}{j}(\frac{1}{4})^j(\frac{3}{4})^{i-j}$
לא ידוע דרך לפתרון מערכת המשוואות באופן פשוט.

ה)
מחלקה חולפת $\{5\}$.
מחלקה מתמידה $\{0,1,2,3,4\}$.

ו)
$f_{2,3}=1$ (כי שני המצבים באותה מחלקה מתמידה).
$f_{1,5}=0$ (כי 1 במחלקה מתמידה שאינה מכילה את 5).
$f_{5,0}=f_{5,4}=1$ (כי 5 במחלקה החולפת היחידה בשרשרת, ולאחר זמן סופי עוברים למחלקה המתמידה $\{0,1,2,3,4\}$).