החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250</u>

פתרון לבוחן כתה, מרץ 2007

מרצים: פרופסור אסטר פרוסטיג, מר. יוני נצרתי.
מתרגלים: מר. דרור קלודה, גב' אולגה פרידליאנד.

שאלה א-1:

ילד משחק במכשיר ליצור בועות. בכל נשיפה של הילד נוצרים N בועות כאשר
$P(N=k)=(1-p)^k p, \quad k=0,1,2,...$.

משך הזמן בשניות שכל בועה שורדת (עד אשר מתפוצצת) הוא מ"מ $\exp(\lambda)$, בלתי תלוי בשאר הבועות ובלתי תלוי במספר הבועות. הנח שכל הבועות נוצרות באותו רגע בדיוק.

מהי תוחלת מס' הבועות אשר עדיין לא התפוצצו בזמן 3 שניות לאחר יצור הבועות?
רמז: השתמש בתוחלת של סכום מקרי.

<u>פתרון:</u>

יהיו $X_1, X_2, ...$ אורכי החיים של הבועות. בזמן 3 שניות, כל בועה אשר נוצרה בזמן 0 ועבורה $X_i \geq 3$ עדיין תהייה קיימת. נסמן ב $I_1, I_2, ...$ משתנים מקריים המקבלים ערכים 0,1 (אינדיקאטורים), כאשר $I_i = 1$ אם ורק אם $X_i \geq 3$.

אז $P(I_i = 1) = P(X_i \geq 3) = e^{-\lambda 3}$.

אנו מעוניינים בחישוב התוחלת של המ"מ $S = \sum_{i=1}^{N} I_i$. ראינו שעבור סכום מקרי שכזה, $ES = ENEI$ ולכן

התשובה היא: $ES = \underbrace{\frac{(1-p)}{p}}_{EN} \underbrace{e^{-\lambda 3}}_{EI}$.

שאלה א-2:

עורכים סדרה של הטלות מטבע בלתי תלויות. סיכוי להצלחה p. יהי N_3 מספר ההצלחות ב – 3 הניסויים הראשונים ו - N_2 מספר ההצלחות ב – 2 הניסויים הראשונים.

מהו $Cov(N_3, N_2)$?

רמז: יצג את N_n כסכום של n משתנים מקריים ברנולי ב"ת.

תזכורות: $Cov(X+Z,Y) = Cov(X,Y) + Cov(Z,Y)$, $Cov(X,Y) = E(X-EX)(Y-EY)$.

<u>פתרון:</u>

נסמן $N_2 = X_1 + X_2$, $N_3 = X_1 + X_2 + X_3$, כאשר $X_1, X_2, ...$ הם מ"מ ברנולי ב"ת עם סיכוי הצלחה p.
אם כך:

$$Cov(N_3, N_2) = Cov(X_1 + X_2 + X_3, X_1 + X_2) =$$
$$\underbrace{Cov(X_1 + X_2, X_1 + X_2)}_{Var(X_1+X_2)} + \underbrace{Cov(X_3, X_1 + X_2)}_{0} = Var(X_1 + X_2) = Var(N_2) = 2p(1-p)$$

שאלה ב-1:

סטודנטית מחכה לטרמפ. כל מכונית שעוברת עוצרת בסיכוי p ואינה עוצרת בסיכוי 1-p באופן בלתי תלוי במכוניות האחרות. מספר המכוניות העוברות במשך שעה הוא משתנה מיקרי פואסוני עם פרמטר λ מכוניות לשעה.
מה ההסתברות שבמשך שעה לא עצרה אף מכונית?

<u>פתרון:</u>

נסמן, N- מס' המכוניות שעברו בשעה. $I_1, I_2, ...$ סדרת מ"מ ברנולי i.i.d וב"ת ב N כך ש I_i מציין האם המכונית ה i עצרה.

אנו מעוניינים בחישוב $P(\sum_{i=0}^{N} I_i = 0)$, זהו הסיכוי שאף מכונית לא עצרה.

ראשית נבחין כי: $P(\sum_{i=0}^{N} I_i = 0 \mid N = n) = (1-p)^n$.

עכשיו:

$$P(\sum_{i=0}^{N} I_i = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{P(\sum_{i=0}^{N} I_i = 0 \mid N = n)}_{(1-p)^n} \underbrace{P(N = n)}_{e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}} =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\left((1-p)\lambda\right)^n}{n!} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda(1-p)}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda(1-p)} \frac{\left((1-p)\lambda\right)^n}{n!} = e^{-\lambda p}$$

שאלה ב-2:

עכבר מעבדה תקוע במבוך. מנקודת המוצא שני פתחים A ו-B. הוא בוחר ב-A בסיכוי p וב-B בסיכוי 1-p.
הנה שאם בוחר ב-A יוצא לחופשי אחר 1 שעה ואם בוחר ב-B חוזר לנקודת המוצא לאחר 2 שעות. מה תוחלת הזמן עד שעכבר יוצא לחופשי.
רמז: התנה בבחירה המקורית שהעכבר מבצע, A או B.

<u>פתרון:</u>

נסמן ב T את תוחלת הזמן עד שהעכבר יוצא.
נסמן ב I את המ"מ המציין את החלטת העכבר ברגע נתון. I יכול לקבל ערכים "A" ו- "B".
אז מנתוני השאלה: $E[T \mid I = A] = 1$ וגם $E[T \mid I = B] = 2 + E[T]$ (זה בגלל שמידה ובוחר ב – B אז כעבור שעתיים העכבר חוזר לנקודת ההתחלה שוב והסיפור חוזר על עצמו).
אם כך, על פי משפט התוחלת השלמה:

$$E[T] = E\left[E[T \mid I]\right] = pE[T \mid I = A] + (1-p)E[T \mid I = B] = p \cdot 1 + (1-p)(2 + E[T])$$

ולכן

$$E[T] = 2 - p + (1-p)E[T]$$

ולכן

$$E[T] = \frac{2-p}{p}$$

הערה: כאשר מקבלים תשובה כזאת לפעמים ניתן לבדוק שפיות ע"י הצבה של p קיצוני. לדוגמא: במידה ו $p = 1$ אז קבלנו $E[T] = 1$ כצפוי, כי הרי במקרה זה העכבר תמיד יבחר בפתח "A" ויצא כעבור שעה.