

**חלק ד: תהליכי קפיצה מרקוביים**

1. בפרק שרשראות מרקוב בזמן רציף בחוברת, פתור את סעיפי שאלות 1, 2, 3, 5 שלא פתרנו בתרגול.
2. משך הזמן ש"יעל נובי" בריא הוא מ"מ אקספוננציאלי. לאחר תקופה זו 90% מהיעלים נהיים חולים והיתר נפטרים בפתאומיות. משך זמן המחלה גם הוא מ"מ אקספוננציאלי עם קצב אחר. 70% מהיעלים החולים מבריאים והשאר נפטרים:
  - א. האם מדובר בתהליך קפיצה מרקובי. אילו תנאים צריכים להתקיים ע"מ שיהיה מדובר בתהליך קפיצה מרקובי?
  - ב. רשום את מטריצת ההסתברויות המשוכנת של התהליך.
3. במספרה יש ספר אחד ו-2 מקומות המתנה משך התספורת הוא מ"מ אקספוננציאלי. זמן התספורת הממוצע הוא 20 דקות. לקוחות מגיעים לפי תהליך פואסון בקצב 2 בשעה. לקוח שמגיע ורואה ששני מקומות ההמתנה תפוסים עוזב את המספרה.
  - א. הגדר את מרחב המצבים.
  - ב. צייר את תרשימי הקשירות בין המצבים.
  - ג. רשום את מטריצת היוצר (הגנראטור) של התהליך.
  - ד. רשום את מטריצת ההסתברויות של השרשרת המשוכנת של התהליך.
  - ה. חשב את ההסתברויות הסטציונריות של התהליך.
  - ו. מהי פרופורציית הזמן ששני כסאות ההמתנה יהיו תפוסים?
  - ז. מהי פרופורציית הזמן שהספר עסוק?
  - ח. מה מספר הלקוחות הממוצע שהספר מספר בשעה אחת?
4. בקפה גרג 3 מכונות "אייס קפה". כל מכונה עובדת בממוצע 60 ימים עד לקלקולה. הנח שהזמנים עד לקלקול המכונות השונות הם מ"מ ב"ת מפולגים אקספוננציאליים. זמני התיקון של המכונות הם גם כן מ"מ ב"ת בזמנים בין הקלקולים מפולגים אקספוננציאליים עם ממוצע 4 ימים. ישנו טכנאי אחד בלבד שמתקן מכונה אחת בכל פעם.
  - א. הגדר את מרחב המצבים.

תרגול 10

- ב. צייר את תרשימים הקשירות בין המצבים.
- ג. רשום את מטריצת היוצר (הגנראטור) של התהליך.
- ד. רשום את מטריצת ההסתברויות של השרשרת המשוכנת של התהליך.
- ה. חשב את ההסתברויות הסטציונריות של התהליך בשני דרכים:
- 1) ע"י הכפלת וקטור ההסתברויות הסטציונריות במטריצת היוצר.
- 2) ע"י השוואה בין קצבי כניסה ויציאה מכל מצב.
- ו. האם קיימת דרך שלישית לחישוב ההסתברויות הסטציונריות במקרה זה? האם תמיד קיימת דרך שלישית זו?
- ז. מה אחוז הזמן שהמכונות עובדות?
- ח. כאשר מכונה עובדת "בעל הבית" של קפה גרג מרוויח עליה 1,000 ₪ ליום (בלתי תלוי בתפקוד יתר המכונות). נניח שעלות התיקון שלה היא 0. מהו ממוצע הרווח היומי של "בעל הבית" ממכונות ה"אייס קפה"?
5. ברחוב אבן-גבירול בתל-אביב 2 דוכני פלאפל אחד ליד השני – "פלאפל מבורך" ו"פלאפל מברוק". כל דוכן יכול לשרת לקוח אחד בלבד בו-זמנית ובשני הדוכנים אין מקום לתור. מופע הלקוחות שמעוניינים לקנות פלאפל באזור הדוכנים הוא תהליך פואסון עם קצב 20 לקוחות בשעה. ידוע כי 30% מהלקוחות מעדיפים את "מבורך" והיתר את "מברוק". לקוח תמיד נכנס לדוכן אותו הוא מעדיף אם הדוכן פנוי. אם הדוכן המועדף אינו פנוי והדוכן האחר כן פנוי הוא ילך לדוכן האחר. במקרה ששני הדוכנים תפוסים הוא עוזב את המקום. "מבורך" משרת לקוח במשך חצי דקה בממוצע (רמז: שווה למנה פלאפל ב- 1/120 שעה). "מברוק" משרת לקוח במשך דקה אחת בממוצע. זמני השירות הם אקספוננציאלים ובלתי תלויים.
- א. הגדר את מרחב המצבים.
- ב. צייר את תרשימים הקשירות בין המצבים.
- ג. ברגע מסוים לקוח משורת ב"מבורך" ו"מברוק" פנוי. מה ההסתברות שלקוח חדש יופיע לפני שהלקוח ב"מבורך" יקבל מנת פלאפל?
- ד. ברגע מסוים נמצאים לקוחות בשני הדוכנים. מה ההסתברות שדקה מאוחר יותר עדיין לא יסתיים מתן השירות של שני הלקוחות?

## תרגול 10

- ה. ידוע שברגע מסוים שני הדוכנים פנויים. מה תוחלת הזמן שיחלוף מרגע זה ועד כניסת לקוח ל"מברוק"?
- ו. רשום את המשוואות לחישוב ההסתברויות הסטציונריות. אין צורך לחשב.
- ז. הנח שנתון וקטור ההסתברויות הסטציונריות. דן הוא לקוח המעדיף את הפלאפל של "מברוק" וזה עתה הגיע לקרבת הדוכנים. מהי ההסתברות שהוא אכן יאכל פלאפל אצל "מברוק".
6. שיחות מגיעות לטלפון הפרטי של מיכל בתהליך פואסון עם קצב 5 שיחות לשעה. משכי השיחות הם מ"מ ב"ת עם תוחלת של 20 דקות. מיכל משתמשת באותו הקו גם לאינטרנט (החיבור לאינטרנט הוא מהסוג הישן שאינו מאפשר גם להיות מחובר לאינטרנט וגם לדבר בטלפון). הזמנים בין התחברות של מיכל לאינטרנט הם מ"מ ב"ת מפולגים אקספוננציאלית עם תוחלת שעה אחת. כאשר מיכל מתחברת לאינטרנט היא נשארת מחוברת משך זמן אקספוננציאלי עם תוחלת של שעתיים. כאשר חבר מתקשר למיכל ובדיוק מיכל משוחחת בטלפון או מחוברת לאינטרנט נשמע צליל תפוס ואז החבר מנתק מייד ולא מתקשר שנית.
- א. הגדר את מרחב המצבים.
- ב. צייר את תרשימים הקשירות בין המצבים.
- ג. נתון שכרגע הקו פנוי. מה התפלגות הזמן עד שלראשונה קו הטלפון יהיה תפוס?
- ד. רשום את מטריצת היוצר של התהליך.
- ה. רשום את מטריצת הסתברויות המעבר של השרשרת המשוכנת של התהליך.
- ו. אמא של מיכל נכנסה לחדרה אחרי זמן רב. מה הסיכוי שתימצא אותה משוחחת בטלפון?
- ז. מהו מספר הפעמים הממוצע שמיכל מרימה את שפרפרת הטלפון על מנת לענות?