

## תרגול 11

## חלק ה: תהליכי לידה מוות ומערכות תורים.

1. הסתכל על דף הנוסחאות המצורף למבחן:

(א) מהי  $L = \sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k$  עבור מערכת M/M/1?

(ב) כיצד נוסחת ליטל מקשרת בין הפתרון של א' לבין העובדה שזמן השהייה במצב יציב מתפלג  $\exp(\mu - \lambda)$ ?

(ג) מהו פילוג מספר הצרכנים במערכת M/M/∞? מה תוחלת מספר הצרכנים במערכת?

(ד) כיצד הפתרון ל - ג' מתקשר לפילוג מספר הצרכנים במערכת M/M/c/c.

(ה) מה המשמעות של  $\pi_c$  במערכת M/M/c/c?

(ו) מה המשמעות של  $\lambda(1 - \pi_c)$  במערכת M/M/c/c?

(ז) צייר גרף (באקסל או באמצעות תוכנה אחרת) של  $\pi_c$  עבור מערכת M/M/c/c עם  $\lambda = 12$ ,  $\mu = 4$  עבור  $c = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ ? (השתמש בפונקציה fact() לצורך חישוב k!).

(ח) מהו מספר השרתים המינימאלי הדרוש לצורך כך שאחוז הצרכנים אשר מגיעים למערכת ונזרקים (בגלל שהמערכת מלאה) יהיה לכל היותר 5%.

2. ניתן לתאר את סניף הדואר באוניברסיטה כמערכת תורים M/M/1 בעלת קצב שרות

$$\mu = 3 \text{ לקוחות בדקה וקצב הגעת לקוחות } \lambda = 2$$

(א) נכון/לא נכון:

a. במידה והסניף נפתח בשעה 8:00 בבוקר (ריק) אז תוחלת מספר הצרכנים

$$\text{בסניף בשעה 9:00 היא בקרוב } \frac{2/3}{1-2/3}$$

b. במידה והסניף נפתח בשעה 8:00 בבוקר (ריק) אז תוחלת מספר הצרכנים

$$\text{בסניף בשעה 8:01 היא בדיוק } \frac{2/3}{1-2/3}$$

c. הסיכוי שלקוח ישהה יותר מדקה במערכת (במצב יציב) הוא  $\frac{1}{e}$ .

(ב) חשב את תוחלת מספר הלקוחות אשר ממתנים בתור.

(ג) חשב את זמן ההמתנה הממוצע בתור.

## תרגול 11

- (ד) מהו אחוז הצרכנים אשר אינו ממתין בתור?
- (ה) חשב את ההתפלגות הסטציונרית באמצעות פתרון משוואות שווי משקל הרגילות
- $$\left( \begin{array}{l} \pi Q = 0 \\ \sum \pi_i = 1 \end{array} \right)$$
- (ו) ברגע נתון, ישנם 3 אנשים בסניף הדואר. הפקידה בדואר, אינה מרגישה טוב, היא מצוברחת ועצבנית ורוצה להכין לעצמה קפה ולשבת קצת לבד בשקט. היא החליטה שאם יהיו בסניף 6 אנשים לפני שהיא עושה הפסקת קפה אז היא עוזבת את הכול והולכת הביתה. מה הסיכוי שתעזוב את הכול ותלך הביתה? (רמז: מודל המהמר).

3. שרת דוא"ל (e-mail server) הוא מחשב אשר מקבל הודעות דוא"ל ומעביר אותם הלאה למחשבים אחרים או שרתים אחרים.  
להלן נתונים לגבי שרת דוא"ל מסוים:
- i. השרת מטפל בהודעות בסדר אשר הן מגיעות אליו. ואינו מטפל בהודעות במקביל.
  - ii. כאשר הודעה מגיעה אל השרת והוא אינו פנוי (מטפל כבר בהודעה אחרת) אז ההודעה אשר הגיעה ממתינה בזיכרון השרת במידה ויש שם מקום, אחרת ההודעה נזרקת.
  - iii. בשרת יש מקום בזיכרון ל 3 הודעות (מקום המתנה ל 3 הודעות).
  - iv. זמן הטיפול בהודעה הוא פרופורציונאלי לגודל ההודעה. כל קילו-בייט (KB) של הודעה לוקח 0.1 שנייה.
  - v. גודל ההודעות מפלג אקספוננציאלית עם תוחלת 100 KB והגדלים בלתי תלויים זה מזה.
  - vi. הודעות מגיעות על פי תהליך פואסון עם קצב  $\lambda$  הודעות בשנייה.
  - vii. ניתן להניח שהשרת עובד לפרק זמן מספיק ארוך.
- (א) תאר את שרת דוא"ל כמערכת תורים. מהו הסימון המתאים למערכת זו? מהם הפרמטרים?
- (ב) ייצג את מערכת התורים כתהליך לידה מוות ופתור משוואות שווי משקל מפורטות. (רמז: יש להפריד בין המקרים בהם  $\lambda = 1$  ו-  $\lambda \neq 1$ ).

## תרגול 11

כעת הנח:  $\lambda \neq 1$ :

- (ג) רשום ביטוי עבור אחוז ההודעות אשר מגיעות לשרת ונזרקות.  
 (ד) מהו מספר ההודעות הממוצע בשנייה אשר נכנסות אל השרת.  
 (ה) רשום ביטוי עבור תוחלת מספר ההודעות בתור.  
 (ו) מהו זמן ההמתנה הממוצע של הודעה (הזמן מהרגע שהיא ממתנה בזיכרון השרת עד אשר השרת מתחיל לטפל בא).  
 (ז) מהו זמן הטיפול הממוצע של הודעה (הזמן מהרגע שבו הגיעה הודעה עד אשר היא עוזבת את המערכת).  
 צייר גרף (באקסל או תוכנה אחרת) אשר מכיל 3 עקומות כפונקציה של  $\lambda$ :  
 a. זמן ההמתנה הממוצע של הודעה.  
 b. פרופורציית הזמן שבה השרת מנוצל.  
 c. מספר ההודעות הממוצע לשנייה אשר נזרקות.  
 ח) הסבר את הגרף אשר התקבל בסעיף הקודם.  
 ט) מנהל רשת התקשורת יכול לשלוט על  $\lambda$ . כל שנייה ובה השרת לא מנוצל עולה למנהל הרשת 20 אגורות. כל הודעה אשר נזרקה עולה למנהל הרשת 50 אגורות. מהו ה  $\lambda$  אשר מנהל הרשת יבחר?

שאלת בונוס (מומלץ לנסות):

4. מערכת תורים  $M/E_2/1/2$  היא מערכת בעלת הגעות של לקוחות על פי תהליך פואסון עם קצב  $\lambda$  וזמני שרות בלתי תלויים המפולגים  $erlang(2, 2\mu)$ . למערכת שרת יחיד ומקום המתנה יחיד בתור.  
 (א) מהו זמן השרות הממוצע? מהי שונות זמן השרות?  
 (ב) מדל את מצב מערכת זו כתהליך ספירה מרקובי. מה המשמעות של המצבים? מהי מטריצת הגנרטור? (רמז: זהו לא תהליך לידה מוות).  
 (ג) הנח  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 3$ , מה תוחלת מספר הצרכנים במערכת?  
 (ד) כאת הסתכל על מערכת  $M/M/1/2$ . מה ההבדלים בין מערכת זו למערכת  $M/E_2/1/2$ ?  
 (ה) חשב את תוחלת מספר הצרכנים במערכת  $M/M/1/2$ . איזה מערכת יותר עמוסה? האם יש הסבר אינטואיטיבי לדבר?