תרגול 1 (22/10/2007)

1. מידע כללי לגבי התרגול:

א. פרטים לגבי הקורס באתר הקורס:

http://stat.haifa.ac.il/~yonin/stoch_course_winter_08/stoch.html.

ב. יש להירשם לרשימת התפוצה של הקורס בהתאם להנחיות שבאתר הקורס.

ג. לפני כל תרגול יפורסם באתר קובץ שאלות. רצוי להדפיס ולהגיע עם הקובץ לתרגול. חלק מהשאלות ייפתרו במהלך התרגול וחלק יינתנו כשיעורי בית. יש להגיש את פתרון שיעורי הבית לא יאוחר מתחילת התרגול בשבוע שאחרי. אין להגיש באיחור ואין להגיש לתא של המתרגל. על סטודנטים עם סיבות מוצדקות לאיחור בהגשת שיעורי הבית, להודיע על כך מראש (לא יאוחר מתחילת התרגול בו צריך להגיש את שיעורי הבית) ולא בדיעבד.

ד. שם המתרגל: גלעד גיא (שם פרטי: גלעד).

ה. בכל עניין שעולה רצוי וכדאי לפנות למתרגל בדוא"ל: giladguy@stat.haifa.ac.il. יש לרשום בשורת הנושא: "סטוכסטים".

2. הוכח שמתקיים: $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

א. בעזרת הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

ב. באמצעות הוכחה קומבינטורית. **<u>פתרון</u>**: נספור את כל הוקטורים הבינאריים באורך n (וקטורים של 0 ו-1. כלומר, לדוגמא $(1,0,\ldots,1)$). מצד אחד, בכל אחד מ- n המיקומים אפשר שיהיה 0 או 1 (שתי אופציות) לכן שווה ל- 2^n. מצד שני, ניתן לחלק את קבוצת כל הוקטורים הבינאריים באורך n ל- n קבוצות, כך שבקבוצה ה- k יש k אחדים ו- $n-k$ אפסים. מספר הוקטורים בקבוצה ה- k הוא $\binom{n}{k}$ ולכן בכל הקבוצות $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

תרגול 1 (22/10/2007)

3. הוכח שמתקיים (טור גיאומטרי) : $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. **פתרון**:

$$(1+a+a^2+...+a^n)(a-1) = (a+a^2+...+a^n+a^{n+1}) - (1+a+a^2+...+a^n)$$

$$= (a+a^2+...+a^n) + a^{n+1} - 1 + (a+a^2+...+a^n) = a^{n+1} - 1$$

4. הוכח שמתקיים:

א. $|a|<1$, $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$. **פתרון**: $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a^k\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(a^{n+1}\right)-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$.

ב. $|a|<1$, $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}$. **פתרון**: $\sum_{k=1}^{\infty} a^k = a\cdot\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{a}{1-a}$.

5. הוכח שמתקיים (טור טלסקופי) : $\sum_{k=0}^{N}(A_k - A_{k+1}) = A_0 - A_{N+1}$. **פתרון**:

$$\sum_{k=0}^{N}(A_k - A_{k+1}) = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + ... + (A_{N-1} - A_N) + (A_N - A_{N+1})$$

$$= A_0 + (-A_1 + A_1) + (-A_2 + A_2) + ... + (-A_N + A_N) - A_{N+1} = A_0 - A_{N+1}$$

6. יהי Z משתנה מקרי : $P_Z(k) = \begin{cases} \frac{1}{k(k+1)} & k=1,2,3,... \\ 0 & else \end{cases}$.

א. הוכח שמדובר בפונקצית הסתברות.

ב. חשב $E(Z)$.

7. הוכח שפונקצית מסת ההסתברות של המשתנים המקריים הבאים היא אכן פונקצית מסת הסתברות (חיובית וסכום האיברים הוא 1) – בינומי, גיאומטרי סופר ניסיונות, גיאומטרי סופר כישלונות ופואסוני.

8. הוכח שמשתנה מקרי אקספוננציאלי הוא חסר זיכרון.

תרגול 1 (22/10/2007)

9. בתאריך 1/10/07 הוקמה חברת הביטוח "על חשבוננו" בע"מ המוכרת חוזי ביטוח כלי-שייט. "מאורע הביטוח" הינו מאורע שבגינו חייב המבטח (חברת הביטוח) לשלם הטבה למבוטח. N_i הוא משתנה מקרי השווה למספר מאורעות הביטוח בקרב מבוטחי החברה בחודש ה- i מיום הקמתה. כעת, נניח ש- N_i הם שווי התפלגות לכל i. נסמן התפלגות זו ב- N. נתון N מתפלג פואסון עם עוצמה $\lambda = 3.4$:

א. צייר את פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי N, ומקם את $E(N)$ על הגרף.

ב. Y שווה למספר מאורעות הביטוח בקרב המבוטחים בשנה. כיצד מתפלג Y?

1) הוכח בעזרת קונבולוציה.

2) הוכח בעזרת הכפלת פונקציות יוצרות.

ג. בסוף כל חודש סמנכ"ל השיווק של החברה מקבל בונוס אם מספר מאורעות הביטוח בחודש החולף היה נמוך או שווה ל- 2. מה התפלגות, תוחלת ושונות המשתנים המקריים הבאים :

1) W_1 = מספר הבונוסים שיקבל הסמנכ"ל בחודש אוקטובר.

2) W_2 = מספר החודשים שעברו מיום הקמת החברה עד אשר יקבל הסמנכ"ל בונוס לראשונה (כולל חודש הבונוס).

3) W_3 = מספר החודשים שעברו מיום הקמת החברה שבהם הסמנכ"ל לא יקבל בונוס, עד אשר יקבל בונוס לראשונה.

4) W_4 = מספר החודשים בשנה הראשונה בהם יקבל הסמנכ"ל בונוס.

5) W_5 = מספר החודשים שיחלפו עד שהסמנכ"ל יקבל 3 בונוסים (כולל הבונוס השלישי).

6) W_6 = מספר החודשים בהם הסמנכ"ל לא יקבל בונוסים עד שהסמנכ"ל יקבל 3 בונוסים.

7) W_7 = מספר הבונוסים שיתקבלו ברבעון הראשון של השנה הראשונה (ינואר עד מרץ), בהינתן שבשנה הראשונה יתקבלו 2 בונוסים.

8) W_8 = מספר מאורעות הביטוח שיתרחשו ברבעון השנה הראשונה (ינואר עד מרץ), בהינתן שבשנה הראשונה יהיו 36 מאורעות ביטוח.

תרגול 1 (22/10/2007)

9) נתון נוסף – לפי החלטת דירקטוריון החברה, בסוף כל חודש סמנכ״ל השיווק של החברה יפוטר אם מספר מאורעות הביטוח בחודש החולף היה גבוה או שווה ל- 5. מה התפלגות, תוחלת ושונות המשתנה המקרי הבא:

W_9 = מספר הבונוסים שינתנו לסמנכ״ל שיווק בשנה הראשונה, בהינתן שבשנה הראשונה יפוטרו 2 סמנכ״לי שיווק.

10. תחנת הדלק של קניון חיפה נפתחת בשעה 07:00. נסמן ב- T_n את הזמן שעבר מהגעת המכונית ה- n ועד הגעת המכונית ה- $n+1$ (T_1 הוא הזמן שעבר מפתיחת התחנה ועד הגעת המכונית הראשונה). $T_n \sim \exp(\lambda = 5)$.

א. $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ הוא הזמן שעבר מפתיחת התחנה ועד הגעת המכונית ה- n. כיצד מתפלג S_n?

ב. התחנה, כאמור, נפתחה ב- 07:00. בשעה 07:10 עדיין לא הגיעה אף מכונית. V הוא הזמן שיעבור משעה 07:10 ועד להגעת המכונית הראשונה. כיצד מתפלג V? יש להוכיח זאת!

ג. בתחנת הדלק בקניון חיפה 2 מתדלקים סמי וסוסו:

- $X_1 \sim \exp(\mu_1 = 8)$ - הזמן שלוקח לסמי לתדלק.
- $X_2 \sim \exp(\mu_2 = 3)$ - הזמן שלוקח לסוסו לתדלק.

1) בשעה 08:00 בדיוק סמי וסוסו החלו לתדלק 2 רכבים:

א) מה הסיכוי שסמי סיים לתדלק לפני סוסו.

ב) מה הסיכוי שהגיע לתחנה רכב נוסף בטרם סמי או סוסו סיימו לתדלק לפני סוסו.

ג) מה התפלגות, תוחלת ושונות הזמן שעבר משעה 08:00 ועד שהרכב הראשון יצא מתודלק מהתחנה.

ד) נניח שכעת שבנוסף לנתונים נתון שהתחרות בין סמי לסוסו (תחרות לגבי מי יסיים לתדלק ראשון) מתרחשת ביום שישי בבוקר כאשר בכניסה לתחנה ממתינים רכבים למכביר (נניח שאינסוף רכבים). W הוא מספר הרכבים שתדלק סמי לפני שסוסו הספיק לסיים לתדלק את הרכב הראשון. כיצד מתפלג W?

תרגול 1 (22/10/2007)

11. הוכח באינדוקציה כי לכל סכום טבעי של $n \geq 2$ ₪ ניתן לשלם בעזרת מטבעות של 3 ו- 2 ₪, בהנחה שיש אספקה בלתי מוגבלת של מטבעות כאלה. **פתרון**: אם נסמן ב- $A(n)$ את הטענה שניתן לשלם סכום של n ₪ בעזרת מטבעות של 3 ו- 2 ₪, אז למעשה אנו נדרשים להוכיח נכונות של סידרה אינסופית של טענות $A(2), A(3), A(4),...$. באופן כללי אנו נדרשים להוכיח ש- $A(n)$ נכון לכל n טבעי המקיים $n \geq 2$. ניתן להוכיח סידרת טענות כזו באמצעות אינדוקציה. אינדוקציה צריך לבצע בשני שלבים:

א. צריך להוכיח ש- $A(2)$ נכון (בסיס).

ב. צריך להוכיח שבהינתן ש- $A(n)$ נכון, אז $A(n+1)$ נכון (צעד).

אם הוכחנו את שתי הטענות (א' + ב') אז לפי א' הוכחנו ש- $A(2)$ נכון, ואז אם $A(2)$ נכון, אז לפי ב' $A(3)$ גם הוא נכון. ואז, באותו אופן, אם $A(3)$ נכון, אז לפי ב' $A(4)$ נכון, וכן הלאה.

נוכיח זאת לגבי המטבעות:

א. בסיס – אנו נדרשים להוכיח שניתן לשלם סכום של 2 ₪ בעזרת מטבעות של 3 ו- 2 ₪. ברור שזה נכון.

ב. צעד – אנו נדרשים להוכיח שבהינתן שניתן לשלם סכום של n ₪ בעזרת מטבעות של 3 ו- 2 ₪, אז ניתן לשלם סכום של $n+1$ ₪ בעזרת מטבעות של 3 ו- 2. בהתאם לכך, נניח, כעת, שאת הסכום של n ₪ ($n \geq 2$) ניתן לשלם בעזרת מטבעות של 3 ו- 2, ואז יהיה עלינו להוכיח שהדבר נכון גם עבור $n+1$. ההוכחה: אם כאשר שילמנו את n הש"ח השתמשנו במטבע של 3 נחליף אתו בשני מטבעות של 2 וכך קיבלנו סכום של $n+1$ ₪. אחרת, נחליף מטבע של 2 ₪ במטבע של 3 ₪. מ.ש.ל.

באופן כללי אם נרצה להראות שהטענה $A(n)$ נכונה לכל קבוצה של מספרים $\{n_0, n_0+1, n_0+2,...\}$, נוכל לעשות זאת ע"י ש:

א. נוכיח ש- $A(n_0)$ נכון. (בסיס)

ב. נוכיח שאם $A(n_0)$ נכון, אז $A(n_0+1)$ נכון. (צעד)

תרגול 1 (22/10/2007)

12. הוכח באינדוקציה ש- $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

13. נתון $X \sim \exp(\lambda)$. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי ואי-שלילי מתקיים $E(X^n) = \frac{n!}{\lambda^n}$.

14. הוכח באינדוקציה ש- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

15. שיעורי בית:

א. יש לפתור את התרגילים שלא עשינו בכיתה.

ב. יש לחזור על חומר הקורסים תורת ההתפלגויות ומבוא להסתברות. יש לפתור שאלות משיעורי הבית שניתנו בשנה שעברה בקורס בתורת ההתפלגויות. כל סטודנט יפתור שאלות בהתאם לטבלה שלהלן לפי הסמסטר בו למד. סטודנטים שלא השתתפו בקורסים יפנו למתרגל הקורס (מי שלא מספיק, יכול, את התרגילים המסומנים ב- *, להגיש יחד עם פתרונות תרגול 2):

תורת התפלגויות, תשס"ז 7/2006		
	סמסטר א'	סמסטר ב'
תרגיל	סעיף	סעיף
1		4,5
2	2,3	
4		2,6
5	2	*1
6	4	*3
7	*1	הכל*
9	*3	
10	הכל*	

חזרה על הקורסים זו הינה חיונית לשם הצלחה בבוחן הכניסה.