תרגול 2

פרק א-1: הגדרת תהליך סטוכסטי, זמן בדיד/רציף, מרחב מצבים.

תהליך סטוכסטי בזמן בדיד עם מרחב מצבים רציף

1. X_n הוא משתנה מקרי השווה למחיר המניה בסוף יום המסחר ה- n ($n = 1,2,...$). כלומר:

X_1 – הוא משתנה מקרי השווה למחיר המניה בסוף יום המסחר הראשון.
X_2 – הוא משתנה מקרי השווה למחיר המניה בסוף יום המסחר השני.
...
X_n – הוא משתנה מקרי השווה למחיר המניה בסוף יום המסחר ה- n.

קבוצת המשתנים המקריים האינסופית $\{X_1, X_2, ...\}$ נקראת "תהליך סטוכסטי". ניתן לקצר ולסמן קבוצה זו: $\{X_n, n \geq 1\}$.

א. צייר גרף, כך ש:

1) הציר האופקי יהיה ציר הזמן. נסמן את קבוצת כל הזמנים ב- T. קבוצה זו נקראת "**מרחב** הפרמטר". כלומר, $T = \{1,2,3,...\}$. שים לב שהציר הזמן הוא בדיד!

2) הציר האנכי יהיה טווח כל מחירי המניה האפשריים. נסמן את קבוצת כל מחירי המניה האפשריים ב- E (זוהי קבוצת כל הערכים האפשריים של המשתנה X_n). קבוצה זו נקראת "**מרחב** המצבים". שים לב שמרחב המצבים הוא רציף!

ב. תאר שתי ריאליזציות של התהליך על גרף. האחת אשר מתארת מניה אשר מחירה באופן כללי עולה, והשנייה אשר מתאר מניה אשר מחירה יורד עד אשר החברה פושטת רגל.

תהליך סטוכסטי בזמן רציף עם מרחב מצבים רציף

2. אם בדוגמא האחרונה עם המניות היינו בודקים את מחיר המניה בכל רגע ורגע במהלך יום המסחר ולא רק בסוף כל יום מסחר, אז היה מדובר בתהליך סטוכסטי בזמן רציף, עם מרחב מצבים רציף. עבור תהליך זה:

א. תאר את **קבוצת** המשתנים המקריים שמהווה את התהליך.

ב. תאר את **מרחב** הפרמטר.

ג. תאר את **מרחב** המצבים.

ד. תאר **ריאליזציה** לדוגמא של התהליך על גרף.

תרגול 2

תהליך סטוכסטי בזמן בדיד עם מרחב מצבים בדיד

3. ניזכר בשאלה מתרגול 1: "N_i הוא משתנה מקרי השווה למספר מאורעות הביטוח בקרב מבוטחי החברה בחודש ה- i מיום הקמתה. כעת, נניח ש- N_i הם שווי התפלגות ובלתי תלויים לכל i.
נסמן התפלגות זו ב- N. נתון N מתפלג פואסון עם עוצמה $\lambda = 3.4$."

האם מדובר בתהליך סטוכסטי (או דטרמיניסטי)? אם כן:

א. תאר את **קבוצת** המשתנים המקריים שמהווה את התהליך.

ב. תאר את **מרחב** הפרמטר.

ג. תאר את **מרחב** המצבים.

ד. תאר **ריאליזציה** לדוגמא של התהליך על גרף.

4. ניזכר בהמשך השאלה מתרגול 1: "בסוף כל חודש סמנכ"ל השיווק של החברה מקבל בונוס אם מספר מאורעות הביטוח בחודש החולף היה נמוך או שווה ל- 2" בכיתה ראינו ש:

$$X_i = \begin{cases} 0 & no \;\; bonus \;\; in \;\; month \;\; i \\ 1 & bonus \;\; in \;\; month \;\; i \end{cases}.$$

$$p = P(X_i = 1) = 1 - P(X_i = 0) = P(N \le 2) = \sum_{k=0}^{2} \frac{e^{-3.4}(3.4)^k}{k!} \;\; \Rightarrow \;\; X_i \overset{iid}{\sim} B(p).$$

האם מדובר בתהליך סטוכסטי (או דטרמיניסטי)? אם כן:

א. תאר את **קבוצת** המשתנים המקריים שמהווה את התהליך.

ב. תאר את **מרחב** הפרמטר.

ג. תאר את **מרחב** המצבים.

ד. תאר **ריאליזציה** לדוגמא של התהליך על גרף.

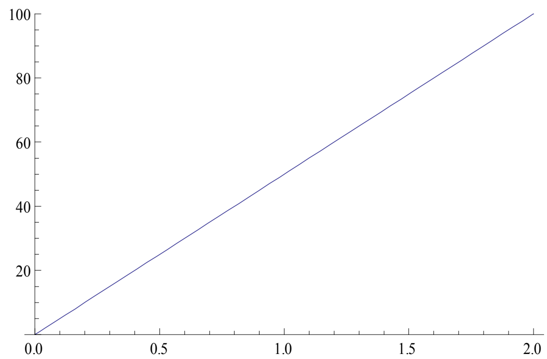
תרגול 2

<u>תהליך סטוכסטי בזמן רציף עם מרחב מצבים בדיד</u>

5. רכב יוצא מחיפה בזמן 0 ונוסע דרומה. נסמן ע"י $\{X_t, t \geq 0\}$ את מיקום הרכב בזמן t (מרחק מחיפה). נסמן ב- V את מהירות הרכב בקמ"ש. נניח שהמהירות היא קבועה לאורך כל הדרך וערכה שווה למשתנה מקרי המתפלג $V \sim Uniform(50,100)$.

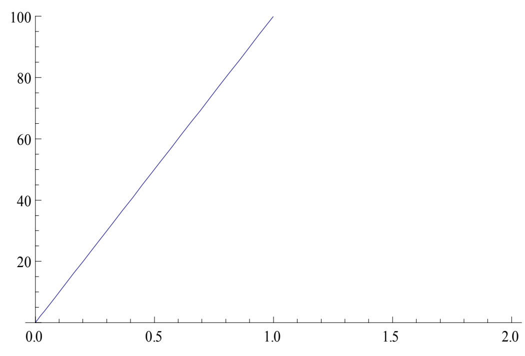
א. צייר את הריאליזציה של התהליך שבה הרכב נוסע במהירות הכי איטית. **<u>פתרון</u>**:

במצב האיטי ביותר הרכב במהירות $V = 50$ קמ"ש, כך שלדוגמא לאחר שעתיים הוא עובר $2 * 50 = 100$ ק"מ.



ב. צייר את הריאליזציה של התהליך שבה הרכב נוסע במהירות הכי מהירה. **<u>פתרון</u>**:

במצב המהיר ביותר הרכב במהירות $V = 100$ קמ"ש, כך שלדוגמא לאחר שעה הוא עובר $1 * 100 = 100$ ק"מ.



תרגול 2

ג. מהו הפילוג השולי של התהליך בזמן t? **פתרון**: מיקום הרכב לאחר t יחידות זמן הוא הזמן שעבר כפול המהירות. מכאן:

$$P(X_t \le x) = P(tV \le x) = P(V \le \frac{x}{t}) = \begin{cases} 0 & \frac{x}{t} < 50 \\ \frac{\frac{x}{t} - 50}{100 - 50} & 50 \le \frac{x}{t} \le 100 \\ 0 & 100 < \frac{x}{t} \end{cases} = \begin{cases} 0 & x < 50t \\ \frac{x - 50t}{100t - 50t} & 50t \le x \le 100t \\ 0 & 100t < x \end{cases}$$

אם כך רואים שבזמן t מיקום הרכב מתפלג $X_t \sim Uniform(50t, 100t)$

ד. מהו פילוג זמן הגעת הרכב למרחק מסוים מחיפה.

ה. צייר את פונקציית התוחלת של התהליך.

פרק א-3: הסתברות מותנית, התפלגות מותנית, תוחלת מותנית.

1. ההסתברות המשותפת של X ו- Y היא $P_{X,Y}(x,y)$, נתונה ע"י:

$P_{X,Y}(3,1)=1/9$	$P_{X,Y}(2,1)=1/3$	$P_{X,Y}(1,1)=1/9$
$P_{X,Y}(3,2)=1/18$	$P_{X,Y}(2,2)=0$	$P_{X,Y}(1,2)=1/9$
$P_{X,Y}(3,3)=1/9$	$P_{X,Y}(2,3)=1/6$	$P_{X,Y}(1,3)=0$

א. חשב את הפילוג של Y. **<u>פתרון</u>**: (באופן כללי: $P_Y(y)=\sum_{x=1}^{3}P_{X,Y}(x,y)$):

$$P_Y(y)=\begin{cases} P_Y(1)=\sum_{x=1}^{3}P_{X,Y}(x,1)=\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{10}{18} & ,Y=1 \\ P_Y(2)=\sum_{x=1}^{3}P_{X,Y}(x,2)=\frac{1}{9}+0+\frac{1}{18}=\frac{3}{18} & ,Y=2 \\ P_Y(3)=\sum_{x=1}^{3}P_{X,Y}(x,3)=0+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18} & ,Y=3 \\ 0 & \text{,אחרת} \end{cases}$$

ב. חשב את הפילוג של $X|Y=1$. **<u>פתרון</u>**:

$$P_{X|Y}(x|1)=\begin{cases} P_{X|Y}(1|1)=\frac{P_{X,Y}(1,1)}{P_Y(1)}=\frac{1}{9}\left(\frac{10}{18}\right)^{-1}=\frac{18}{90} & ,X=1 \\ P_{X|Y}(2|1)=\frac{P_{X,Y}(2,1)}{P_Y(1)}=\frac{1}{3}\left(\frac{10}{18}\right)^{-1}=\frac{54}{90} & ,X=2 \\ P_{X|Y}(3|1)=\frac{P_{X,Y}(3,1)}{P_Y(1)}=\frac{1}{9}\left(\frac{10}{18}\right)^{-1}=\frac{18}{90} & ,X=3 \\ 0 & \text{,אחרת} \end{cases}$$

ג. חשב: $E[X|Y=i]$ עבור $i=1,2,3$. **<u>פתרון</u>**:

$$E[X|Y=1]=\sum_{x=1}^{3}x\cdot P_{X|Y}(x|1)=1\cdot\left(\frac{18}{90}\right)+2\cdot\left(\frac{54}{90}\right)+3\cdot\left(\frac{18}{90}\right)=2$$

$$E[X|Y=2]=5/3$$

$$E[X|Y=3]=12/5$$

תרגול 2

ד. שים לב ש- $E[X|Y]$ הוא משתנה מקרי. מהו הפילוג של $E[X|Y]$? **פתרון**:

$$P_{E[X|Y]}(t)=\begin{cases} P_{E[X|Y]}(2)=P_Y(1)=\frac{10}{18} & ,E[X|Y=1]=2 \\ P_{E[X|Y]}(5/3)=P_Y(2)=\frac{3}{18} & ,E[X|Y=2]=5/3 \\ P_{E[X|Y]}(12/5)=P_Y(3)=\frac{5}{18} & ,E[X|Y=3]=12/5 \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ה. חשב את התוחלת של $E[X|Y]$. **פתרון**: נרצה לחשב את $E[E[X|Y]]$. נעשה זאת באופן הבא:

$$E[E[X|Y]]=\sum_{t\in\{2,5/3,12/5\}}E[X|Y]P_{E[X|Y]}(t)\overset{(*)}{=}\sum_{y=1}^{3}E[X|Y=y]P_Y(y)$$

$$=\sum_{y=1}^{3}\left(\sum_{x=1}^{3}xP_{X|Y}(x|y)\right)P_Y(y)=\sum_{y=1}^{3}\sum_{x=1}^{3}xP_{X,Y}(x,y)$$

$$=\sum_{x=1}^{3}x\sum_{y=1}^{3}P_{X,Y}(x,y)=\sum_{x=1}^{3}xP_X(x)=E(X)$$

מסקנה: באופן כללי קיבלנו ש: $E[E[X|Y]]=E[X]$. ע"מ לזכור את סדר חישוב התוחלות לעיתים נוח לרשום: $E_Y[E_X[X|Y]]=E[X]$.

ו. האם X ו- Y הם תלויים? **פתרון**: כן.

2. ההסתברות המשותפת של X, Y ו- Z היא $P_{X,Y,Z}(x,y,z)$, נתונה ע"י:

$P_{X,Y,Z}(2,1,1)=1/4$ $\quad$ $P_{X,Y,Z}(1,1,1)=1/8$

$P_{X,Y,Z}(2,1,2)=3/16$ $\quad$ $P_{X,Y,Z}(1,1,2)=1/8$

$P_{X,Y,Z}(2,2,1)=0$ $\quad$ $P_{X,Y,Z}(1,2,1)=1/16$

$P_{X,Y,Z}(2,2,2)=1/4$ $\quad$ $P_{X,Y,Z}(1,2,2)=0$

חשב את: $E[X|Y=2]$, $E[X|Y=2,Z=1]$.

תרגול 2

3. עכבר נמצא במרכז מבוך. מהמרכז ניתן לבחור להמשיך באחד משני כיוונים. אם הוא פונה ימינה, אז הוא ישוטט במבוך 3 דקות ויחזור למרכז המבוך. אם הוא יפנה שמאלה, אז בהסתברות 1/3 הוא יצא מהמבוך לאחר 2 דקות של שוטטות, או יחזור חזרה למרכז המבוך בהסתברות 2/3 לאחר 5 דקות של שוטטות. בהנחה שהסיכוי שהעכבר יבחר לפנות ימינה שווה לסיכוי שיבחר לפנות שמאלה, מה תוחלת הזמן עד שיחלץ מהמבוך?

4. כורה לכוד במכרה בתוך תא עם 3 דלתות: האחת נפתחת למנהרה שדרכה הכורה נחלץ מן המכרה לאחר הליכה של 3 שעות, השנייה נפתחת למנהרה המחזירה אותו חזרה לתא לאחר 5 שעות הליכה, והשלישית נפתחת למנהרה המחזירה אותו לאחר הליכה של 7 שעות חזרה לתא. אם נניח שבכל פעם הכורה בוחר באקראי אחת משלוש הדלתות (כלומר, ייתכן שהוא ישוב ויבחר בדלת שכבר בחר בה קודם לכן), מהי תוחלת משך הזמן שיעבור עד צאתו מן המכרה?

5. אסיר כלוא בתא עם 3 דלתות. הדלת הראשונה מובילה למנהרה שמחזירה אותו לתא לאחר יומיים. השנייה מובילה למנהרה שמחזירה אותו לאחר 3 ימים. השלישית מובילה אותו מיידית לחופש:

   1) בהנחה שהאסיר יבחר תמיד בדלתות 1, 2 ו- 3 עם הסתברות 0.5, 0.3 ו- 0.2 בהתאמה, מה מספר הימים שיעברו עד שיצא לחופש? (ייתכן שהוא ישוב ויבחר בדלת שכבר בחר בה קודם לכן.)

   2) בהנחה שהאסיר בוחר אקראית באחת מ- 3 הדלתות, מה תוחלת מספר הימים שיעברו עד שיצא לחופש? בגרסה זו של השאלה לא יתכן שהאסיר יבחר שוב בדלת שכבר בחר. לדוגמא, אם האסיר תחילה יבחר בדלת 1, אז כאשר יחזור לתא, הוא יזכור שדלת 1 מובילה חזרה לתא ולכן יבחר אקראית רק מדלתות 2 ו- 3.

תרגול 2

פרק א-4: דוגמאות לשימוש בהתניה.

תוחלת סכום אקראי

1. ניזכר בשאלה מתרגול 1: "N_i הוא משתנה מקרי השווה למספר מאורעות הביטוח בקרב מבוטחי החברה בחודש ה- i מיום הקמתה. כעת, נניח ש- N_i הם שווי התפלגות לכל i. נסמן התפלגות זו ב- N. נתון N מתפלג פואסון עם עוצמה $\lambda = 3.4$." "Y_j הוא משתנה מקרי השווה לגובה ההטבה שמשלמת חברת הביטוח למבוטח ה- j מתחילת החודש. כעת, נניח ש- Y_j הם שווי התפלגות לכל j. נסמן התפלגות זו ב- Y. נתון ש- $Y \sim Uniform(0,20)$. מצא את תוחלת סך ההטבות שמשלמת חברת הביטוח בחודש. בין אילו משתנים מקריים נדרש שתתקיים אי-תלות לשם חישוב התוחלת?
2. ילד משחק במכשיר ליצור בועות. בכל נשיפה של הילד נוצרות N בועות כאשר $P(N=k)=(1-P)^k p \quad k=0,1,2,...$. משך הזמן שכל בועה שורדת (עד אשר היא מתפוצצת) הוא מ"מ $\exp(\lambda)$. בלתי תלוי בשאר הבועות ובלתי תלוי במספר הבועות. הנח שכל הבועות נוצרות באותו רגע בדיוק. מהי תוחלת מס' הבועות אשר עדיין לא התפוצצו בזמן 3 שניות לאחר יצור הבועות? רמז: השתמש בתוחלת סכום אקראי.
3. נניח שמספר האנשים הנכנסים לחנות כל-בו ביום מסוים הוא משתנה מקרי שתוחלתו 50. נניח עוד, שסכומי הכסף, שלקוחות אלו משלמים לחנות זו ביום אחד, הם משתנים מקריים בלתי תלויים שהתוחלת של כל אחד מהם היא 8 ₪, ושסכום שלקוח משלם אינו תלוי גם במספר הכולל של לקוחות הנכנסים לחנות. מהי תוחלת סכום הכסף שהלקוחות שילמו בחנות ביום זה (הפדיון)?
4. מספר התביעות נגד חברת ביטוח מצד המבוטחים בשבוע הוא משתנה מקרי עם תוחלת μ_1 ושונות σ_1^2. הסכום שמשלמת חברת הביטוח למבוטח בגין התביעה הוא משתנה מקרי עם תוחלת μ_2 ושונות σ_2^2. מצא את תוחלת הסכום שמשלמת חברת הביטוח כל שבוע. אילו הנחות אתה אי-תלות אתה עושה? האם ההנחות סבירות?