תרגול 3

# פרקים א-5, א-6: תהליכי ברנולי

1. פריטים היוצאים מקו ייצור נבדקים בדיקה שגרתית. ההסתברות למוצר פגום היא 0.05. נסמן:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{המוצר ה} - n \text{ פגום} \\ 1 & \text{המוצר ה} - n \text{ תקין} \end{cases}$$

ידוע שפגם במוצר מסוים שיוצא מקו היצור אינו תלוי בפגם במוצרים האחרים.

א. חשב את ההסתברות ששלושת הפריטים הראשונים שהוצאו הם תקינים.

ב. ידוע שהפריט הראשון שנדבק תקין ושהשני שנבדק פגום. מהי ההסתברות שהפריט השלישי שנבדק פגום?

ג. חשב: $P(X_{26} = 0 | X_3 = 1, X_5 = 1, X_{20} = 0)$.

2. שמוליק מטיל פעם אחר פעם מטבע אשר הסיכוי לקבל בו עץ הוא $0 \le p \le 1$. $N_n$ הוא משתנה מקרי השווה למספר הפעמים ששמוליק קיבל "עץ" ב- $n$ ההטלות הראשונות. חשב את הביטויים הבאים (עליך להסבר את שלבי החישוב – ציין מתי ישנו שימוש ב"שקילות בין מאורעות", "תכונת אינקרימנטים בלתי תלויים של התהליך", ו"תכונות אינקרימנטים סטציונרים של התהליך"):

א. $P(N_5 = 3)$.

ב. $P(N_8 - N_3 = 3)$.

ג. $P(N_8 = 4 | N_4 = 1)$.

ד. $P(N_6 = 3, N_{10} = 2)$.

ה. $P(N_6 = 3, N_{10} = 5)$.

ו. $P(N_5 = 1, N_8 = 3, N_{17} = 8)$.

ז. $E(N_6 N_{10})$ (יש לחשב בשתי דרכים).

ח. $E(N_{10} | N_6)$ (שימו לב, שביטוי זה הוא משתנה מקרי - פונקציה של המשתנה המקרי $N_6$).

ט. $P(N3 = 2 | N10 = 6)$

תרגול 3

3. שמוליק מטיל מטבע פעם אחר פעם. $T_k$ הוא משתנה מקרי השווה למספר הפעמים ששמוליק הטיל את המטבע עד שקיבל "עץ" בפעם ה- $k$ (מס' הניסיונות עד ההצלחה ה- $k$). חשב:

א. $P(T_1 = 3, T_5 = 9, T_7 = 17)$.

ב. נתון ש- $T_1 = 3$ , $T_2 = 12$ , $T_3 = 14$. חשב: $E(T_5 | T_1, T_2, T_3)$.

4. גד מהמר במשחק רולטה. ההסתברות שיזכה בסיבוב כלשהו היא $p_1$.

א. מהי ההסתברות שיעברו לפחות 6 סיבובים עד שיזכה בפעם הראשונה.

ב. מהי ההסתברות שמתוך 10 סיבובים יזכה ב- 2 סיבובים.

ג. דן משחק ברולטה אחרת. הסיכוי שיזכה בסיבוב כלשהו הוא $p_2$. דן התחיל לשחק לאחר שגד הימר כבר בשלושה סיבובים. מה ההסתברות שהזכייה הקרובה תהיה של גד?

5. בצומת מסויימת ידוע כי 62% מהמכוניות פונות שמאלה והשאר ימינה. נגדיר:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{המכונית ה} - n \text{ פונה ימינה} \\ 1 & \text{המכונית ה} - n \text{ פונה שמאלה} \end{cases}$$

א. הצג את התהליך הנ"ל כתהליך ברנולי.

ב. חשב את ההסתברויות הבאות:

1) המכונית הראשונה, השמינית והמאתיים פנו ימינה.

2) המכונית העשירית פונה ימינה, כאשר ידוע שהמכונית השלישית והשביעית פנו שמאלה.

ג. $N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. הסבר במילים את משמעות המשתנה המקרי $N_n$ וחשב:

1) $P(N_1 = 0, N_2 = 0, N_3 = 1, N_4 = 1)$.

2) $P(N_8 = 2, N_{15} = 5, N_7 = 1, N_5 = 1)$.

3) $P(N_1 = 1, N_3 = 2, N_5 = 2)$.

4) $P(N_{15} = 12, N_8 = 6)$.

5) $P(N_{15} = 12 | N_8 = 6)$.

<u>תרגול 3</u>

6. יהי $\{X_n, n \ge 1\}$ תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך ברנולי" עם סיכוי $p = 0.8$ להצלחה. לכן, $\left\{N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \ge 0\right\}$ הוא תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך ספירה ברנולי", שבו $N_n$ שווה למספר ההצלחות ב- $n$ הניסויים הראשונים (לפי הגדרה $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$). חשב:

א. $E(N_3)$.

ב. $E(N_3 + 4N_7)$.

ג. $E(N_7 | N_3)$.

ד. $E(N_3 N_7)$ (יש לחשב בשתי דרכים).

ה. $E(X_n N_n)$.

ו. $V(N_7)$.

ז. $V(N_7 - N_3)$.

7. יהי $\{X_n, n \ge 1\}$ "תהליך ברנולי" עם סיכוי $p = 0.8$ להצלחה. ידוע שחמשת הניסויים הראשונים הסתיימו ב: $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0, X_4 = 1, X_5 = 1$.

א. חשב: $E(N_3 + 2N_7)$. כאשר, $N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

ב. מה הערך של: $T_1, T_2, T_3$. כאשר, $T_k$ שווה למס' הניסיונות עד ההצלחה ה- $k$.

8. $\{X_n, n \ge 1\}$ הוא "תהליך ברנולי" עם סיכוי $p$ להצלחה. $N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ שווה למספר ההצלחות ב- $n$ הניסויים הראשונים. הוכח כי: $E(N_{n+m} | N_n) = N_n + mp$.

תרגול 3

9. יהי $\{X_n, n \geq 1\}$ תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך ברנולי" עם סיכוי $p$ להצלחה. $\{T_k, k \geq 1\}$ הוא תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך זמני ההצלחה ברנולי", שבו $T_k$ שווה למספר הניסויים עד ההצלחה ה- $k$. חשב:

א. $P(T_4 - T_3 = 12)$.

ב. $P(T_1 = 2, T_2 = 5, T_3 = 8)$.

ג. $P(T_3 = 9 | T_1 = 5, T_2 = 6)$.

ד. $E(T_4 - T_3)$.

10. בקזינו הסיכוי לזכיה ברולטה כאשר מהמרים על צבע הוא $p$. אדם נכנס לקזינו ומהמר על צבע.

א. מה ההסתברות שלאחר 5 משחקים הוא זכה ב- 3 משחקים, אם ידוע שלאחר 3 משחקים הוא זכה ב- 2 משחקים ולאחר 8 משחקים הוא זכה ב- 5 משחקים.

ב. מה הסתברות ששיחק 5 משחקים עד לזכיה ה- 3, אם ידוע ששיחק 3 משחקים עד לזכיה השנייה ו- 8 משחקים עד לזכיה הרביעית.

ג. ידוע שב- 5 המשחקים הראשונים זכה 3 פעמים. מהי תוחלת מספר הזכיות ב- 3 המשחקים הראשונים.

11. בחור צעיר ובעל נרגז יוצאים לדו-קרב. לכל אחד מהם אספקה גדולה של תחמושת. שניהם יורים בכל פעם בו זמנית אחד לעבר השני. בכל סיבוב ההסתברות שהבחור הצעיר יהרוג את הבעל היא $p_1$. ההסתברות שהבעל יהרוג את הצעיר היא $p_2$. (יתכן ששניהם יהרגו בסיבוב אחד.) נסיונות הירי ב"ת אחד בשני.

א. מצא את ההסתברות שדו הקרב יגמר בסיבוב ה- 13.

ב. מצא את ההסתברות שהצעיר ישאר בחיים.

ג. מצא את ההסתברות שהדו-קרב יסתיים בדיוק בסיבוב ה- 13 ושהצעיר ישאר בחיים.

## תרגול 3

12. ההסתברות שנהג יעצור כדי לקחת טרמפיסט היא 0.04. החלטת כל נהג האם לעצור בלתי תלויה בהחלטת נהג אחר. נתון ש- 30 מכוניות חלפו את טרמפיסט מבלי לעצור. מה ההסתברות שהמכונית ה- 37 או לפניה תיקח את הטרמפיסט.

13. לשם הערכת תדירות התנועה העוברת דרך נקודה מסוימת על פני כביש ראשי, שאינו הומה במיוחד, נניח את המודל הבא. נחלק את ציר הזמן לאינטרוולים בעלי אורך של שנייה אחת, ונסמן:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{רכב לא חצה את הנקודה המסויימת בשנייה ה} - n \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

נניח שתדירות התנועה היא כזו ש:

א. מספרי כלי הרכב שעוברים בכל שתי שניות שונות הם בלתי תלויים.

ב. הסיכוי שתעבורנה 2 מכוניות באותה שנייה הוא זניח.

נסמן:

$N_n$ - מספר המכוניות שעברו את הנקודה המסוימת עד (כולל) השנייה ה- $n$.

$T_k$ - השנייה בה עברה המכונית ה- $k$.

אם נתון שקצב החצייה של המכוניות את הנקודה הוא 4 מכוניות לדקה.

א. חשב:

1) $P(X_n = 1)$.

2) ההסתברות שבין המכוניות השלישית לרביעית עברו 12 שניות.

3) $E(T_4 - T_3)$.

4) $E(T_{13} - T_3)$.

תרגול 3

ג. בהמשך לשאלה 12 נניח שתהליך הגעת המכוניות לנקודה שבה עומד הטרמפיסט הוא כמתואר בשאלה 13. הצלחה עבור הטרמפיסט מתרחשת בזמן $n$ כאשר מגיעה מכונית וגם המכונית עוצרת לקחת את הטרמפיסט. $T$ שווה לזמן בשניות עד שלבסוף הטרמפיסט נוסע.

1) מהי התפלגות $T$.

2) חשב $V(T)$, $E(T)$.

3) נתון שאחרי 5 דקות עברו 20 מכוניות ואילו הטרמפיסט עדיין מחכה. חשב את תוחלת זמן הנוסף שעל הטרמפיסט להמתין עד שייקחו אותו.

14. יהי $\left\{X_n, n \geq 1\right\}$ תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך ברנולי" עם סיכוי $p$ להצלחה. $\left\{N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i, n \geq 0\right\}$ הוא תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך ספירה ברנולי", שבו $N_n$ שווה למספר ההצלחות ב- $n$ הניסויים הראשונים (לפי הגדרה $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$). $\left\{T_k, k \geq 1\right\}$ הוא תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך זמני ההצלחה ברנולי", שבו $T_k$ שווה למספר הניסויים עד ההצלחה ה-$k$. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים ציינו נכון/לא נכון:

א. המשתנים המקריים הבאים $N_2$ ו- $N_8$ הינם בלתי תלויים.

ב. הפילוג של המשתנה המקרי $N_2 + N_8$ הוא כמו הפילוג של $N_{10}$.

ג. הפילוג של המשתנה המקרי $N_2 + (N_{28} - N_{20})$ הוא כמו הפילוג של $N_{10}$.

ד. היחס הבא מתקיים: $\{N_n \geq k\} \Leftrightarrow \{T_k \leq n\}$.

ה. היחס הבא מתקיים: $\{N_n > k\} \Leftrightarrow \{T_k < n\}$.

ו. היחס הבא מתקיים: $\{T_k = n\} \Leftrightarrow \{N_{n-1} = k-1, X_n = 1\}$.

ז. פונקציות מסת ההסתברות של $T_k$ היא הקונבולוציה, k פעמים של פונקציות מסת ההסתברות של משתנה מקרי גיאומטרי סופר ניסיונות.

## תרגול 3

15. נניח שבסוף כל שנה משולם תשלום בגובה 1 ₪ בסיכוי $0 \le p \le 1$. נסמן:

$$X_n = \begin{cases} 0 & \text{לא שולם תשלום בשנה ה}-n \\ 1 & \text{כן שולם תשלום בשנה ה}-n \end{cases}$$

התהליך $\{X_n, n \ge 1\}$ הוא "תהליך ברנולי" עם סיכוי $0 \le p \le 1$ להצלחה. $\{T_k, k \ge 1\}$ הוא "תהליך זמני הצלחה ברנולי", שבו $T_k$ שווה למספר השנים שעברו עד ששולם התשלום ה- $k$. נרצה לחשב את שווי סך כל התשלומים בזמן 0. את הריבית שנתית הקבועה נסמן $i$. את מקדם ההיוון השנתי נסמן $v = \dfrac{1}{1+i}$. שווי התשלומים בזמן 0 הוא המשתנה המקרי הבא: $\sum_{k=0}^{\infty} v^{T_k}$. חשב את $E\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^{T_k}\right]$. (ניתן לפתור שאלה זו ללא רקע פיננסי. נדרש לחשב את תוחלת של סכום של הקבוע $v$ בחזקת המשתנה המקרי $T_k$. כלומר, נדרש לחשב את $E\left[\sum_{k=0}^{\infty} v^{T_k}\right]$. רמז: יש להציב בנוסחה $T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + \ldots + (T_k - T_{k-1})$.)

16. צור בתוכנת אקסל 100 התחלות של ריאליזציות של תהליך ספירה ברנולי עם פרמטר $p = .3$. אמוד את פונקצית השונות של התהליך וצייר את האמד שלך. (רמז: בשביל לייצר מ"מ ברנולי השתמש בנוסחה: $= if(rand(\ ) < 0.4,1,0)$).

17. $\{N_n, n \ge 0\}$ הוא תהליך סטוכסטי מסוג "תהליך ספירה ברנולי", שבו $N_n$ שווה למספר ההצלחות ב- $n$ הניסויים הראשונים. מה הפילוג של $N_m \mid N_n$ כאשר $m < n$?