תרגול 4

פרק ב-1, ב-2 וב-3: שרשרת מרקוב (זמן בדיד) ונוסחאות צ׳פמן קולמוגורוב.

1. שאלות כן/לא.

א. בשרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ המשתנים המקריים X_9 ו X_{13} הינם בהכרח בלתי תלויים.

ב. העמודות של מטריצת המעבר של שרשרת מרקוב מסתכמות ל 1.

ג. תהליך ספירה ברנולי הוא שרשרת מרקוב.

ד. תהליך זמני הצלחה ברנולי הוא שרשרת מרקוב.

2. גרשון נוהג לאכול מדי יום שניצל או דג. בחירתו כל יום תלויה אך ורק במה שאכל ביום האתמול. הסיכוי שיאכל מחר שניצל אם היום אכל דג הוא a. הסיכוי שיאכל מחר שניצל אם היום אכל שניצל הוא b. X_n מנת החלבון היומית של גרשון ביום ה- n. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

3. כד מכיל 2 כדורים בקומבינציה לא ידועה של שחור או לבן, בכל צעד מוציאים באקראי כדור אחד. אם הכדור שהוצא שחור, הוא נצבע בלבן ומוחזר לכד. אם הכדור שהוצא לבן, מטילים מטבע הוגן. אם יצא H הוא נצבע בשחור ומוחזר לכד. אם יצא T הוא מוחזר לכד כפי שהוא. X_n שווה למספר הכדורים השחורים בכד בזמן n. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

4. כיפה אדומה והזאב משחקים משחק קלפים. במשחק ארבעה קלפים הממוספרים 1, 2, 3, 4. בשלב הראשון הקלפים מחולקים באקראי בין כיפה אדומה לזאב (לא בהכרח בשווה). בשלב השני נבחר באקראי מספר בין 1 ל-4. השחקן שמחזיק את הקלף שמספרו נבחר מעביר את הקלף לשחקן האחר. בשלב השלישי ובכל השלבים שלאחר מכן חוזרים שוב על השלב השני. X_n הוא מספר הקלפים שבידי כיפה אדומה לאחר השלב ה-n. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

5. לסמי 2 מטבעות, מטבע אוסטרלי שנופל על H בהסתברות 0.7 ומטבע נמיבי שנופל על H בהסתברות 0.6. הוא המציא משחק החוזר חלילה. אם המטבע שהטיל היום נפל על H

תרגול 4

מחר יטיל את המטבע האוסטרלי,אם נפל על T מחר יטיל את מטבע 2. היום, יום ראשון, בחר סמי באופן אקראי מטבע להתחיל אתו את משחקו החדש. מהי ההסתברות שהמטבע שיטיל ביום השלישי יהיה המטבע האוסטרלי?

6. בכד הלבן 3 כדורים לבנים ובכד השחור 3 כדורים שחורים, בכל צעד מוציאים בבת אחת משני הכדים כדור אחד ומחליפים ביניהם. X_n שווה למספר הכדורים הלבנים בכד הלבן. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

7. נתונה מטריצת הסתברויות מעבר:
$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.75 & ? & 0.00 \\ 0.25 & 0.50 & ? \\ 0 & 0.75 & ? \end{pmatrix} \end{array}.$$

א. השלם את המטריצה וחשב:

1) $P(X_1 = 1 | X_0 = 0)$.

2) $P(X_2 = 0, X_1 = 1 | X_0 = 2)$.

ב. נתון ש: $P(X_0 = i) = 1/3$ עבור $i = 0,1,2$ חשב:

1) $P(X_1 = 1)$.

2) $P(X_2 = 1)$.

3) $P(X_3 = 0 | X_1 = 1)$.

4) $P(X_5 = 1, X_3 = 0 | X_2 = 1)$.

5) $P(X_3 = 2 | X_1 = 2, X_4 = 1)$.

6) $P(X_3 = 2)$

7) $E[X_3]$

8) $P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_0 = 1)$

8. בכיכר המדינה 3 בוטיקים יוקרתיים – "ציפה","ציפה-דריפה" ו"ציפה-דריפה-ימפמפוני". גברת "שאנל" יוצאת למסע שופינג אחת לשבוע. אם היא מרוצה מהיחס שקיבלה, תחזור לבוטיק ממנו

תרגול 4

קנתה בהסתברות 0.6 ובהסתברות 0.4 תלך לבוטיק אחר. אם היא לא מרוצה תעבור לבוטיק הבא לפי הסדר: ציפה –> ציפה-דריפה –> ציפה-דריפה-ימפמפוני. הסיכוי שתהיה מרוצה מציפה הוא 0.3, מציפה-דריפה הוא 0.4 ומציפה-דריפה-ימפמפוני הוא 0.5. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

9. למהמר i שקלים. מטרתו להגיע לסכום של 8 שקלים. בכל צעד יהמר על הסכום הנמצא בידיו או על הסכום הדרוש כדי להגיע ל 8 שקלים. למשל, אם בידיו 3 שקלים יהמר על כל הסכום. אם בידיו 5 שקלים יהמר רק על 3 שקלים. המשחק נגמר כאשר הוא מפסיד את כל כספו או צובר 8 שקלים. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

10. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array}$$

א. חשב:

1) $P(X_1 = 2 | X_0 = 3)$.

2) $P(X_1 = 3 | X_0 = 2)$.

3) $P(X_2 = 0, X_3 = 2, X_4 = 2 | X_0 = 3, X = 1)$.

4) $P(X_2 = 1 | X_0 = 3, X_1 = 2, X_3 = 0)$.

5) $P(X_3 = 2 | X_1 = 2, X_4 = 1)$.

6) $P(X_3 = 2, X_2 = 1, X_0 = 1)$

ב. נתון וקטור ההסתברויות התחלתי: $P(X_0 = i) = 0.25$ חשב:

1) $P(X_1 = 3)$.

2) $P(X_1 = 0, X_2 = 2)$.

ג. חזור על סעיף ב' כאשר $X_0 \sim Bin(4, 1/2)$.

תרגול 4

11. מטילים קובייה הוגנת פעם אחר פעם. יהי X_n סכום הספרות שעל הקוביות שנזרקו עד ההטלה ה- n. יהי Z_n השארית המתקבלת ע"י חלוקת X_n ב-7. למשל, אם $X_n = 9$, אזי $Z_n = 2$. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר. האם Z_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

12. בידי עוזי 4 שקלים ובידי גיא 2 שקלים. הם משחקים את המשחק הבא. בכל סיבוב זורק כל אחד מהם קוביה הוגנת, השחקן שתוצאת הקובייה שלו גבוהה יותר זוכה בשקל מחברו. אם תוצאות הזריקות שלהם שוות לא זוכה אף אחד. המשחק נגמר כאשר אחד מהם זוכה בכל הכסף. נגדיר X_n. הסכום שבידי עוזי בסוף הסיבוב ה- n. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

13. בשווקים בישראל פועלות 3 חברות גדולות לשיווק מוצרי חלב: א', ב', וג'. בסקר צרכנות התגלו הממצאים הבאים – צרכן הקונה מוצר ומרוצה חוזר ורוכש את המוצר של החברה ממנה היה מרוצה. במידה והלקוח אינו מרוצה יפעל באופן הבא יפעל כדלהלן. אם אינו מרוצה ממוצר א' (בסיכוי 0.6), ירכוש מוצר של חברה אחרת בהסתברויות שוות. אם אינו מרוצה ממוצר ב' (בסיכוי 0.5), ירכוש את מוצר חברה א' בסיכוי 0.6 או את מוצר חברה ג' בסיכוי 0.4. אם אינו מרוצה ממוצר ג' (בסיכוי 0.55), ירכוש את מוצר חברה א' בסיכוי 0.7 או את מוצר חברה ב' בסיכוי 0.3. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

14. במחסן החנות יש מקום ל-2 יחידות, בכל שבוע מסופקות יחידות מהמחסן לחנות על-מנת למלא ביקוש למוצר. הביקוש למוצר הוא בעל ההסתברויות הבאות והוא תמיד מפולג כך, באופן ב"ת בשבועות קודמים. D_n שווה למספר היחידות המבוקשות ביום ה- n. $D_n = \begin{cases} 0.5 & 0 \\ 0.25 & 1 \\ 0.25 & 2 \end{cases}$. במהלך השבוע ניתן לענות על ביקושים כמספר היחידות במחסן.בסוף השבוע אם המחסן ריק,מזמינים למחסן 2 יחידות המגיעות רק כעבור 7 ימים. (במהלך השבוע המחסן נשאר ריק.) האם D_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

תרגול 4

15. נניח שמצב מזג האוויר תלוי במזג האוויר ביומיים האחרונים. אם היה גשום יומיים רצוף, יהיה גשום מחר בהסתברות 0.7. אם היה גשום היום אבל אתמול לא, יהיה גשום מחר בהסתברות בהיסתברות 0.5. אם היה גשום אתמול אבל היום לא,יהיה גשום מחר בהסתברות 0.4. אם לא היה גשום ביומיים האחרונים, יהיה גשום מחר בהסתברות 0.2. נגדיר X_n מזג האויר ביום ה- n. הגדר את מרחב המצבים והצג מטריצת הסתברויות מעבר כך שמצב מזג האוויר ישקף תהליך מרקובי.

16. במטבח 4 אפרסקים ו- 6 משמשים המחולקים באקראי בין 2 קערות, 5 פירות בכל קערה. בכל שלב מוציאים באקראי פרי אחד מכל קערה ומניחים אותו בקערה השנייה. כלומר, החלפה בו-זמנית של פרי מהקערה הראשונה עם פרי מהקערה השנייה. נגדיר X_n מספר האפרסקים בקערה הראשונה אחרי ההוצאה ה- n. האם X_n שרשרת מרקוב? הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

17. בחדר במרכז הגמילה "קרחנה בראש" 2 מטופלים. בכל בוקר הרופא מבקר בחדר ובודק מטופל אחד בלבד. מטופל שנגמל ישוחרר לביתו בהסתברות 0.2. אחה"צ, אם החדר אינו מלא, ייכנס אליו מטופל חדש בהסתברות 0.4. נגדיר X_n מספר החולים בחדר בסוף היום ה- n. הגדר את מרחב המצבים והצג את מטריצת הסתברויות המעבר. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר. נתון שביום שלישי החדר ריק. מהי ההסתברות שהחדר יהיה ריק גם ביום חמישי.

18. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{3}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix} \end{array}.$$

א. חשב:

1) $P(X_1 = 3 | X_0 = 1)$.

2) $P(X_1 = 3 | X_0 = 3)$.

תרגול 4

3) $P(X_1=2 \mid X_0=3)$.

4) $P(X_2=1, X_3=2, X_4=2 \mid X_0=2, X=1)$.

5) $P(X_2=1 \mid X_0=2, X_1=3, X_3=2)$.

6) $P(X_3=2 \mid X_1=1, X_4=2)$.

7) $E[X_2 \mid X_0=2]$.

ב. נתון וקטור ההסתברות התחלתי: $P(X_0=i)=0.25$ חשב: $P(X_1=1, X_2=2)$.

19. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

$$\begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4 \\ 1 & 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.4 \\ 2 & 0.3 & 0.2 & 0.15 & 0.35 \\ 3 & 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{array}$$

. חשב:

א. $P(X_1=0 \mid X_0=3)$.

ב. $P(X_6=3 \mid X_5=2)$.

ג. $P(X_1=2 \mid X_0=3)$.

ד. $P(X_3=2, X_4=3, X_5=1 \mid X_1=3, X_2=1)$.

ה. $P(X_5=1 \mid X_2=3, X_4=3, X_6=0)$.

ו. $P(X_2=3 \mid X_1=1, X_4=1)$.

ז. נתון וקטור ההסתברויות התחלתי: $P(X_0=i)=0.25$ עבור $i=1,2,3,4$ חשב:

1) $P(X_1=1, X_2=3)$.

2) $P(X_1=0, X_2=2)$.

20. הביקוש למוצר מסוים במשך השבוע הוא מ"מ Y המקבל את הערכים 0,1,2 בהסתברויות שוות.
בסוף כל שבוע נבדקת רמת המלאי ,אם רמת המלאי קטנה או שווה ל-1 ,מיד מבצעים הזמנה
אשר תביא את רמת המלאי לפחות ל-4 אך לא יותר מ-5.מלאי מוזמן מגיע מיד בחבילות של 2

בלבד, ונמצא במחסן בתחילת השבוע.נגדיר X_n רמת המלאי בתחילת השבוע ה- n, מיד לאחר חידוש המלאי. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? אם כן, הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

21. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר של $\{X_n, n \geq 0\}$: $P = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$ (על מרחב המצבים $\{0,1\}$).

א. הנח $0 < p < 1$, הוכח באינדוקציה:

$$P^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(2p-1)^n & \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

ב. עבור איזה ערכים של p, המשתנים $\{X_n, n \geq 0\}$ הינם i.i.d?

ג. נתון וקטור שורה, פילוג התחלתי $\left(P_{X_0}(0),\, P_{X_0}(1)\right)$, מהו הפילוג השולי של התהליך בזמן n?

ד. מהי מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב $\{X_{2n}, n \geq 0\}$?

22. הענק מעסיק גנן לטיפוח גנו וחוזה העבודה הוא תמיד לשנה אחת. בסוף כל שנה הענק מעלה את שכר הגנן בהסתברות 0.2 או משאיר אותו ללא שינוי. הגנן בשנה מסוימת יישאר בגן בהסתברות 0.95, במידה ושכרו הועלה ויעזוב בהסתברות 0.4 אם שכרו נותר ללא שינוי. אם הגנן מחליט לעזוב, ישנה הסתברות שווה לכך שהענק ימצא גנן חדש או יגנן בעצמו. X_n הוא וותק הגנן שעובד בגן בסוף השנה ה- n. האם X_n שרשרת מרקוב? מדוע? הצג את מטריצת הסתברויות המעבר.

23. נתונה שרשרת $\left\{X_n, n \geq 0\right\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \left\{0,1,2,3,4\right\}$ ומטריצת מעבר P:

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

. כמו כן נתון $P(X_0 = 0) = 1$.

תרגול 4

א. כיצד מתפלג X_3 ?

ב. מהי המטריצה P^{30} .

נסמן הבאים: $b(k:n,p)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$. $\overline{B}(k:n,p)=\sum_{i=k}^{n}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i}$

24. להלן מדיניות מלאי של מחסן לאספקת פריט מסוים: בסוף כל יום עבודה נבדקת כמות המלאי. במידה שכמות המלאי קטנה מ- 2, המלאי מושלם באופן מיידי כך שהכמות תהיה 4 פריטים. במידה שהביקוש במהלך היום עולה על כמות המלאי כל הפריטים נרכשים כך שבסוף היום המלאי מתמלא לרמה של 4 ויתרת הביקוש אינה מסופקת. נסמן ב- p_k את ההסתברות לביקוש k פריטים מהמחסן: $p_k=\begin{cases}0.25 & k=1,2,3,4\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. יהי X_k שרשרת מרקוב המציינת את כמות הפריטים שבמחסן בתחילת היום ה- n. הגדר את מרחב המצבים של השרשרת ותאר את מטריצת המעבר.

25. (מדוגמא ב-2 שבחוברת הקורס) נניח ש: $\{X_n, n\geq 0\}$ הינם משתנים מקריים בדידים .i.i.d. האם מדובר בשרשרת מרקוב?

26. (מדוגמא ב-1 שבחוברת הקורס) מזג האוויר מתנהג בצורה מרקובות. ישנם שלושה מצבי מזג אויר: 1 – מעונן כבד, 2 – מעונן חלקי, 3 – שמיים נקיים. נניח כי מזג האוויר מחר תלוי רק במזג האוויר היום. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר: $P=\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix}.4 & .6 & 0\\ .2 & .5 & .3\\ .1 & .7 & .2\end{pmatrix}$.

א. בהינתן שנמצאים במצב 1, מה ההסברות להיות במצב 3 בעוד 5 ימים?

ב. לאחר הרבה ימים, מה ההסתברות שהמצב היה 3?

27. (מדוגמא ב-3 שבחוברת הקורס) מערכת מסוימת יכולה להימצא באחד משני מצבים, 0 ו- 1. מטריצת הסתברות המעבר היא: $P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$. בהינתן שהשרשרת במצב 1, מה תוחלת הזמן עד שתעבור למצב 0?

תרגול 4

28. תהיינה $B=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$. A ו- B הן מטריצות רבועיות מסדר 2. חשב את:

א. BA. **פתרון:** $BA=\begin{pmatrix} ax+bz & ay+bt \\ cx+dz & cy+dt \end{pmatrix}$.

ב. A^2. **פתרון:** $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & zy+t^2 \end{pmatrix}$.

ג. A^3. **פתרון:**

$$A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=A\cdot A^2=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x^2+yz & xy+yt \\ zx+tz & zy+t^2 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x(x^2+yz)+y(zx+tz) & x(xy+yt)+y(zy+t^2) \\ z(x^2+yz)+t(zx+tz) & z(xy+yt)+t(zy+t^2) \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x^3+2yzx+tzy & x^2y+ytx+zy^2+t^2y \\ zx^2+yz^2+tzx+t^2z & zxy+2zyt+t^3 \end{pmatrix}$$

29. תהיינה $B=\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. A ו- B הן מטריצות רבועיות מסדר 3. חשב את:

א. AB. **פתרון:** $AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix} 1\cdot2+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot3+3\cdot2 & 1\cdot1+2\cdot0+3\cdot4 \\ 4\cdot2+4\cdot0+4\cdot1 & 4\cdot5+4\cdot3+4\cdot2 & 4\cdot1+4\cdot0+4\cdot4 \\ 5\cdot2+6\cdot0+7\cdot1 & 5\cdot5+6\cdot3+7\cdot2 & 5\cdot1+6\cdot0+7\cdot4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 7 & 15 \\ 12 & 0 & 20 \\ 17 & 7 & 35 \end{pmatrix}$$

ב. A^2. **פתרון:** $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot4+3\cdot5 & 1\cdot2+2\cdot4+3\cdot6 & 1\cdot3+2\cdot4+3\cdot7 \\ 4\cdot1+4\cdot4+4\cdot5 & 4\cdot2+4\cdot4+4\cdot6 & 4\cdot3+4\cdot4+4\cdot7 \\ 5\cdot1+6\cdot4+7\cdot5 & 5\cdot2+6\cdot4+7\cdot6 & 5\cdot3+6\cdot4+7\cdot7 \end{pmatrix}$.

30. עבור המטריצות A, B רשום את איבר מטריצת המכפלה AB:

תרגול 4

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

א. $A_{N\times N}=(a_{ij}), a_{ij}=i \quad B_{N\times N}=(b_{ij}), b_{ij}=j$ (רשום את האיבר הכללי של מטריצת המכפלה).

ב. $A_{N\times N}=(a_{ij}), a_{ij}=3^{i+j} \quad B_{N\times N}=(b_{ij}), b_{ij}=j$ (רשום את האיבר הכללי של מטריצת המכפלה).

ג. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{1}{8}\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ (B הוא מכפלה של וקטורי עמודה ושורה).

31. צור 2 מטריצות בעלות מימד 20×20 בתוכנת מחשב. (הכנס למטריצות ערכים אקראיים כלשהם). רשום את מכפלת המטריצות.

32. נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n\ge 0\}$ על מרחב המצבים $S=\{0,1,2,3\}$ ובעלת מטריצת מעבר

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 0\\1\\2\\3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0.1 & 0.2 & 0.3 & 0.4\\ 0.1 & 0.1 & 0.3 & 0.4\\ 0.3 & 0.2 & 0.15 & 0.35\\ 0.2 & 0.2 & 0.6 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

השתמש בתוכנת מחשב (לצורך הכפלת מטריצות) לחשב את פונקצית התוחלת של התהליך ב 100 יחידות הזמן הראשונות.