

**פרק א-4: מיון מצבים, מצבים חולפים ומצבים מתמידים.**

1. עבור כל סעיף ענה "נכון" או "לא נכון" והסבר.

א. בשרשרת מרקוב אי-פריקה כל המצבים בהכרח מתמידים.

ב. בשרשרת מרקוב אי-פריקה יתכן ויהיו גם מצבים מתמידים וגם חולפים.

ג. נתונה שרשרת מרקוב אשר בה כל המצבים מתמידים, אז השרשרת בהכרח אי-פריקה.

ד. נתונה שרשרת מרקוב בעלת המצבים  $\{1, 2, 3, 4\}$ . נתון  $1 \leftarrow 2$  (1 נגיש מ 2) אז בהכרח

$$p_{12} > 0$$

ה. בהמשך לשאלה הקודמת, נתון גם ש  $3 \leftarrow 1$  ו  $2 \leftarrow 3$  אז אם 2 מצב מתמיד אז בהכרח גם 3

מצב מתמיד.

ו. בהמשך לשאלה הקודמת, אם  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)} = 3.45$ , אז  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(n)} < \infty$ .

2. עכבר נקלע למבוך עם 4 תאים. בין התאים פרוזדורים המאפשרים לעכבר עבור בין התאים.

נמספר את התאים 0, 1, 2, 3. העכבר נע מתא לתא.  $X_n$  הוא משתנה מקרי השווה למספרו של

התא ה-  $X_n$  בו ביקר העכבר. בהינתן שהעכבר נמצא בתא מספר  $X_n$  בזמן  $n$  הסיכוי שיעבור

לתא מספר  $X_{n+1}$  מוכתב ע"י המטריצה הסטוכסטית הבאה:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

א. תאר את מטריצת המעבר באמצעות גרף מכוון ממושקל.

ב. סווג את מצבי השרשרת. מהן מחלקות הקשירות?

ג. מהם  $f_0, f_1, f_2, f_3$ . (לתרגול הנוכחי בגלל שאין צורך לבצע חישוב כי זו שרשרת אי-

פריקה).

## תרגול 5

3. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה. צייר גרף מכוון ממושקל המתאים למטריצת המעבר,

סווג את מצבי השרשרת ומצא את מחלקות הקשירות:

$$\begin{array}{c}
 \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 0 & \left( \begin{array}{cccccc}
 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\
 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 \\
 0.25 & 0 & 0.25 & 0.25 & 0 & 0.25 \\
 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right) \\
 1 \\
 2 \\
 3 \\
 4 \\
 5
 \end{matrix}
 \end{array}$$

א. תאר תהליך ספירה בינומי כשרשרת מרקוב.

ב. מהן מחלקות הקשירות ובכל מחלקה האם המצבים מתמידים או חולפים.

4. נתונה שרשרת מרקוב עם מטריצת המעבר הבאה (על מרחב המצבים  $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ).

$$P = \begin{pmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\
 1/5 & a & 1/5 & 1/5 & 1/5 \\
 0 & 0 & 0 & b & 5/8 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{pmatrix}$$

א. השלם את הערכים a, b.

ב. רשום את מחלקות הקשירות של השרשרת.

ג. מהן המחלקות המתמידות ומהן המחלקות החולפות.

ד. למה שווים הערכים הבאים:

$$(1) f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 ?$$

$$(2) f_{23}, f_{41}.$$

$$(3) p_{12}^{(2)}$$

$$(4) p_{15}^{(35)}$$

$$(5) \sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)}$$

## תרגול 5

ה. נתונה התפלגות התחלתית  $P_{X_0} = (p_1 \ p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5)$ .

(1) נניח ש  $p_1 + p_2 = 1$ , מהי  $P(X_{24} = 3)$ ?

(2) נניח שההתפלגות ההתפלגות ההתחלתית אחידה בדידה ( $p_i = 1/5$ ). מהי  $P(X_1 = 3)$ ?

מהי  $P(X_2 = 3)$ ?

(3) נניח שוב  $p_1 + p_2 = 1$  מצא ביטוי עבור  $P(X_4 = 1)$ .

5. נתון שמצב  $i$  בשרשרת מרקוב הוא חולף ונתון הערך  $f_i$ .

א. מה המשמעות של  $f_i$ ?

ב. נניח ש  $X_0 = i$ . מה תוחלת מספר הפעמים שהשרשרת תבקר במצב  $i$ .

ג. הסבר מדוע תשובתך של הסעיף הקודם נכונה.

ד. נניח שבכל כניסה למצב  $i$  מתקבל תשלום בשווי  $0.5^k$  כאשר  $k$  הוא מספר הכניסה. לדוגמא,

אם נכנסים למצב  $i$  3 פעמים אז סך התשלומים הוא  $0.5^1 + 0.5^2 + 0.5^3$ . בהינתן ש  $X_0 = i$

מה תוחלת סך התשלומים.

6. נתונה שרשרת  $\{X_n, n \geq 0\}$  בעלת מרחב מצבים  $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$  ומטריצת מעבר  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

א. כמו כן נתון  $P(X_0 = 0) = 1$ .

ב. כיצד מתפלג  $X_3$ ?

ג. מהי המטריצה  $P^{30}$ ?

ניתן להיעזר בסימונים:  $\bar{B}(k; n, p) \equiv \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} p^i q^{n-i}$ ,  $b(k; n, p) \equiv \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ .

## תרגול 5

7. נתונה שרשרת  $\{X_n, n \geq 0\}$  בעלת מרחב מצבים  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  ומטריצת מעבר  $P$ :

$$P = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 \\ 0.3 & 0.3 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0.1 & 0.9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$$

א. מהן מחלקות הקשירות בשרשרת זו.

ב. איזה מחלקות קשירות הינן מתמידות ואיזה הן חולפות.

ג. נסמן  $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$ . האם הטור  $\sum_{n=1}^{\infty} p_{33}^{(n)}$  מתבדר או מתכנס? הסבר.

8. האם תיתכן שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים סופי אשר כל מצביה חולפים? הסבר.

מה לגבי שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים אינסופי? במידה וקיימת תן דוגמא, במידה ולא הסבר.

9. שאלת בונוס: ממש באקסל את האלגוריתם למציאת יחס הקשירות בין מצבים מפרק ב-4

בחוברת ההרצאה. בדוק את האלגוריתם על דוגמאות אשר הופיעו בתרגול.