

פרק ב-5, ב-6, ב-7: ניתוח צעד ראשון והתפלגות הסטציונרית

1. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה. (מרחב המצבים הוא $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$):

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/8 & 1/8 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

א. מהו f_{51} ?

ב. מהי $E[T_2 | X_0 = 3]$ כאשר $T_k = \inf\{n \geq 1 | X_n = k\}$ (זמן הפגיעה).

2. להלן מודל מהמר – מהמר מבצע סדרה של הימורים בלתי תלויים. בכל הימור המהמר מרוויח או מפסיד

1 ש. הסיכויים לרווח והפסד בכל הימור שווים. המהמר מתחיל עם הון התחלתי של $X_0 = i$.

$i \in \{0, 1, \dots, N\}$. המהמר ממשיך להמר עד שהוא מגיעה ל 0 (פושט רגל) או ל N (זוכה).

א. הוכח שהסתברות שהמהמר יזכה היא $\frac{i}{N}$.

ב. הוכח כי תוחלת מספר ההימורים עד לזכייה או לפשיטת רגל היא $i(N-i)$.

3. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0.25 & 0.75 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

א. האם השרשרת פריקה או אי-פריקה?

ב. מצא וקטור הסתברויות גבוליות (סטציונריות).

ג. חשב בעזרת הקשר בין תוחלת מס' צעדים להסתברויות גבוליות: $\mu_{11}, \mu_{22}, \mu_{33}$.

ד. נתון $P_{X_0} = (1, 0, 0)$. מהו P_{X_1} ?

ה. נתון $P_{X_0} = \pi$. מהו P_{X_1} ?

תרגול 6

ו. נתון $P_{X_0} = \pi$. מהו $P_{X_{134}}$?

ז. מהו $E[T_2 | X_0 = 2]$?

ח. נתון $P_{X_0} = (0,1,0)$. מהו $\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_n = i)$?

4. מכונה יכולה להיות במצב תקין (0) או תקול (1). בכל יום הסיכוי להתקלקל הוא a (במידה ובמצב תקין)

והסיכוי לעבור ממצב תקול למצב תקין ביום למחרת הוא b.

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

א. לאחר שהמכונה פועלת למשך הרבה ימים, מהי פרופורציית הזמן אשר המכונה מקולקלת.

ב. נתונה המשוואה הבאה: $P^n = \frac{1}{a+b} \left(\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix} \right)$ (ניתן להוכיח את

המשוואה באינדוקציה). ענה על סעיף א' באמצעות הנוסחה.

ג. מה תוחלת הזמן בין קלקול לקלקול.

5. מצא את וקטור ההסתברויות הסטציונריות של המטריצה הבאה:

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 0 & 3/5 & 0 & 1/5 \\ 1/5 & 0 & 0 & 0 & 1/5 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 0 & 4/5 & 0 & 0 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 0 & 4/5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

תרגול 6

6. נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד בעלת מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4\}$. נתונה מטריצת מעבר:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן: $T_k = \min\{n \geq 1 \mid X_n = k\}$ - זהו "זמן הפגיעה" במצב k.

א. סווג את מצבי השרשרת: מהם המצבים המתמידים, מהם המצבים החולפים, מהן מחלקות הקשירות.

ב. הראה ש- $\pi = \left(\frac{3}{9} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{1}{9}\right)$ היא ההתפלגות הסטציונרית של השרשרת.

ג. מהי $E[T_2 \mid X_0 = 2]$?

ד. מהי $P(T_1 = 6 \mid X_0 = 1)$?

ה. מהי $P(X_2 = 3 \mid T_1 = 5, X_0 = 1)$?

7. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \begin{pmatrix} 0.2 & 0.2 & 0 & 0.3 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0.1 & 0.4 & 0.2 & 0.3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0 & 0.3 \end{pmatrix} \end{array}$$

א. יצג את המטריצה כגרף מכון ממושקל, סווג את מצבי השרשרת והגדר קבוצות אי-פריקות.

ב. חשב: f_{03} , f_{13} .

ג. ידוע שיצאנו ממצב 2, מהי תוחלת מספר הביקורים במצב 2?

תרגול 6

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\
 0 \quad \left(\begin{array}{cccc}
 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\
 1 & 1 & 0 & 0 \\
 2 & 0 & 1 & 0 \\
 3 & 0 & 1 & 0
 \end{array} \right)
 \end{array}
 \quad .8 \text{ . נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:}$$

א. סווג את מצבי השרשרת.

ב. האם המטריצה פריקה?

ג. חשב: f_0 .

9. נתונה מטריצת הסתברויות המעבר הבאה:

$$\begin{array}{c}
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7 \quad 8 \\
 0 \quad \left(\begin{array}{cccccccc}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.6 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 \\
 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0.4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.6 & 0 & 0.4 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{array} \right)
 \end{array}$$

א. סווג את מצבי השרשרת.

ב. חשב: f_{20} ההסתברות להגיע ממצב 2 ל-0 אי פעם.

ג. חשב: f_{i0} ההסתברות להגיע מכל מצב ל-0 אי פעם.