1

פתרון תרגיל 10

2) א) תהליך קפיצה מרקובי הוא תהליך סטוכסטי בו מרחב הפרמטר t הוא רציף ומרחב המצבים הוא בן-מניה, ואשר מקיים את התכונה המרקובית והומוגניות בזמן.

ב) יהי $\{X(t), t\geq 0\}$ תהליך קפיצה מרקובי כך ש: t הוא הזמן (רציף). נגדיר $X(t)=0$ אם "היצור הנלבי" בריא בזמן t, $X(t)=1$ אם הוא חולה בזמן t ו- $X(t)=2$ אם הוא מת בזמן t.

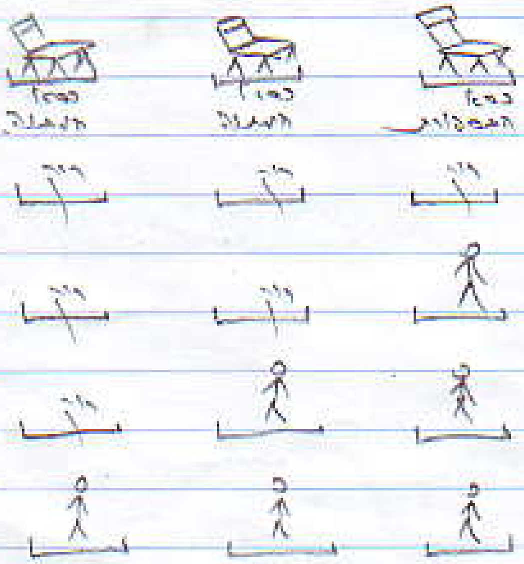
תהי $\{Y_n, n\geq 0\}$ סדרת מקרים בזמן בדיד, כך ש: $Y_0 = X(0)$ ו- $Y_n = X(T_n)$. כלומר, Y_n שווה למצב שבו התהליך $\{X(t), t\geq 0\}$ יהיה לאחר הקפיצה ה-n. (T_n שווה לזמן הקפיצה ה-n, $T_0=0$).

התהליך $\{Y_n, n\geq 0\}$ נקרא "שרשרת מרקוב משובצת".

במקרה שבשאלה מטריצת ההסתברויות המעבר של השרשרת המשובצת היא:

$$\begin{array}{c|ccc} Y_n \backslash Y_{n+1} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0.9 & 0.1 \\ 1 & 0.7 & 0 & 0.3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

3) א) נגדיר את מרחב המצבים ע"י מספר האנשים שנמצאים "במערכת"



מצב 0 - אין אנשים "במערכת"

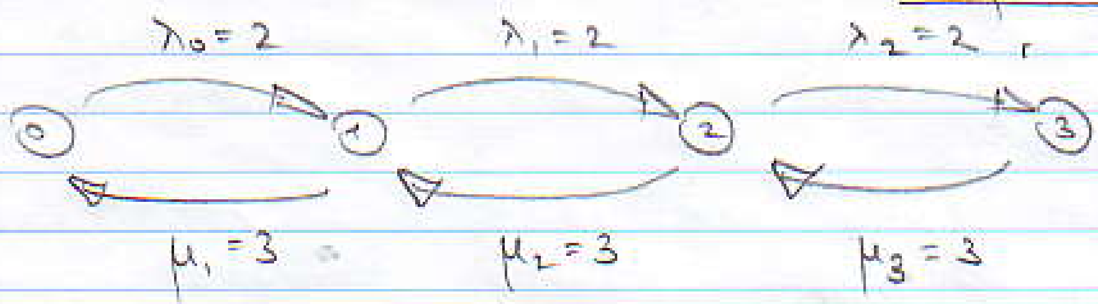
מצב 1 - יש אדם אחד "במערכת"

מצב 2 - יש שני אנשים "במערכת"

מצב 3 - יש 3 אנשים "במערכת"

2

א) תרשים הקשירות:



ב) מטריצת היוצר:

$$\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & q_{13} \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & -q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

ג) המטריצה המשוכנת:

$$\begin{pmatrix} P(0,0) & P(0,1) & P(0,2) & P(0,3) \\ P(1,0) & P(1,1) & P(1,2) & P(1,3) \\ P(2,0) & P(2,1) & P(2,2) & P(2,3) \\ P(3,0) & P(3,1) & P(3,2) & P(3,3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{q_{01}}{q_0} & \frac{q_{02}}{q_0} & \frac{q_{03}}{q_0} \\ \frac{q_{10}}{q_1} & 0 & \frac{q_{12}}{q_1} & \frac{q_{13}}{q_1} \\ \frac{q_{20}}{q_2} & \frac{q_{21}}{q_2} & 0 & \frac{q_{23}}{q_2} \\ \frac{q_{30}}{q_3} & \frac{q_{31}}{q_3} & \frac{q_{32}}{q_3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{q_{01}}{\sum_k q_{0k}} & \frac{q_{02}}{\sum_k q_{0k}} & \frac{q_{03}}{\sum_k q_{0k}} \\ \frac{q_{10}}{\sum_k q_{1k}} & 0 & \frac{q_{12}}{\sum_k q_{1k}} & \frac{q_{13}}{\sum_k q_{1k}} \\ \frac{q_{20}}{\sum_k q_{2k}} & \frac{q_{21}}{\sum_k q_{2k}} & 0 & \frac{q_{23}}{\sum_k q_{2k}} \\ \frac{q_{30}}{\sum_k q_{3k}} & \frac{q_{31}}{\sum_k q_{3k}} & \frac{q_{32}}{\sum_k q_{3k}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$\boxed{\begin{aligned}&\pi Q = 0\\ &\sum_i \pi_i = 1\end{aligned}}$$

ב) דרך א':

$$\pi Q = (\pi_0\ \pi_1\ \pi_2\ \pi_3)\begin{pmatrix} -q_0 & q_{01} & q_{02} & q_{03} \\ q_{10} & -q_1 & q_{12} & q_{13} \\ q_{20} & q_{21} & -q_2 & q_{23} \\ q_{30} & q_{31} & q_{32} & -q_3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} -\pi_0 q_0 + \pi_1 q_{10} + \pi_2 q_{20} + \pi_3 q_{30} = 0 \\ \pi_0 q_{01} - \pi_1 q_1 + \pi_2 q_{21} + \pi_3 q_{31} = 0 \\ \pi_0 q_{02} + \pi_1 q_{12} - \pi_2 q_2 + \pi_3 q_{32} = 0 \\ \pi_0 q_{03} + \pi_1 q_{13} + \pi_2 q_{23} - \pi_3 q_3 = 0 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_0 q_0 = \pi_1 q_{10} + \pi_2 q_{20} + \pi_3 q_{30} \\ \pi_1 q_1 = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21} + \pi_3 q_{31} \\ \pi_2 q_2 = \pi_0 q_{02} + \pi_1 q_{12} + \pi_3 q_{32} \\ \pi_3 q_3 = \pi_0 q_{03} + \pi_1 q_{13} + \pi_2 q_{23} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

מספר המעברים ליחידת זמן לתוך מצב (כניסות)	=	מספר המעברים ליחידת זמן מתוך מצב (יציאות)

דרך ב':

יציאות — כניסות

$$\begin{cases} \pi_0 q_{01} + \pi_0 q_{02} + \pi_0 q_{03} = \pi_1 q_{10} + \pi_2 q_{20} + \pi_3 q_{30} \\ \pi_1 q_{10} + \pi_1 q_{12} + \pi_1 q_{13} = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21} + \pi_3 q_{31} \\ \pi_2 q_{20} + \pi_2 q_{21} + \pi_2 q_{23} = \pi_0 q_{02} + \pi_1 q_{12} + \pi_3 q_{32} \\ \pi_3 q_{30} + \pi_3 q_{31} + \pi_3 q_{32} = \pi_0 q_{03} + \pi_1 q_{13} + \pi_2 q_{23} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 0. \end{cases}$$

יציאות — כניסות

$$\begin{cases} \pi_0 (q_{01} + q_{02} + q_{03}) = \pi_1 q_{10} + \pi_2 q_{20} + \pi_3 q_{30} \\ \pi_1 (q_{10} + q_{12} + q_{13}) = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21} + \pi_3 q_{31} \\ \pi_2 (q_{20} + q_{21} + q_{23}) = \pi_0 q_{02} + \pi_1 q_{12} + \pi_3 q_{32} \\ \pi_3 (q_{30} + q_{31} + q_{32}) = \pi_0 q_{03} + \pi_1 q_{13} + \pi_2 q_{23} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

יציאות — כניסות

$$\begin{cases} \pi_0 q_0 = \pi_1 q_{10} + \pi_2 q_{20} + \pi_3 q_{10} \\ \pi_1 q_1 = \pi_0 q_{01} + \pi_2 q_{21} + \pi_3 q_{31} \\ \pi_2 q_2 = \pi_0 q_{02} + \pi_1 q_{12} + \pi_3 q_{32} \\ \pi_3 q_3 = \pi_0 q_{03} + \pi_1 q_{13} + \pi_2 q_{23} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

לפני דרך א' ודרך ב'. הן למעשה אותה הדרך
בלי עניין ש: (סכום כל שורה במטריצה הוא שווה לאפס).

$$q_0 = q_{01} + q_{02} + q_{03}$$

$$q_1 = q_{10} + q_{12} + q_{13}$$

$$q_2 = q_{20} + q_{21} + q_{23}$$

$$q_3 = q_{30} + q_{31} + q_{32}$$

נרשום את נתוני השאלה במערכת המשוואות:

$$\begin{cases} 2\pi_0 = 3\pi_1 + \cancel{0\pi_2} + \cancel{0\pi_3} \\ 5\pi_1 = 2\pi_0 + 3\pi_2 + \cancel{0\pi_3} \\ 5\pi_2 = \cancel{0\pi_0} + 2\pi_1 + 3\pi_3 \\ 3\pi_3 = \cancel{0\pi_0} + \cancel{0\pi_1} + 2\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \\ \mathrm{IV} \\ \mathrm{V} \end{array} \begin{cases} 2\pi_0 = 3\pi_1 \\ 5\pi_1 = 2\pi_0 + 3\pi_2 \\ 5\pi_2 = 2\pi_1 + 3\pi_3 \\ 3\pi_3 = 2\pi_2 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

(6)

נחסיר את משוואה I ממשוואה II ואת משוואה IV ממשוואה
III ונקבל

$$
\begin{cases}
\text{I} & 2\pi_0 = 3\pi_1 \\
\text{II} & 2\pi_1 = 3\pi_2 \\
\text{III} & 3\pi_2 = 2\pi_1 \\
\text{IV} & 3\pi_3 = 2\pi_2 \\
\text{V} & \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.
\end{cases}
$$

משוואות II ו- III מוכפלות במינוס ולכן קיבלנו את המערכת:

$$
\begin{cases}
2\pi_0 = 3\pi_1 \\
2\pi_1 = 3\pi_2 \\
2\pi_2 = 3\pi_3 \\
\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1.
\end{cases}
$$

(נסמן את המערכת הנ"ל ב- (*) ונתייחס אליה בהמשך)
נפתור:

$$
\begin{cases}
\pi_1 = \frac{2}{3}\pi_0 \\
\pi_2 = \frac{2}{3}\pi_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\pi_0 \\
\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2\pi_0 \\
\pi_0\left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = 1.
\end{cases}
$$

$$\Rightarrow \pi_0 = \frac{27}{65}, \quad \pi_1 = \frac{18}{65}, \quad \pi_2 = \frac{12}{65}, \quad \pi_3 = \frac{8}{65}.$$

7

דרך ג' - "בדרך ג'" נציג שיטה למציאת ההסתברויות הסטציונריות בשרשראות "משוואות שיווי משקל מפורטות". לא תמיד ניתן למצוא הסתברויות סטציונריות בדרך זו. קיימים תנאים (אשר לא נלמד בקורס זה) ע"מ שניתן יהיה לפתור בדרך זו.

ב"דרך ב'" בנינו משוואות ע"י שראינו שמספר המעברים ליחידת זמן לתוך מצב שווה למספר המעברים ליחידת זמן מחוץ למצב. באופן דומה, ניתן לחלק את מצבי השרשרת לשתי קבוצות מצבים נפרדות, ולבנות משוואות ע"י שנבחין שבמצב של שיווי משקל מספר המעברים ליחידת זמן מקבוצה אחת לשניה שווה למספר המעברים ליחידת זמן מהקבוצה השניה לראשונה. במקרה של תהליך לידה-מוות, מכיוון שמשוואה שמייצגת שוויון במעברים בין שתי קבוצות למעשה משווה מעברים בין שני מצבים סמוכים, נקבל את "המשוואות המפורטות": $\pi_i q_{ij} = \pi_j q_{ji}$ $\forall i,j$

(כאשר אם $|i-j|>1$ אז נקבל אפס בשני צידי המשוואה)

נרשום משוואות המפורטות לאור המקרה שבשאלה:

$$\begin{cases} \pi_0 q_{01} = \pi_1 q_{10} \\ \pi_1 q_{12} = \pi_2 q_{21} \\ \pi_2 q_{23} = \pi_3 q_{32} \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

$$0 \underset{\pi_1 q_{10}}{\overset{\pi_0 q_{01}}{\rightleftarrows}} 1$$

$$1 \underset{\pi_2 q_{21}}{\overset{\pi_1 q_{12}}{\rightleftarrows}} 2$$

$$2 \underset{\pi_3 q_{32}}{\overset{\pi_2 q_{23}}{\rightleftarrows}} 3$$

נציב את הגבולים:

$$\begin{cases} 2\pi_0 = 3\pi_1 \\ 2\pi_1 = 3\pi_2 \\ 2\pi_2 = 3\pi_3 \\ \pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

נשים לב שדרך ג' היא למעשה תוצאה * שקיבלו בדרכים א' ו-ב'.

ג) פרופורציית הזמן ששני כיסאות ההמתנה יהיו תפוסים היא פרופורציית הזמן שהמערכת (התהליך) נמצאת במצב 3, כלומר, $\pi_3 = \frac{8}{65}$.

ב) פרופורציית הזמן שהספר עסוק שווה לאחד פחות פרופורציית הזמן שהספר אינו עסוק. פרופורציית הזמן שהספר אינו עסוק שווה לפרופורציית הזמן שהמספרה ריקה מלקוחות. כלומר $\pi_0 = \frac{27}{65}$. לכן הפתרון הוא $1 - \pi_0 = 1 - \frac{27}{65}$.

ח) נתון ש: $X \sim exp(3)$ — X זמן התספורת מתפלג אקספוננציאלית עם קצב 3 לקוחות מסופרים בשעה. משמעות הדבר היא שאם הספר יעבוד רצוף במשך שעה אחת, אז תוחלת מספר הלקוחות שיספר תהיה 3 לקוחות. אבל הספר לא עובד רצוף - בכל שעה, $\pi_0 = \frac{27}{65}$ מהזמן המספרה ריקה מלקוחות. כלומר, הוא עובד רק $1 - \pi_0 = 1 - \frac{27}{65}$ מהשעה ולכן הוא מספר: $3(1 - \pi_0) = 3(1 - \frac{27}{65})$ לקוחות בשעה בממוצע.

9

4) א) נסמן: $X(t)$ - מספר המכונות שעובדות בזמן t.
$\{X(t), t\geq 0\}$ הוא תהליך קפיצה מרקובי. ניתן לראות שמדובר בתהליך "לידה ומוות", הדומה לתהליך שראינו בתרגיל בית 9.
מרחב המצבים הוא אם כן $\{0,1,2,3\}$.

ב) גרף המעברים:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0=\frac{1}{4}"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1=\frac{1}{60}"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1=\frac{1}{4}"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_2=\frac{2}{60}"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2=\frac{1}{4}"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu_3=\frac{3}{60}."]
\end{tikzcd}$$

ג) מטריצת היוצר:

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{60} & -\frac{1}{60}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{2}{60} & -\frac{2}{60}-\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 3 & 0 & 0 & \frac{3}{60} & -\frac{3}{60} \end{array}$$

ד) המטריצה המשוכנת:

$$P = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{\frac{1}{60}}{\frac{1}{60}+\frac{1}{4}} & 0 & \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{60}+\frac{1}{4}} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{\frac{2}{60}}{\frac{2}{60}+\frac{1}{4}} & 0 & \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{60}+\frac{1}{4}} \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

ה) + ו) ראה הרחבה בנושא בפתרון שאלה 3

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_0 = \frac{1}{60}\pi_1 \\ \left(\frac{1}{4}+\frac{1}{60}\right)\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_0 + \frac{2}{60}\pi_2 \\ \left(\frac{1}{4}+\frac{2}{60}\right)\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{3}{60}\pi_1 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}\pi_0 = \frac{1}{60}\pi_1 \\ \frac{1}{4}\pi_1 = \frac{2}{60}\pi_2 \\ \frac{1}{4}\pi_2 = \frac{3}{60}\pi_3 \\ \pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = 15\pi_0 \\ \pi_2 = \frac{15}{2}\pi_1 = \frac{225}{2}\pi_0 \\ \pi_3 = 5\pi_2 = \frac{1125}{2}\pi_0 \\ \pi_0 = \frac{1}{1+15+\frac{225}{2}+\frac{1125}{2}} = \frac{2}{1382} \end{cases}$$

ב) פרופורציית $\left(=\frac{\text{אחוז}}{100}\right)$ הזמן שכל המכונות מקולקלות $= \pi_3$.

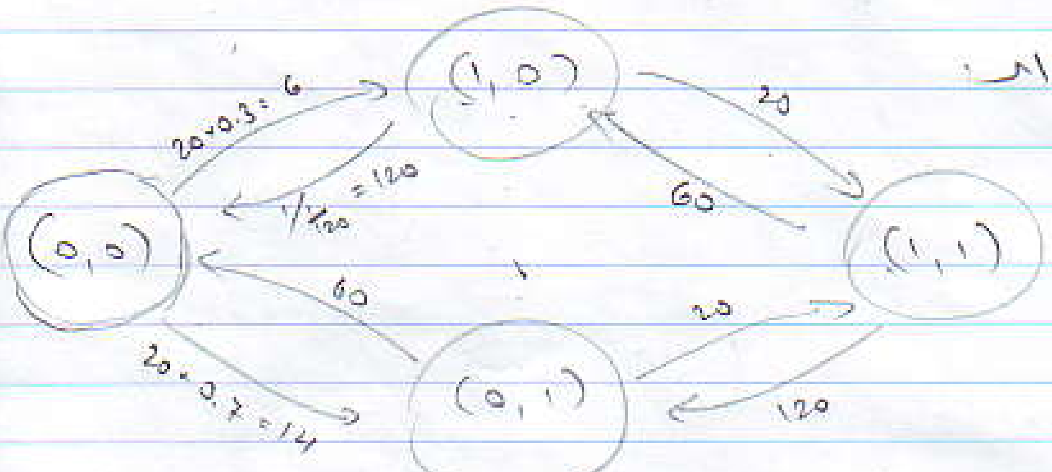
ג) ביום שבו 3 המכונות יעבדו במשך כל היום "כל הבית" יהווה 3000 כסף (כסף שכן הוא לכל אחד מה-3), אבל 3 המכונות לא עבדו כל היום אלא עבדו בממוצע רק π_3 מהיום ולכן הרווח עבור פרקי הזמן בהם עבדו כל 3 המכונות (בממוצע) ביום אחד הוא $\pi_3 \cdot 3000$ כסף. באותו אופן הרווח עבור פרקי הזמן (בממוצע) בהם עבדו 2 מכונות (בממוצע) הוא $2000\pi_2$ כסף, ומכונה אחת (בממוצע) הוא $1000\pi_1$ כסף, ולכן סה"כ הרווח היומי הוא: $1000\pi_1 + 2000\pi_2 + 3000\pi_3$ כסף.

2א) נתון: פלאפל מגורן = דוכן א'!
פלאפל מפרץ = דוכן ב'!

נגדיר את מרחב המצבים:

(0,0) - שני הדוכנים פנויים
(1,0) - דוכן א' תפוס וב' פנוי.
(0,1) - דוכן א' פנוי וב' תפוס.
(1,1) - שני הדוכנים תפוסים.

ב) תרשים הקשתות:



ג) התהליך נמצא כעת במצב (0,1). בתרגול אמרנו שבהינתן לאחת מההגדרות של תהליך קפיצה מרקובי, ניתן לומר שכאשר התהליך נמצא במצב (0,1) נערכת תחרות בין שני משתנים מקריים אקספוננציאליים. האחד מנסה להוציא את התהליך למצב (1,1) והשני למצב (0,0). נשאלת השאלה מה הסיכוי שזה מנסה להוציא למצב (1,1) ינצח. הפתרון הוא: $\frac{20}{120+20}$.

ד) התהליך נמצא כעת במצב (1,1). כפי שצוין בסעיף הקודם נערכת תחרות בין שני משתנים אקספוננציאליים. האחד מנסה להוציא את התהליך למצב (1,0) בקצב 120 והשני ל-(0,1) בקצב 60. זמן השהיה של התהליך במצב (1,1) יסתיים כאשר הראשון מביניהם יצליח להוציא את התהליך ממצב (1,1). כלומר, זמן השהיה הוא מ"מ אקספוננציאלי השווה למינימום מבין 2 המ"מ האקספוננציאליים, וקצב זמן השהיה שווה לסכום הקצבים של 2 המ"מ. הפתרון הוא אם כן: $e^{-(120+60)(\frac{1}{60})}$

ה) התהליך נמצא כעת במצב $(0,0)$. נשאלת השאלה מה תוחלת הזמן עד שהתהליך יעבור למצב $(1,1)$ או למצב $(0,1)$. נפתור ע"י התניה בצעד הראשון.

$$E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)$$

$$= P\left(\begin{matrix}\text{לעבור ממצב }(0,0)\\ \text{ל-}(1,0)\text{ בקפיצה}\\ \text{הראשונה}\end{matrix}\right)\left[E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{עברנו מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(1,0)\text{ בקפיצה}\\ \text{הראשונה}\end{matrix}\right)+E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(1,0)\text{ בקפיצה}\\ \text{הראשונה}\end{matrix}\right)\right]$$

$$+ P\left(\begin{matrix}\text{לעבור ממצב }(0,0)\\ \text{ל-}(0,1)\text{ בקפיצה}\\ \text{הראשונה}\end{matrix}\right)\left[E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,1)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{עברנו מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(0,1)\text{ בקפיצה}\\ \text{הראשונה}\end{matrix}\right)+E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(0,1)\text{ בקפיצה}\\ \text{הראשונה}\end{matrix}\right)\right]$$

עקב מרקוביות   זמן השהייה במצב $(0,0)$ $\sim exp(20)$

$$= P\big((0,0),(1,0)\big)\left[E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(1,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)+\frac{1}{20}\right]$$

הסתברויות המעבר   כי אנחנו כבר שם

$$+ P\big((0,0),(0,1)\big)\left[0+\frac{1}{20}\right]$$

$$= \left(\frac{6}{20}\right)\left[E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(1,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)+\frac{1}{20}\right]+\left(\frac{14}{20}\right)\left[\frac{1}{20}\right]$$

I

$$\Rightarrow E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)=\frac{1}{20}+\frac{6}{20}E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(1,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)$$

II

$$E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(1,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)=\frac{1}{140}+\frac{120}{140}E\left(\begin{matrix}\text{זמן המעבר מ-}(0,0)\\ \text{ל-}(1,1)\text{ או ל-}(0,1)\end{matrix}\right)$$

את משוואה II נקבל באופן דומה כמו שהסברנו את I
כעת יש 2 משוואות ב-2 נעלמים והמשך פשוט.

1) המשוואות המאזן הינן:

$$
\begin{cases}
20\,\pi_{(0,0)} = 120\,\pi_{(1,0)} + 600\,\pi_{(0,1)} \\
(120+20)\,\pi_{(1,0)} = 60\,\pi_{(1,1)} + 6\,\pi_{(0,0)} \\
80\,\pi_{(0,1)} = 120\,\pi_{(1,1)} + 14\,\pi_{(0,0)} \\
\pi_{(0,0)} + \pi_{(0,1)} + \pi_{(1,0)} + \pi_{(1,1)} = 1
\end{cases}
$$

2) עקב שכן יאיר פלאפל מזון ב' (מברזל) הוא צריך
להביא "מסורת" כאשר היא נמצאת. במצב (0,0)
או במצב (1,0). ההסתברות שזה יקרה = לפרופורציות
הזמן שהמערכת נמצאת במצבים אלו, כלומר: $\pi_{(0,0)} + \pi_{(1,0)}$

14

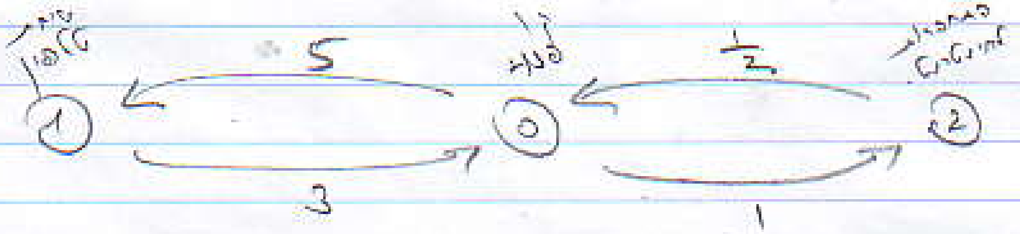
6) א) נסמן $X(t)$ - מצבה של מירב בזמן t, כאשר:

$X(t)=0$ כאשר מירב פנויה בזמן t (לא מדברת בטלפון ולא באינטרנט)

$X(t)=1$ " " מדברת בטלפון בזמן t.

$X(t)=2$ " " מחוברת לאינטרנט " t.

ב)



$w_{01}\sim exp(q_{01}=5)$ - זמנים בין הגעות שיחות

$w_{10}\sim exp(q_{10})$ - משך שיחות

$w_{02}\sim exp(q_{02})$ - זמנים בין התחברויות לאינטרנט

$w_{20}\sim exp(q_{20})$ - משכי התחברויות לאינטרנט

$q_{10}=3 \quad \Leftarrow \quad E(w_{10})=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$

$q_{02}=1 \quad \Leftarrow \quad E(w_{02})=1$

$q_{20}=\frac{1}{2} \quad \Leftarrow \quad E(w_{20})=2$

ג) נסמן: w_0 - הזמן עד שלראשונה הקו יהיה תפוס.

$w_0 \sim exp(q_{01}+q_{02}=5+1) \quad \Leftarrow \quad w_0=\min(w_{01},w_{02})$

ד) מטריצת היוצר:

$$Q = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -6 & 5 & 1 \\ 3 & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

ה) <u>מטריצת הסתברויות המעבר של השרשרת המשוכנת:</u>

$$P = \begin{array}{c|ccc} & 0 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 5/6 & 1/6 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

ו) אם שכיחות של מיכל "תתפוס" את מיכל מדברת בטלפון
היא צריכה לחכות לחדר כאשר "המערכת" במצב 1,
ההסתברות שזה יקרה = לפרופורציית הזמן ש"המערכת"
נמצאת במצב 1, כלומר שווה ל- π_1!

ז) מיכל מרימה את השפופרת כאשר הטלפון מצלצל. הטלפון
יכול לצלצל רק כאשר "המערכת" נמצאת במצב 0
עבור שהיית מצטברת של שהה במצב 0 (מקרה לחזור
$\frac{1}{\pi_0}$ שהות (בממוצע) תוחלת מספר הצלצולים תהיה Z. ולכן
עבור שהייה מצטברת של π_0 שהות בשהה (בממוצע) הטלפון
יצלצל $\pi_0 Z$ פעמים. לכן מספר הפעמים הממוצע
(זו בדיוק תוחלת מספר הפעמים) שמיכל מרימה
את שפופרת הטלפון (בשעה) על מנת לשוחח היא $\pi_0 Z$.