פתרון תרגול 11

חלק ה: תהליכי לידה מוות ומערכות תורים.

1. הסתכל על דף הנוסחאות המצורף למבחן:

א) מהי $L=\sum_{k=0}^{\infty} k\pi_k$ עבור מערכת M/M/1?

פתרון: $\frac{\rho}{1-\rho}$.

ב) כיצד נוסחת ליטל מקשרת בין הפתרון של א' לבין העובדה שזמן השהייה במצב יציב מתפלג $\exp(\mu-\lambda)$?

פתרון: $\underbrace{\frac{\rho}{1-\rho}}_{L}=\lambda\cdot\underbrace{\frac{1}{\mu-\lambda}}_{W}$.

ג) מהו פילוג מספר הצרכנים במערכת $M/M/\infty$? מה תוחלת מספר הצרכנים במערכת?

פתרון: מספר הצרכנים הוא $Poisson(\rho)$ ולכן תוחלת מספר הצרכנים היא ρ.

ד) כיצד הפתרון ל – ג' מתקשר לפילוג מספר הצרכנים במערכת $M/M/c/c$.

פתרון: פילוג מספר הצרכנים ב $M/M/c/c$ הוא התפלגות פואסונית "קטומה". ניתן לראות שפונקצית מסת ההסתברות היא כמו של פואסון פרט לגורם הנרמול שהוא $\frac{1}{\sum_{n=0}^{c} r^n/n!}$. אנו רואים שכאשר $c\to\infty$ אז גורם הנרמול שואף ל e^{-r} ואז המערכות זהות.

ה) מה המשמעות של π_c במערכת $M/M/c/c$?

פתרון: זוהי פרופורציית הזמן שהמערכת נמצאת במצב מלא. זהו גם אחוז הצרכנים אשר נזרקים מהמערכת (מגיעים ואינם מקבלים שרות).

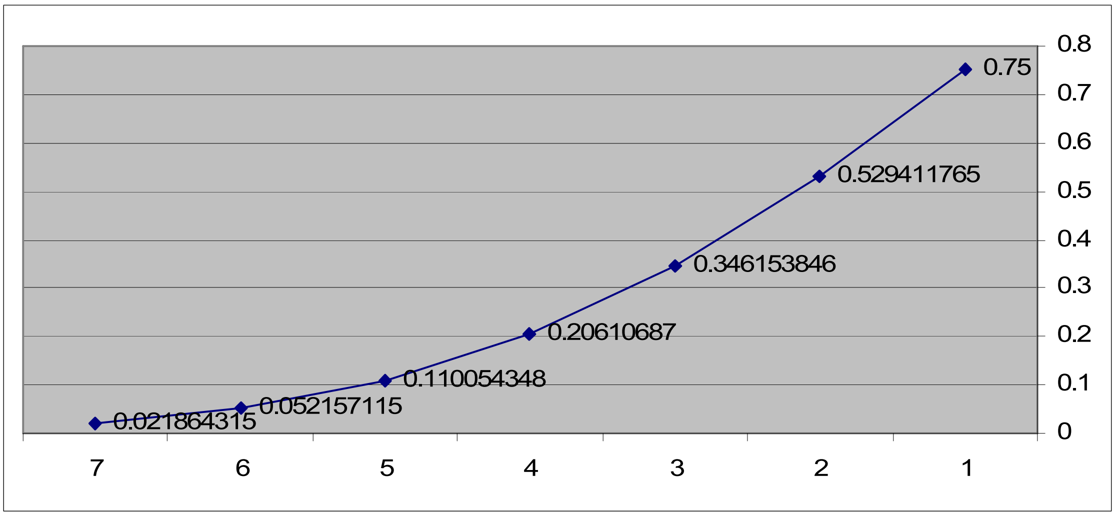
ו) מה המשמעות של $\lambda(1-\pi_c)$ במערכת $M/M/c/c$?

פתרון: זהו קצב הזרימה (כניסה ויציאה) האפקטיבי של לקוחות דרך המערכת. (לדוגמא: לצורך שימוש בנוסחת ליטל נשתמש בקצב זה).

פתרון תרגול 11

ז) צייר גרף (באקסל או באמצעות תוכנה אחרת) של π_c עבור מערכת $M/M/c/c$ עם $\lambda=12$, $\mu=4$ עבור $c=1,2,3,4,5,6,7$? (השתמש בפונקציה fact() לצורך חישוב k!).

__פתרון__: מצורף הגרף הדרוש.



ח) מהו מספר השרתים המינימאלי הדרוש לצורך כך שאחוז הצרכנים אשר מגיעים למערכת ונזרקים (בגלל שהמערכת מלאה) יהיה לכל היותר 5%.

__פתרון__: רואים שכאשר יש 2 שרתים אז "נזרקים" כ – 5.3% מהצרכנים. וכאשר יש 3 שרתים אז נזרקים כ- 3.5% מהצרכנים. לכן מספר השרתים המינימאלי הוא 3.

פתרון תרגול 11

2. ניתן לתאר את סניף הדואר באוניברסיטה כמערכת תורים $M/M/1$ בעלת קצב שרות $\mu=3$ לקוחות בדקה וקצב הגעת לקוחות $\lambda=2$ לקוחות בדקה.

א) נכון/לא נכון:

a. במידה והסניף נפתח בשעה 8:00 בבוקר (ריק) אז תוחלת מספר הצרכנים בסניף בשעה 9:00 היא בקרוב $\frac{2/3}{1-2/3}$. **פתרון**: נכון.

b. במידה והסניף נפתח בשעה 8:00 בבוקר (ריק) אז תוחלת מספר הצרכנים בסניף בשעה 8:01 היא בדיוק $\frac{2/3}{1-2/3}$. **פתרון**: לא נכון – הנוסחא היא עבור מצב יציב וכעבור דקה המערכת אינה במצב יציב (ואפילו לא קרובה לכך לאחר דקה).

c. הסיכוי שלקוח ישהה יותר מדקה במערכת (במצב יציב) הוא $\frac{1}{e}$. **פתרון**: נכון – על פי העובדה שזמן השהייה במערכת הוא $\exp(\mu-\lambda)$.

ב) חשב את תוחלת מספר הלקוחות אשר ממתנים ב**תור**.

פתרון:

$$L_q=\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\pi_k=\sum_{k=1}^{\infty}k\pi_k-\sum_{k=1}^{\infty}\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k-(1-\pi_0)=\underbrace{\frac{\rho}{1-\rho}}_{L}-\underbrace{\rho}_{L_s}=\frac{\rho^2}{1-\rho}=\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}=\frac{4}{3}$$

ג) חשב את זמן ההמתנה הממוצע ב**תור**.

פתרון: $\underbrace{L_q}_{4/3}\underbrace{=}_{little}\underbrace{\lambda}_{2}W_q \Leftarrow W_q=\frac{2}{3}$.

בדיקה נוספת: זמן השהייה במערכת הוא הסכום של זמן ההמתנה בתור וזמן השרות. לכן: $\underbrace{W}_{\frac{1}{3-2}}=\underbrace{W_q}_{2/3}+\underbrace{\frac{1}{\mu}}_{1/3}$

ד) מהו אחוז הצרכנים אשר אינו ממתין בתור?

פתרון: זה שווה לאחוז הזמן שהשרת בטל: $\pi_0=(1-\rho)=1/3$.

פתרון תרגול 11

ה) חשב את ההתפלגות הסטציונרית באמצעות פתרון משוואות שווי משקל הרגילות
$\left(\begin{matrix}\pi Q=0\\ \sum\pi_i=1\end{matrix}\right)$.

<u>פתרון</u>: מטרת תרגיל זה היא להראות שדרך הפתרון באמצעות משוואות שווי משקל מפורטות (כפי שנלמד בכתה) הוא קצת יותר פשוט מאשר משוואת שווי משקל רגילות.

להלן $\pi Q=0$:

$$\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \cdots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \cdots\\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & 0 & \cdots\\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots\\ 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \ddots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots\end{pmatrix}$$

אז המשוואות המתקבלות הן:

$$\lambda\pi_0=\mu\pi_1$$
$$\lambda\pi_{k-1}+\mu\pi_{k+1}=(\lambda+\mu)\pi_k \quad k=1,2,3,...$$

או

$$\pi_1=\frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$
$$\pi_{k+1}=\frac{\lambda+\mu}{\mu}\pi_k-\frac{\lambda}{\mu}\pi_{k-1} \quad k=1,2,3,...$$

אם כך:

$$\pi_1=\frac{\lambda}{\mu}\pi_0$$
$$\pi_2=\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0-\frac{\lambda}{\mu}\pi_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0$$
$$\pi_3=\frac{\lambda+\mu}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2\pi_0-\frac{\lambda}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\pi_0=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3\pi_0$$
$$....$$

רואים אם כך (באינדוקציה) ש $\pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0$ ומקבלים את התוצאה הסופית באמצאות משוואת "הסכום שווה לאחד": $\pi_0+\pi_1+\pi_2+....=1$ (שלב זה זהה לשימוש במשוואות שווי משקל מפורטות).

פתרון תרגול 11

ו) ברגע נתון, ישנם 3 אנשים בסניף הדואר. הפקידה בדואר, אינה מרגישה טוב, היא מצוברחת ועצבנית ורוצה להכין לעצמה קפה ולשבת קצת לבד בשקט. היא החליטה שאם יהיו בסניף 6 אנשים לפני שהיא עושה הפסקת קפה אז היא עוזבת את הכול והולכת הביתה. מה הסיכוי שתעזוב את הכול ותלך הביתה? (רמז: מודל המהמר).

פתרון: נסתכל על השרשרת המשוכנת:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

אמנם זוהי שרשרת עם מרחב מצבים אין סופי אבל אנחנו למעשה מתעניינים במצבים $\{0,1,2,3,4,5,6\}$ ויכולים לחשוב על שרשרת המרקוב בזמן בדיד, $\{X_n, n\ge 0\}$ עם מטריצת המעבר הבאה:

$$\tilde{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

זאת מטריצת המעבר של מודל המהמר עם $p=\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}$ ו $q=\dfrac{\mu}{\lambda+\mu}$.

אנו מעוניים לחשב את $f_{3,6}=P(\exists n\, X_n=6 \mid X_0=0)$. יש לנו נוסחא לכך מדף הנוסחאות: $f_{3,6}=\dfrac{1-\left(q/p\right)^3}{1-\left(q/p\right)^6}$

(נשים לב ש $\lambda\ne\mu$). עכשיו $q/p=\mu/\lambda=\dfrac{3}{2}$ ולכן $f_{3,6}=\dfrac{1-(3/2)^3}{1-(3/2)^6}=\dfrac{8}{35}$ (זהו הסיכוי שהפקידה "תעזוב הכול" ותלך הביתה).

פתרון תרגול 11

3. שרת דוא"ל (e-mail server) הוא מחשב אשר מקבל הודעות דוא"ל ומעביר אותם הלאה למחשבים אחרים או שרתים אחרים.

להלן נתונים לגבי שרת דוא"ל מסוים:

i. השרת מטפל בהודעות בסדר אשר הן מגיעות אליו. ואינו מטפל בהודעות במקביל.

ii. כאשר הודעה מגיעה אל השרת והוא אינו פנוי (מטפל כבר בהודעה אחרת) אז ההודעה אשר הגיעה ממתינה בזיכרון השרת במידה ויש שם מקום, אחרת ההודעה נזרקת.

iii. בשרת יש מקום בזיכרון ל 3 הודעות (מקום המתנה ל 3 הודעות).

iv. זמן הטיפול בהודעה הוא פרופורציונאלי לגודל ההודעה. כל קילו-בייט (KB) של הודעה לוקח 01. שנייה.

v. גודל ההודעות מפלג אקספוננציאלית עם תוחלת 100 KB והגדלים בלתי תלויים זה מזה.

vi. הודעות מגיעות על פי תהליך פואסון עם קצב λ הודעות בשנייה.

vii. ניתן להניח שהשרת עובד לפרק זמן מספיק ארוך.

א) תאר את שרת דוא"ל כמערכת תורים. מהו הסימון המתאים למערכת זו? מהם הפרמטרים?

<u>פתרון</u>: מערכת $M/M/1/K$ עם $K=4$, קצב שרות $\mu=1$ וקצב הגעת לקוחות λ.

ב) ייצג את מערכת התורים כתהליך לידה מוות ופתור משוואות שווי משקל מפורטות. (רמז: יש להפריד בין המקרים בהם $\lambda=1$ ו- $\lambda\neq1$).

<u>פתרון</u>: בדומה לפיתוח של תהליך לידה מוות כללי. יש לשים לב שמרחב המצבים הוא $S=\{0,1,2,3,4\}$. ומקבלים $\pi_k=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\pi_0$. אז

$\pi_0=\frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4}$. אם $\lambda=\mu$ אז $\pi_0=\frac{1}{5}$ (וכך גם $\pi_1,\dots,\pi_4$).

אם $\lambda\neq\mu$ אז במכנה יש תור הנדסי:

פתרון תרגול 11

$1+\frac{\lambda}{\mu}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^4=\sum_{i=0}^{4}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i=\frac{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{4+1}}{1-\frac{\lambda}{\mu}}$ ומכאן הפתרון (כמו בדף הנוחסאות).

<u>כעת הנח:</u> $\lambda \neq 1$:

ג) רשום ביטוי עבור אחוז ההודעות אשר מגיעות לשרת ונזרקות.

<u>פתרון</u>: זהו $\pi_4=\lambda^4\frac{1-\lambda}{1-\lambda^{4+1}}$.

ד) מהו מספר ההודעות הממוצע בשנייה אשר נכנסות אל השרת.

<u>פתרון</u>: $\lambda^*=\lambda(1-\pi_4)=\lambda(1-\lambda^4\frac{1-\lambda}{1-\lambda^5})=\frac{\lambda-\lambda^5}{1-\lambda^5}$.

ה) רשום ביטוי עבור תוחלת מספר ההודעות ב**תור**.

<u>פתרון</u>: $L_q=1\cdot\pi_2+2\cdot\pi_3+3\cdot\pi_4=\frac{1-\lambda}{1-\lambda^5}\left(\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4\right)$

ו) מהו זמן ההמתנה הממוצע של הודעה (הזמן מהרגע שהיא ממתינה בזיכרון השרת עד אשר השרת מתחיל לטפל בא).

<u>פתרון</u>: לפי נוסחת ליטל: $L_q=\lambda^* W_q$. (יש לנו את L ואת λ^* מסעיפים ד', ה'). ולכן

$$W_q=\frac{L_q}{\lambda^*}=\frac{1-\lambda}{\lambda-\lambda^5}\left(\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4\right)$$

ז) מהו זמן הטיפול הממוצע של הודעה (הזמן מהרגע שבו הגיעה הודעה עד אשר היא עוזבת את המערכת).

<u>פתרון</u>: דרך א: $W=\underbrace{1}_{1/\mu}+W_q$.

דרך ב: $L=1\cdot\pi_1+2\cdot\pi_2+3\cdot\pi_3+4\cdot\pi_4=\frac{1-\lambda}{1-\lambda^5}\left(\lambda+2\lambda^2+3\lambda^3+4\lambda^4\right)$

לפי נוסחת ליטל: $L=\lambda^* W$ ולכן $W=\frac{L}{\lambda^*}=\frac{1-\lambda}{\lambda-\lambda^5}\left(\lambda+2\lambda^2+3\lambda^3+4\lambda^4\right)$.

בדיקה (שדרך א' ודרך ב' זהות):

$\frac{1-\lambda}{\lambda-\lambda^5}\left(\lambda+2\lambda^2+3\lambda^3+4\lambda^4\right)=1+\frac{1-\lambda}{\lambda-\lambda^5}\left(\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4\right)$ השוויון הזה מתקיים.

צייר גרף (באקסל או תוכנה אחרת) אשר מכיל 3 עקומות כפונקציה של λ:

a. זמן ההמתנה הממוצע של הודעה.

פתרון תרגול 11

b. פרופורציית הזמן שבה השרת מנוצל.

c. מספר ההודעות הממוצע לשנייה אשר נזרקות.

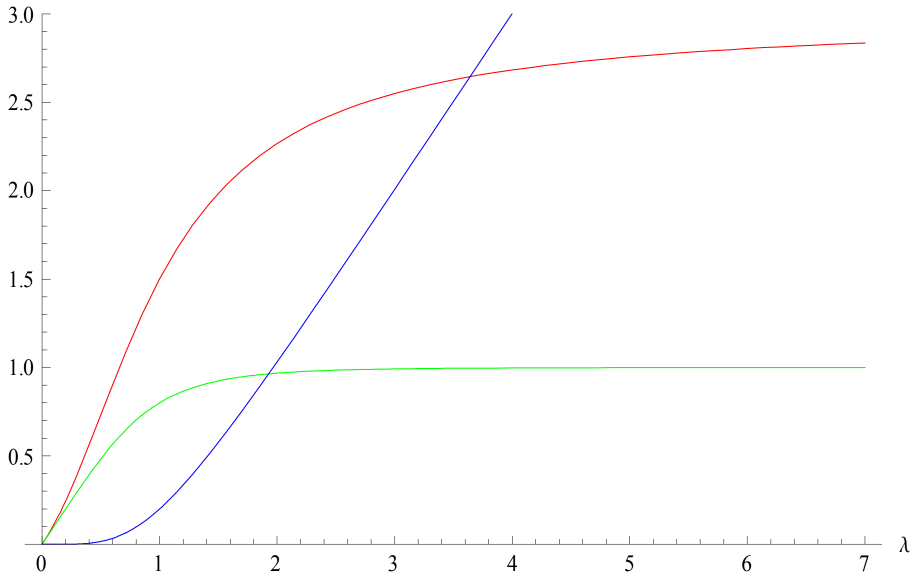
פתרון:

זמן ההמתנה הממוצע – ביטוי בסעיף ו'. באדום.

פרופורציית הזמן שהשרת מנוצל - $\frac{\lambda-\lambda^5}{1-\lambda^5}=1-\frac{1-\lambda}{1-\lambda^5}=1-\pi_0$. בירוק.

מספר הודעות ממוצע לשנייה אשר נזרקות

$\frac{\lambda^5-\lambda^6}{1-\lambda^5}=\lambda\lambda^4\frac{1-\lambda}{1-\lambda^5}=\lambda\pi_4$. בכחול.



הסברים: ראשית חשוב להבין שאלו גדלים בעלי יחידות שונות ולא ניתן להשוות את הגודל שלהם.

זמן ההמתנה הממוצע – כאשר λ גדל אז המערכת יותר עמוסה וזמן ההמתנה גדל. רואים שכאשר λ ממש גדול אז זמן ההמתנה שואף ל -3. זאת בגלל שאז המערכת כמעט תמיד עמוס במלואה וכל הודעה אשר נכנסת צריכה להמתין בתור שההודעות שלפנייה (יש 3 כאלו עם תוחלת 1 כל אחת) יסיימו.

פרופורציית הזמן שהשרת מנוצל – כאשר המערכת נהיית עמוס (λ גדל) אז השרת מנוצל כמעט 100% מהזמן.

מספר הודעות ממוצע לשנייה אשר נזרקות- ככל שהמערכת עמוסה יותר אז

פתרון תרגול 11

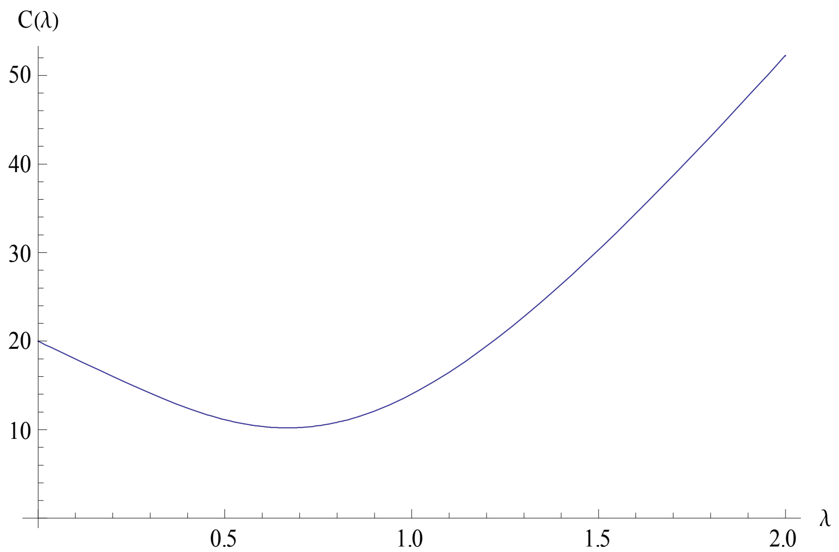
אחוז ההודעות הנזרקות קרוב יותר ל – 1. לכן כאשר λ די גדול, הגרף הכחול עולה בקרוב באופן לינארי ב - λ.

ח) הסבר את הגרף אשר התקבל בסעיף הקודם. (הוסבר לעיל).

ט) מנהל רשת התקשורת יכול לשלוט על λ. כל שנייה ובה השרת לא מנוצל עולה למנהל הרשת 20 אגורות. כל הודעה אשר נזרקת עולה למנהל הרשת 50 אגורות. מהו ה λ אשר מנהל הרשת יבחר?

פתרון: להלן פונקצית המחיר (זה המחיר הממוצע לשנייה):

$$C(\lambda) = 20\pi_0 + 50\lambda\pi_4 = \frac{1-\lambda}{1-\lambda^5}(20+50\lambda^5)$$



רואים שהמחיר ממוזער כאשר $\lambda \approx 0.7$. (ניתן גם לבצע אופטימיזציה באופן מדויק אבל זה לא בקורס הזה).

פתרון תרגול 11

שאלת בונוס (מומלץ לנסות):

4. מערכת תורים $M/E_2/1/2$ היא מערכת בעלת הגעות של לקוחות על פי תהליך פואסון עם קצב λ וזמני שרות בלתי תלויים המפולגים $erlang(2,2\mu)$. למערכת שרת יחיד ומקום המתנה יחיד בתור.

א) מהו זמן השרות הממוצע? מהי שונות זמן השרות?

פתרון: השרות מתפלג $erlang(2,2\mu)$ אז תוחלת זמן השרות היא $\frac{2}{2\mu}=\frac{1}{\mu}$.

שונות זמן השרות היא $\frac{2}{(2\mu)^2}=\frac{1}{2\mu^2}$.

ב) מדל את מצב מערכת זו כתהליך ספירה מרקובי. מה המשמעות של המצבים? מהי מטריצת הגנרטור? (רמז: זהו לא תהליך לידה מוות).

פתרון:

נמדל את המערכת באמצעות המצבים הבאים:

מצב	מספר צרכנים במערכת	שלב השרות של הצרכן שבשרות
0	0	אין צרכן בשרות
1	1	שלב שני
2	1	שלב ראשון
3	2	שלב שני
4	2	שלב ראשון

אנו משתמשים כאן בעובדה שפילוג ארלנג הוא פילוג של סכום של אקספוננציאלים. ואז אפשר לחשוב על השרות כ – "דו- שלבי".

להלן מטריצת הגנראטור:

$$Q=\begin{array}{c} \\ 0\\1\\2\\3\\4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 2\mu & -(\lambda+2\mu) & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 2\mu & -(\lambda+2\mu) & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 2\mu & -2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu & -2\mu \end{pmatrix} \end{array}$$

פתרון תרגול 11

ג) הנח $\lambda = 2$ $\mu = 3$, מה תוחלת מספר הצרכנים במערכת?

פתרון:

לאחר פתרון משוואות שווי משקל ($\begin{matrix}\pi Q = 0 \\ \sum \pi_i = 1\end{matrix}$) מקבלים:

$\pi = \frac{1}{59}\begin{pmatrix}27 & 9 & 12 & 7 & 4\end{pmatrix}$.

ומכאן תוחלת מספר הצרכנים במערכת:

$$L = 0 \cdot \pi_0 + 1 \cdot (\pi_1 + \pi_2) + 2 \cdot (\pi_3 + \pi_4) = \frac{43}{59} = 0.728814$$

ד) כאת הסתכל על מערכת $M/M/1/2$. מה ההבדלים בין מערכת זו למערכת $M/E_2/1/2$?

פתרון: אלו מערכות מאוד דומות: בשתי המערכות יש שרת יחיד ומקום יחיד בתור. בשתי המערכות תהליך הגעת הצרכנים הוא פואסוני עם פרמטר $\lambda = 2$. בשתי המערכות תוחלת זמן השרות היא $\frac{1}{3}$. ההבדלים הם רק בכך שהשרות במערכת $M/E_2/1/2$ הוא בעל שונות יותר קטנה (פילוג ארלנג עם שונות $\frac{1}{2\mu^2} = \frac{1}{18}$ לעומת פילוג אקספוננציאלי עם שונות $\frac{1}{\mu^2} = \frac{1}{3}$).

ה) חשב את תוחלת מספר הצרכנים במערכת $M/M/1/2$. איזה מערכת יותר עמוסה? האם יש הסבר אינטואיטיבי לדבר?

פתרון: במערכת $M/M/1/2$:

$$\pi_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1 - 2/3}{1 - \left(2/3\right)^{2+1}} = \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{9}{19} \quad k = 0,1,2$$

$$L = \frac{9}{19}\left(0 \cdot 1 + 1 \cdot \frac{2}{3} + 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = \frac{14}{19} = 0.7368 .$$

רואים שתוחלת מספר הצרכנים בשתי המערכות דומה. למרות זאת ניתן להבחין שעבור מערכת $M/E_2/1/2$ התוחלת קצת יותר קטנה. זאת תופעה ידועה בתורת התורים (לא נלמדה בקורס זה) שעבור מערכות עם זמן שרות מפילוג כללי (לא בהכרח אקספוננציאלי) הקטנת שונות זמן השרות מקטינה את תוחלת מספר הצרכנים במערכת.