תרגול 1 (22/10/2007)

פרק א-2: חזרה על הסתברות, ותוצאות מתמטיות נוספות שימושיות.

2. הוכח שמתקיים: $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

א. בעזרת הבינום של ניוטון: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$. **פתרון**: נציב $a=b=1$.

ב. באמצעות הוכחה קומבינטורית. **פתרון**: נספור את כל הוקטורים הבינאריים באורך n (וקטורים של 0 ו-1. כלומר, לדוגמא $(1,0,...,1)$). מצד אחד, בכל אחד מ- n המיקומים אפשר שיהיה 0 או 1 (שתי אופציות) לכן שווה ל- 2^n. מצד שני, ניתן לחלק את קבוצת כל הוקטורים הבינאריים באורך n ל- n קבוצות, כך שבקבוצה ה- k יש k אחדים ו- $n-k$ אפסים. מספר הוקטורים בקבוצה ה- k הוא $\binom{n}{k}$ ולכן בכל הקבוצות $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$.

3. הוכח שמתקיים (טור גיאומטרי): $\sum_{k=0}^{n}a^k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. **פתרון**:

$$(1+a+a^2+...+a^n)(a-1) = (a+a^2+...+a^n+a^{n+1}) - (1+a+a^2+...+a^n)$$

$$= (a+a^2+...+a^n) + a^{n+1} - 1 + (a+a^2+...+a^n) = a^{n+1}-1$$

4. הוכח שמתקיים:

א. $|a|<1$, $\sum_{k=0}^{\infty}a^k = \frac{1}{1-a}$. **פתרון**: $\sum_{k=0}^{\infty}a^k = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}a^k\right) = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(a^{n+1}\right)-1}{a-1} = \frac{1}{1-a}$.

ב. $|a|<1$, $\sum_{k=1}^{\infty}a^k = \frac{a}{1-a}$. **פתרון**: $\sum_{k=1}^{\infty}a^k = a\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a^k = \frac{a}{1-a}$.

5. הוכח שמתקיים (טור טלסקופי): $\sum_{k=0}^{N}(A_k - A_{k+1}) = A_0 - A_{N+1}$. **פתרון**:

$$\sum_{k=0}^{N}(A_k - A_{k+1}) = (A_0-A_1)+(A_1-A_2)+(A_2-A_3)+...+(A_{N-1}-A_N)+(A_N-A_{N+1})$$

$$= A_0 + (-A_1+A_1) + (-A_2+A_2) + ... + (-A_N+A_N) - A_{N+1} = A_0 - A_{N+1}$$

תרגול 1 (22/10/2007)

6. יהי Z משתנה מקרי: $P_Z(k)=\begin{cases}\frac{1}{k(k+1)} & k=1,2,3,...\\ 0 & else\end{cases}$.

א. הוכח שמדובר בפונקצית הסתברות. **פתרון**: קל ראות ש: $P_Z(k)\ge 0$ לכל k. בנוסף נראה:

$$\sum_{k=1}^{\infty}P_Z(k)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

ב. חשב $E(Z)$. **פתרון**: $EZ=\sum_{k=1}^{\infty}kP_Z(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$ וזהו הטור ההרמוני וידוע כי הוא מתבדר (ראה במחברות קורס שנה א' באינפי) התוחלת היא אינסופית.

7. הוכח שפונקצית מסת ההסתברות של המשתנים המקריים הבאים היא אכן פונקציית מסת הסתברות (חיובית וסכום האיברים הוא 1) – בינומי, גיאומטרי סופר ניסיונות, גיאומטרי סופר כישלונות ופואסוני. **פתרון**: ראה במחברות הקורסים הסתברות והתפלגויות.

8. הוכח שמשתנה מקרי אקספוננציאלי הוא חסר זיכרון. **פתרון**: יהי $X\sim\exp(\lambda)$, אז:

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

$$F_X(x)=P(X\le x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

$$\overline{F_X}(x)=1-F_X(x)=P(X>x)=\begin{cases}e^{-5\lambda} & x\ge 0\\ 0 & x<0\end{cases}.$$

למ"מ האקספוננציאלי יש תכונת חוסר זיכרון. נוכיח זאת: נניח שני זמנים על ציר הזמן t_1 ו- t_2, כך ש: $t_2>t_1>0$. נסמן: $s=t_2-t_1$

$$(*)\quad P(X>t_1+s\,|\,X>t_1)=\frac{P(X>t_1+s)}{P(X>t_1)}=\frac{e^{-\lambda(t_1+s)}}{e^{-\lambda t_1}}=e^{-\lambda s}=P(X>s)$$

$$P(X>t_1+s)=P(X>t_1+s\,|\,X>t_1)P(X>t_1)\overset{(*)}{=}P(X>s)P(X>t_1)$$

$\overline{F_X}(t_1+s)=\overline{F_X}(t_1)\cdot\overline{F_X}(s)$

9. בתאריך 1/10/07 הוקמה חברת הביטוח "על חשבוננו" בע"מ המוכרת חוזי ביטוח כלי-שייט. "מאורע הביטוח" הינו מאורע שבגינו חייב המבטח (חברת הביטוח) לשלם הטבה למבוטח. N_i הוא משתנה מקרי השווה למספר מאורעות הביטוח בקרב מבוטחי החברה בחודש ה- i מיום הקמתה. כעת, נניח ש- N_i הם שווי התפלגות לכל i. נסמן התפלגות זו ב- N. נתון N מתפלג פואסון עם עוצמה $\lambda=3.4$:

א. צייר את פונקצית ההסתברות של המשתנה המקרי N, ומקם את $E(N)$ על הגרף.

ב. Y שווה למספר מאורעות הביטוח בקרב המבוטחים בשנה. כיצד מתפלג Y ? **פתרון**: פואסון.

1) הוכח בעזרת קונבולוציה. **פתרון**: ראה בחוברת הקורס.

2) הוכח בעזרת הכפלת פונקיות יוצרות. **פתרון**: ראה בחוברת הקורס.

ג. בסוף כל חודש סמנכ"ל השיווק של החברה מקבל בונוס אם מספר מאורעות הביטוח בחודש החולף היה נמוך או שווה ל- 2. מה התפלגות, תוחלת ושונות המשתנים המקריים הבאים:

1) W_1 = מספר הבונוסים שיקבל הסמנכ"ל בחודש אוקטובר. **פתרון**: מתפלג ברנולי.

$$X_i=\begin{cases}0 & no\ \ bonus\ \ in\ \ month\ \ i\\ 1 & bonus\ \ in\ \ month\ \ i\end{cases}.$$

$$p=P(X_i=1)=1-P(X_i=0)=P(N\le 2)=\sum_{k=0}^{2}\frac{e^{-3.4}(3.4)^k}{k!}\ \Rightarrow\ X_i\overset{iid}{\sim}B(p).$$

$$W_1=X_1\ \Rightarrow\ W_1\sim B(p).$$

2) W_2 = מספר החודשים שעברו מיום הקמת החברה עד אשר יקבל הסמנכ"ל בונוס לראשונה (כולל חודש הבונוס). **פתרון**: מתפלג גיאומטרי (סופר ניסיונות).

$$P(W_2=k)=(1-p)^{k-1}p\quad k=1,2,3,...$$

3) W_3 = מספר החודשים שעברו מיום הקמת החברה שבהם הסמנכ"ל לא יקבל בונוס, עד אשר יקבל בונוס לראשונה. **פתרון**: מתפלג גיאומטרי (סופר כישלונות).

$P(W_3=k)=(1-p)^k p\quad k=0,1,2,...$. נשים לב ש- $W_3=W_2-1$.

תרגול 1 (22/10/2007)

4) W_4 = מספר החודשים בשנה הראשונה בהם יקבל הסמנכ"ל בונוס. **פתרון**: מתפלג בינומי.

$$W_4 \sim Bin(p,12)$$

$$P(W_4 = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \qquad k = 0,1,2,\ldots,n.$$

5) W_5 = מספר החודשים שיחלפו עד שהסמנכ"ל יקבל 3 בונוסים (כולל הבונוס השלישי).

פתרון: מתפלג בינומי שלילי (סופר ניסיונות).

$$P(W_5 = k) = \binom{k-1}{3-1} p^3 (1-p)^{k-3} \qquad k = 3,4,5,\ldots.$$

6) W_6 = מספר החודשים בהם הסמנכ"ל לא יקבל בונוסים עד שהסמנכ"ל יקבל 3 בונוסים.

פתרון: מתפלג בינומי שלילי (סופר כישלונות).

$$P(W_6 = k) = \binom{3+k-1}{3-1} p^3 (1-p)^k \qquad k = 0,1,2,\ldots$$ נשים לב ש- $W_6 = W_5 - 3$.

7) W_7 = מספר הבונוסים שיתקבלו ברבעון הראשון של השנה הראשונה (ינואר עד מרץ), בהינתן שבשנה הראשונה יתקבלו 2 בונוסים. **פתרון**: מתפלג היפרגיאומטרי.

$$P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = k \,\middle|\, \sum_{i=1}^{12} X_i = 2\right) = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = k, \sum_{i=4}^{12} X_i = 2-k\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i = 2\right)} = \frac{P\left(\sum_{i=1}^{3} X_i = k\right) P\left(\sum_{i=4}^{12} X_i = 2-k\right)}{P\left(\sum_{i=1}^{12} X_i = 2\right)}$$

$$= \frac{\binom{3}{k} p^k (1-p)^{3-k} \cdot \binom{9}{2-k} p^{2-k} (1-p)^{9-(2-k)}}{\binom{12}{2} p^2 (1-p)^{12-2}} = \frac{\binom{3}{k} \cdot \binom{9}{2-k}}{\binom{12}{2}} \qquad k = 0,1,2$$

8) W_8 = מספר מאורעות הביטוח שיתרחשו ברבעון השנה הראשונה (ינואר עד מרץ), בהינתן שבשנה הראשונה יהיו 36 מאורעות ביטוח. **פתרון**: בינומי.

$$P(\sum_{i=1}^{3}N_i=k\left|\sum_{i=1}^{12}N_i=36\right.)=\frac{P(\sum_{i=1}^{3}N_i=k,\sum_{i=4}^{12}N_i=36-k)}{P(\sum_{i=1}^{12}N_i=36)}=\frac{P(\sum_{i=1}^{3}N_i=k)P(\sum_{i=4}^{12}N_i=36-k)}{P(\sum_{i=1}^{12}N_i=36)}$$

$$=\frac{e^{-(3\cdot 3.4)}(3\cdot 3.4)^k}{k!}\frac{e^{-(9\cdot 3.4)}(9\cdot 3.4)^{36-k}}{(36-k)!}\left(\frac{e^{-(12\cdot 3.4)}(12\cdot 3.4)^{36}}{36!}\right)^{-1}=\binom{36}{k}\left(\frac{3}{12}\right)^k\left(\frac{9}{12}\right)^{36-k}$$

9) נתון נוסף – לפי החלטת דירקטוריון החברה, בסוף כל חודש סמנכ״ל השיווק של החברה יפוטר אם מספר מאורעות הביטוח בחודש החולף היה גבוה או שווה ל- 5. מה התפלגות, תוחלת ושונות המשתנה המקרי הבא:

W_9 = מספר הבונוסים שינתנו לסמנכ״ל שיווק בשנה הראשונה, בהינתן שבשנה הראשונה יפוטרו 2 סמנכ״לי שיווק. **__פתרון__**: נתבונן בתוצאת האפשריות לגבי הסמנכ״ל בסוף כל חודש. נסמן את ההסתברות להתרחשות תוצאות אלו: p_1 - הסיכוי שהסמנכ״ל יקבל בונוס, p_2 - הסיכוי שהסמנכ״ל יפוטר, p_3 - ״אחרת״. קל לראות ש: $p_1+p_2+p_3=1$.

כעת, מכיוון שידוע שב- 2 מתוך 12 החודשים פוטר סמנכ״ל השיווק, נוכל להתבונן אך ורק ביתר 10 החודשים, שבהם לא פוטר הסמנכ״ל. בהינתן שידוע שב- 10 החודשים הללו סמנכ״ל השיווק לא פוטר:

$\frac{p_1}{1-p_2}$ - הסיכוי שיקבל בונוס בהינתן שלא יפוטר,

$\frac{p_3}{1-p_2}$ - הסיכוי ל״אחרת״ בהינתן שלא יפוטר.

לכן: $W_9\sim Bin\left(n,\frac{P_1}{1-p_2}\right)$.

תרגול 1 (22/10/2007)

10. תחנת הדלק של קניון חיפה נפתחת בשעה 07:00. נסמן ב- T_n את הזמן שעבר מהגעת המכונית ה- n ועד הגעת המכונית ה- $n+1$ (T_1 הוא הזמן שעבר מפתיחת התחנה ועד הגעת המכונית הראשונה).

$T_n \sim \exp(\lambda = 5)$.

$$f_{T_n}(t) = \begin{cases} 5e^{-5t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$F_{T_n}(t) = P(T_n \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-5t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$\overline{F}_{T_n}(t) = 1 - F_{T_n}(t) = P(T_n > t) = \begin{cases} e^{-5t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

ד. $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ הוא הזמן שעבר מפתיחת התחנה ועד הגעת המכונית ה- n. כיצד מתפלג S_n?

<u>פתרון</u>: למדנו בקורס התפלגויות שסכום של משתנים מקריים אקספוננציאליים (כלומר: $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$), מתפלג ארלנג. נאמר שמשתנה מקרי S_n מתפלג ארלנג עם (n, λ) אם:

$S_n > 0 \quad f_{S_n}(t) = f_{T_1+T_2+...+T_n}(t) = \dfrac{e^{-5t}\,5(5t)^{n-1}}{(n-1)!}$. אבל איך נוכיח? ראה הוכחה בחוברת הקורס.

ה. התחנה, כאמור, נפתחה ב- 07:00. בשעה 07:10 עדיין לא הגיעה אף מכונית. V הוא הזמן שיעבור משעה 07:10 ועד להגעת המכונית הראשונה. כיצד מתפלג V? יש להוכיח זאת! **<u>פתרון</u>**: $V \sim \exp(\lambda = 5)$ (כבר הוכחנו את זה שתשובה לשאלה 8).

ו. בתחנת הדלק בקניון חיפה 2 מתדלקים סמי וסוסו:

- $X_1 \sim \exp(\mu_1 = 8)$ - הזמן שלוקח לסמי לתדלק.
- $X_2 \sim \exp(\mu_2 = 3)$ - הזמן שלוקח לסוסו לתדלק.

1) בשעה 08:00 בדיוק סמי וסוסו החלו לתדלק 2 רכבים:

א) מה הסיכוי שסמי סיים לתדלק לפני סוסו. **<u>פתרון</u>**: $P(X_1 < X_2) = \dfrac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$.

תרגול 1 (22/10/2007)

$$P(\min(X_1,X_2)=X_1)=P(X_1<X_2)=\int_{X_2=0}^{\infty}\int_{X_1=0}^{X_2}\mu_1 e^{-\mu_1 x_1}\cdot\mu_2 e^{-\mu_2 x_2}dx_1dx_2$$

$$=\int_{X_2=0}^{\infty}\mu_2 e^{-\mu_2 x_2}(1-e^{-\mu_1 x_2})dx_2=\int_{X_2=0}^{\infty}\mu_2 e^{-\mu_2 x_2}dx_2-\mu_2\int_{X_2=0}^{\infty}e^{-(\mu_1+\mu_2)x_2}dx_2=1-\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}$$

$$=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}$$

לכן קיבלנו ש : $P(X_1<X_2)=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}=\frac{8}{8+3}=\frac{8}{11}$

מסקנה: יהיו $X_1,X_2,..,X_n$ מ"מ אקספוננציאלים בלתי תלויים עם פרמטר $\mu_1,\mu_2,..,\mu_n$ בהתאמה (n מתדלקים), אז :

$$P(\min(X_1,X_2,..,X_n)=X_1)=P(X_1<\min(X_2,...,X_n)=\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2+...+\mu_n}$$

התפלגות אקספוננציאלית עם $\sum_{i=1}^{n}\mu_i$.

ב) מה הסיכוי שהגיע לתחנה רכב נוסף בטרם סמי או סוסו סיימו לתדלק לפני סוסו.

פתרון: $P(\min(X_1,X_2,V)=V)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu_1+\mu_2}$.

ג) מה התפלגות, תוחלת ושונות הזמן שעבר משעה 08:00 ועד שהרכב הראשון יצא מתודלק מהתחנה. **פתרון**: $W=\min(X_1,X_2)\sim\exp(\mu_1+\mu_2)$. הרכב הראשון יוצא מתחנת הדלק, כאשר הראשון במבין סמי וסוסו מסיים לתדלק. זהו בעצם המינימום מבין X_1 ו- X_2 . נסמן ב- $W=\min(X_1,X_2)$.

$$\overline{F_W}(w)=1-F_W(w)=P(W<w)=P(\min(X_1,X_2)>w)=P(X_1>w,X_2>w)$$

$$=P(X_1>w)P(X_2>w)=e^{-\mu_1 w}e^{-\mu_2 w}=e^{-(\mu_1+\mu_2)w}\quad w>0$$

מסקנה: יהיו $X_1, X_2,.., X_n$ מ"מ אקספוננציאלים בלתי תלויים עם פרמטר $\mu_1, \mu_2,.., \mu_n$ בהתאמה (n מתדלקים), אז $\min(X_1, X_2,.., X_n)$ התפלגות אקספוננציאלית עם $\sum_{i=1}^{n} \mu_i$.

ד) נניח שכעת שבנוסף לנתונים נתון שהתחרות בין סמי לסוסו (תחרות לגבי מי יסיים לתדלק ראשון) מתרחשת ביום שישי בבוקר כאשר בכניסה לתחנה ממתינים רכבים למכביר (נניח שאינסוף רכבים). W הוא מספר הרכבים שתדלק סמי לפני שסוסו הספיק לסיים לתדלק את הרכב הראשון. כיצד מתפלג W? **פתרון**: ניתן להתבונן במקרה זה כסדרה של תחרויות בין סמי וסוסו. המנצח בתחרות הוא זה שמסיים לתדלק ראשון מבין השניים. הסיכוי שסמי יסיים ראשון בתחרות מסוימת הוא $\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}$ ואילו הסיכוי שסוסו יסיים ראשון בתחרות מסוימת הוא $\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.

- כאשר $W = 0$ משמעות הדבר שנערכה תחרות אחת בלבד, שבה סוסו ניצח. ההסתברות לכך היא: $\frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.
- כאשר $W = 1$ משמעות הדבר שנערכו 2 תחרויות. בראשונה סמי ניצח ובשנייה סוסו ניצח. ההסתברות לכך היא: $\left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right)^1 \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.
- כאשר $W = 2$ משמעות הדבר שנערכו 3 תחרויות בראשונה ובשנייה סמי ניצח ובשלישית סוסו ניצח. ההסתברות לכך היא: $\left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right)^2 \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.
- כאשר $W = 3$ משמעות הדבר שנערכו 4 תחרויות בראשונה, בשנייה ובשלישית סמי ניצח ואילו ברביעית סוסו ניצח. ההסתברות לכך היא: $\left(\frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\right)^3 \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$.

- כאשר $W=n$ משמעות הדבר שנערכו $n+1$ תחרויות כאשר ב- n התחרויות הראשונות סמי ניצח ואילו בתחרות ה- $n+1$ סוסו ניצח. ההסתברות לכך היא: $\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\left(\frac{\mu_1}{\mu_1+\mu_2}\right)^W$.

לפיכך: $W\sim Geo\left(\frac{\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\right)$ (גיאומטרי סופר כשלונות).

12. הוכח באינדוקציה ש- $\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. **<u>פתרון</u>**:

א. בסיס: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=1$:

ב. $\sum_{i=0}^{1}a^i=a^0+a^1=1+a=(1+a)\frac{(1-a)}{(1-a)}=\frac{1-a^2}{1-a}=\frac{a^2-1}{a-1}$.

ג. צעד: נניח שהטענה נכונה עבור n. כלומר, נניח $\sum_{i=0}^{n}a^i=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר עבור: $\sum_{i=0}^{n+1}a^i=\frac{a^{n+2}-1}{a-1}$. ההוכחה:

$$\sum_{i=0}^{n+1}a^i=a^{n+1}+\sum_{i=0}^{n}a^i=a^{n+1}+\frac{a^{n+2}-1}{a-1}=\frac{a^{n+1}(a-1)+a^{n+1}-1}{a-1}=\frac{a^{n+2}-1}{a-1}$$

13. נתון $X\sim\exp(\lambda)$. הוכח באינדוקציה שלכל n טבעי ואי-שלילי מתקיים $E(X^n)=\frac{n!}{\lambda^n}$. **<u>פתרון</u>**:

טענת עזר:

$$E(X^n)=\int_0^\infty x^n\lambda e^{-\lambda x}dx=\left[x^n(-e^{-\lambda x})\right]_0^\infty+n\int_0^\infty x^{n-1}\lambda e^{-\lambda x}dx=0+n\int_0^\infty x^{n-1}\lambda e^{-\lambda x}dx=\frac{n}{\lambda}E(X^{n-1})$$

קיבלנו: $E(X^n)=\frac{n}{\lambda}E(X^{n-1})$. עכשיו האינדוקציה:

א. בסיס: $E(X^0)=E(1)=1\cdot 1=\frac{1}{\lambda}$.

תרגול 1 (22/10/2007)

ב. צעד: נניח $E(X^n)=\frac{n!}{\lambda^n}$: $E(X^{n+1})\overset{\text{טענת העזר}}{=}\frac{n+1}{\lambda}E(X^n)\overset{\text{ההנחה}}{=}\frac{n+1}{\lambda}\frac{n!}{\lambda^n}=\frac{(n+1)!}{\lambda^{n+1}}$.

14. הוכח באינדוקציה ש- $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}$.

15. (שאלה 15 לא הופיע במקור בקובץ תירגול 1) הוכח באינדוקציה: $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$. **<u>פתרון</u>**:

א. בסיס: נוכיח שהטענה נכונה עבור $n=1$: $\sum_{i=1}^{1} i=1=\frac{1(1+1)}{2}$.

ב. צעד: נניח שהטענה נכונה עבור n. כלומר, נניח $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$, ונוכיח שהטענה נכונה עבור $n+1$, כלומר עבור:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i=\frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

ההוכחה:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i=(n+1)+\sum_{i=1}^{n} i=(n+1)+\frac{n(n+!)}{2}=(n+1)\left[1+\frac{n}{2}\right]=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$