פתרון תרגיל 3

2) א) בתרגול ניתנה הגדרה לתהליך ברנולי. ראינו בהגדרה שעל מנת שהתהליך יקרא "תהליך ברנולי" צריך שיתקיימו 2 תנאים:

(1) צריך ש: $X_1, X_2, \ldots$ יהיו בלתי תלויים. לא רשום במפורש שכיוון הפניה של רכב אחד אינו תלוי בכיוון הפניה של אחר. לכן, ע"מ להציג את התהליך כתהליך ברנולי עלינו להניח שאי תלות מתקיימת.

(2) צריך להראות ש: $P(X_n=1)=p$ וגם $P(X_n=0)=1-p$ לכל n.

כאן אכן נתון: $P(X_n=1)=0.62$ וגם $P(X_n=0)=0.38$ לכל n.

$X_n \overset{iid}{\sim} Ber(0.62)$

ב) ①

$$P(X_1=0, X_8=0, X_{200}=0) \overset{\text{אי תלות}}{=} P(X_1=0)\,P(X_8=0)\,P(X_{200}=0) = (0.38)^3.$$

②

$$P(X_{10}=0 \mid X_3=1, X_7=1) \overset{\text{אי תלות}}{=} P(X_{10}=0) = 0.38$$

ג) ① במילים: ההסתברות שהמכונית הראשונה לא פנתה שמאלה, וגם ששתי המכוניות הראשונות לא פנו שמאלה, וגם שאחת מתוך 3 המכוניות הראשונות פנתה שמאלה, וגם שאחת מתוך 4 המכוניות הראשונות פנתה שמאלה.

$$P(N_1=0, N_2=0, N_3=1, N_4=1)$$

ע"מ להתמודד עם בעית תלות המשתנים, נעבור לדבר על אינקרימנטים

$$= P(N_1-N_0=0-0,\ N_2-N_1=0-0,\ N_3-N_2=1-0,\ N_4-N_3=1-1)$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים בלתי תלויים}}{=} P(N_1-N_0=0)\,P(N_2-N_1=0)\,P(N_3-N_2=1)\,P(N_4-N_3=0)$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים סטציונריים}}{=} P(N_1=0)\,P(N_1=0)\,P(N_1=1)\,P(N_1=0) = (0.38)^3(0.62)$$

② במילים: ההסתברות ש-2 מתוך 8 המכוניות הראשונות פנו שמאלה, וגם 5 מתוך 15 המכוניות הראשונות פנו שמאלה, וגם 1 מתוך 7 המכוניות הראשונות פנו שמאלה, וגם 1 מתוך 2 המכוניות הראשונות פנו שמאלה.

תר' 3 עמ' 2

$$P(N_8=2,\ N_{15}=5,\ N_7=1,\ N_5=1)$$

$$=P(N_5-N_0=1-0,\ N_7-N_5=1-1,\ N_8-N_7=2-1,\ N_{15}-N_8=5-2),$$

אינקרימנטים בלתי תלויים

$$=P(N_5-N_0=1)\,P(N_7-N_5=0)\,P(N_8-N_7=1)\,P(N_{15}-N_8=3)$$

אינקרימנטים סטציונריים

$$=P(N_5=1)\,P(N_2=0)\,P(N_1=1)\,P(N_7=3)$$

$$=\binom{5}{1}(0.62)^1(0.38)^{5-1}\binom{2}{0}(0.62)^0(0.38)^{2-0}\binom{1}{1}(0.62)^1(0.38)^{1-1}\binom{7}{3}(0.62)^3(0.38)^{7-3}$$

③ במילים: ההסתברות שהמכונית הראשונה פנתה שמאלה, וגם ששתיים מתוך 3 הראשונות פנו שמאלה, וגם ש-2 מתוך 5 הראשונות פנו שמאלה.

$$P(N_1=1,\ N_3=2,\ N_5=2)$$

$$=P(N_1-N_0=1-0,\ N_3-N_1=2-1,\ N_5-N_3=2-2)$$

אינקרימנטים בלתי תלויים

$$=P(N_1-N_0=1)\,P(N_3-N_1=1)\,P(N_5-N_3=0)$$

אינקרימנטים סטציונריים

$$=P(N_1=1)\,P(N_2=1)\,P(N_2=0)$$

$$=\binom{1}{1}(0.62)^1(0.38)^{1-1}\binom{2}{1}(0.62)^1(0.38)^{2-1}\binom{2}{0}(0.62)^0(0.38)^{2-0}$$

④

$$P(N_{15}=12,\ N_8=6)=P(N_8=6,\ N_{15}-N_8=12-6)$$

אינקרימנטים בלתי תלויים — אינקרימנטים סטציונריים

$$=P(N_8=6)\,P(N_{15}-N_8=6)=P(N_8=6)\,P(N_7=6)$$

$$=\binom{8}{6}(0.62)^6(0.38)^{8-6}\binom{7}{6}(0.62)^6(0.38)^{7-6}$$

⑤

$$P(N_{15}=12\mid N_8=6)=\frac{P(N_{15}=12,\ N_8=6)}{P(N_8=6)}=\frac{P(N_8=6,\ N_{15}-N_8=12-6)}{P(N_8=6)}$$

אינקרימנטים בלתי תלויים — אינקרימנטים סטציונריים

$$=\frac{P(N_8=6)\,P(N_{15}-N_8=6)}{P(N_8=6)}=P(N_{15}-N_8=6)=P(N_7=6)=\binom{7}{6}(0.62)^6(0.38)^{7-6}$$

6. א)

$$E(N_3) = np = 3(0.8)$$

ב)

$$E(N_3 + 4N_7) = E(N_3) + 4E(N_7) = 3(0.8) + 4\cdot 7(0.8) = 24.8$$

ג)

$$E(N_7 \mid N_3) = E(N_7 - N_3 + N_3 \mid N_3) = E(N_3 + (N_7 - N_3) \mid N_3)$$

$$= E(N_3 \mid N_3) + E(N_7 - N_3 \mid N_3) = N_3 + E(N_7 - N_3 \mid N_3)$$

אינקרימנטים בלתי תלויים

אינקרימנטים סטציונריים

$$\overset{\downarrow}{=} N_3 + E(N_7 - N_3) = N_3 + E(N_4) = N_3 + 4(0.8)$$

ד) <u>דרך I</u>

$$E(N_7 \cdot N_3) = E\left[E(N_7 N_3 \mid N_3)\right] = E\left[N_3 E(N_7 \mid N_3)\right]$$

$$= E\left[N_3(N_3 + 4(0.8))\right] = E\left[N_3^2 + 3.2N_3\right] = E(N_3^2) + 3.2E(N_3)$$

$$= Var(N_3) + \left[E(N_3)\right]^2 + 3.2E(N_3) = 3pq + (3p)^2 + 3.2(3p)$$

$$= 3(0.8)(1-0.8) + (3(0.8))^2 + 3.2(3(0.8)) = 13.92$$

<u>דרך II</u>

$$E(N_7 \cdot N_3) = E((N_7 - N_3 + N_3)N_3) = E((N_3 + (N_7 - N_3))N_3)$$

$$= E(N_3^2 + (N_7 - N_3)N_3) = E(N_3^2) + E\left[(N_7 - N_3)N_3\right]$$

אינקרימנטים בלתי תלויים

$$\overset{\downarrow}{=} Var(N_3) + (E(N_3))^2 + E(N_7 - N_3)E(N_3)$$

$$= Var(N_3) + (E(N_3))^2 + E(N_4)E(N_3)$$

$$= 3pq + (3p)^2 + (4p)(3p)$$

$$= 3(0.8)(1-0.8) + 9(0.8)^2 + 12(0.8)^2 = 13.92$$

ה) לפי הגדרה $N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ לכן:

$$E(X_n N_n) = E\left(X_n (X_1 + X_2 + \dots + X_n)\right)$$

$$= E\left(\underbrace{X_n X_1}_{\text{בלתי תלויים}} + \underbrace{X_n X_2}_{\text{בלתי תלויים}} + \underbrace{X_n X_3}_{\text{בלתי תלויים}} + \dots + \underbrace{X_{n-1} X_n}_{\text{בלתי תלויים}} + \underbrace{X_n X_n}_{\text{תלויים!!!}}\right)$$

$$= E(X_n X_1) + E(X_n X_2) + E(X_n X_3) + \dots + E(X_{n-1} X_n) + E(X_n X_n)$$

$$\overset{\text{אי תלות}}{=} E(X_n)E(X_1) + E(X_n)E(X_2) + \dots + E(X_{n-1})E(X_n) + E(X_n^2)$$

$$= p^2 + p^2 + \dots + p^2 + E(X_n^2) = (n-1)p^2 + E(X_n^2)$$

$$= (n-1)p^2 + Var(X_n) + [E(X_n)]^2 = (n-1)p^2 + np(1-p) + (np)^2$$

$$= (n-1)p^2 + p = (n-1)(0.8)^2 + (0.8)$$

ו) $V(N_7) = 7 \cdot p(1-p) = 7(0.8)(1-0.8)$

ז) $V(N_7 - N_3) = V(N_4) = 4p(1-p) = 4(0.8)(1-0.8)$

(4) את סעיף ה' ניתן גם לפתור באופן הבא:

$$E(X_n N_n) = E\left(X_n(N_n - X_n + X_n)\right) = E\left(X_n(N_{n-1} + X_n)\right)$$

$$= E(X_n N_{n-1} + X_n^2) \overset{\text{אי תלות}}{=} E(X_n)E(N_{n-1}) + E(X_n^2)$$

תר' 3 עמ' 5

תזכורת

(*) הגדרה: נאמר שהתהליך הסטוכסטי $\{T_k, k\geq 1\}$ הוא תהליך זמני הצלחה ברנולי אם T_k שווה למספר הניסויים עד ההצלחה ה-k, בסדרת ניסויי ברנולי תלויים ושווי התפלגות.

מכאן נסיק ש:

$$P(T_k=n) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \qquad n=k,k+1,\dots$$

(*) טענה: תהליך זמני הצלחה ברנולי הוא תהליך המקיים:

א) אינקרימנטים בלתי תלויים. כלומר:

(1) אם $k_2>k_1$ וגם $n_2>n_1$, אז:

$$P(T_{k_1}=n_1, T_{k_2}=n_2) = P(T_{k_1}-T_{k_0}=n_1-0, T_{k_2}-T_{k_1}=n_2-n_1)$$

$$= P(T_{k_1}-T_{k_0}=n_1)P(T_{k_2}-T_{k_1}=n_2-n_1) = P(T_{k_1}=n_1)P(T_{k_2-k_1}=n_2-n_1)$$

(2) לכל $k,m\in\mathbb{N}$:

$$P(T_{m+k}-T_k=n \mid T_0, T_1, \dots, T_k) = P(T_{m+k}-T_k=n)$$

ב) אינקרימנטים סטציונריים. כלומר: לכל $k,m\in\mathbb{N}$

$$P(T_{m+k}-T_m=n) = P(T_k=n).$$

(*) טענה: $T_1, T_2-T_1, T_3-T_2, \dots$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות המתפלגים גיאומטרית

$$P(T_{k+1}-T_k=m) = p\,q^{m-1}, \qquad m=1,2,\dots$$

(*) לפיכך כל T_k הוא סכום של k משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות

$$T_k = T_1 + (T_2-T_1) + (T_3-T_2) + \dots + (T_k-T_{k-1})$$

מבחינה זו התהליכים $\{T_n\}$ ו- $\{N_n\}$ דומים. ההבדל ביניהם הוא בהתפלגות האינקרימנטים $N_{n+1}-N_n$ ו- $T_{n+1}-T_n$.

(*) הקשר שקיבלנו בין שני התהליכים אינו מקרי:

<u>טענה:</u> יהי תהליך סטוכסטי כלשהו $\{Z_n, n\geq 0\}$ המוגדר ע"י $Z_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i$. כאשר $Y_1, Y_2, \ldots$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים.
אם Y_n הם שווי התפלגות, אז התפלגות האינקרימנטים $Z_{m+n}-Z_m$ אינה תלויה ב-m. אז נאמר ש: $\{Z_n\}$ הוא בעל אינקרימנטים סטציונריים ובלתי תלויים.

9) א) <u>במילים:</u> (*) ההסתברות שאחרי ההצלחה ה-3 יהיו 12 ניסויים עד ההצלחה ה-4.

(*) מתאר את המאורע $T_4-T_3=12$ במילים אחרות. אם נניח שההצלחה ה-3 הייתה בניסוי ה-n, אז המאורע $T_4-T_3=12$ ניתן לתיאור גם באופן הבא:

$$X_{n+1}=0,\ X_{n+2}=0,\ X_{n+3}=0,\ X_{n+4}=0,\ X_{n+5}=0,\ X_{n+6}=0,$$

$$X_{n+7}=0,\ X_{n+8}=0,\ X_{n+9}=0,\ X_{n+10}=0,\ X_{n+10}=0,\ X_{n+11}=0,\ X_{n+12}=1$$

$$P(T_4-T_3=12)\overset{\text{סטציונריות}}{=}P(T_1=12)=pq^{12-1}$$

ב)

$$P(T_1=2,\ T_2=5,\ T_3=8)=$$

$$=P(T_1-T_0=2,\ T_2-T_1=5-2,\ T_3-T_2=8-5)$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים בלתי תלויים}}{=}P(T_1-T_0=2)\,P(T_2-T_1=5-2)\,P(T_3-T_2=8-5)$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים סטציונריים}}{=}P(T_1=2)\,P(T_1=3)\,P(T_1=3)$$

$$=\binom{2-1}{1-1}p^1(1-p)^{2-1}\binom{3-1}{1-1}p^1(1-p)^{3-1}\binom{3-1}{1-1}p^1(1-p)^{3-1}$$

ג)

$$E(T_4-T_3)=E(T_1)=\frac{1}{p}$$

ד)

$$P(T_3=9 \mid T_1=5, T_2=6) = \frac{P(T_3=9, T_1=5, T_2=6)}{P(T_1=5, T_2=6)}$$

$$= \frac{P(T_1-T_0=5, T_2-T_1=6-5, T_3-T_2=9-6)}{P(T_1-T_0=5-0, T_2-T_1=6-5)}$$

אינקרימנטים בלתי תלויים

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{P(T_1-T_0=5)\,P(T_2-T_1=1)\,P(T_3-T_2=3)}{P(T_1-T_0=5)\,P(T_2-T_1=1)}$$

אינקרימנטים סטציונריים

$$= P(T_3-T_2=3) \stackrel{\downarrow}{=} P(T_1=3) = pq^2 \qquad (T_1 \sim Geo(p))$$

* <u>טענה</u>: יהי $\{T_k, k\geq 1\}$ תהליך זמני ההצלחה ברנולי אז לכל $k\geq 1$ ו-$n\geq k+1$ מתקיים:

$$P(T_{k+1}=n \mid T_0,\dots,T_k) = P(T_{k+1}=n \mid T_k)$$

כלומר, מתקיים שבהינתן T_k, אז T_{k+1} בלתי תלוי ב- $T_0,\dots,T_{k-1}$, תכונה זו של תהליך נקראת "מרקוביות" (ותהליך המקיים תכונה זו נקרא שרשרת מרקוב).

בהתאם לכך יכולנו לפתור את סעיף ג' באופן הבא:

מרקוביות

$$P(T_3=9 \mid T_1=5, T_2=6) \stackrel{\downarrow}{=} P(T_3=9 \mid T_2=6)$$

$$= \frac{P(T_3=9, T_2=6)}{P(T_2=6)} = \dots$$

עמוד תר' 3 עמ' 8

14) א) <u>לא נכון</u>.

<u>הוכחה</u>: אם $N_2=2 \Rightarrow N_8\neq 1$ וגם $N_8\neq 9$.

למעשה אם $N_2=2 \Rightarrow N_8=2$ או $N_8=3$ או $N_8=4$ או $N_8=5$ או $N_8=6$ או $N_8=7$ או $N_8=8$.

ב) <u>נכון</u>. <u>הוכחה</u>: (בחוברת הקורס מופיעה הוכחה נוספת לזו שלהלן).

$\{X_n, n\geq 0\}$ הוא תהליך ברנולי.

ω - היא רואליזציה של תהליך זה (זהו וקטור אינסופי של 0 ו-1)

Ω - היא קבוצת כל הרואליזציות האפשריות של התהליך (קבוצת כל הוקטורים האפשריים של 0 ו-1)

* נשים לב, שניתן לחלק את Ω לשתי קבוצות כך ש:
האחת, תכלול את כל הרואליזציות שעבורן מתקיים המאורע $\{T_k\leq n\}$
והשניה, תכלול את כל הרואליזציות שעבורן מתקיים המאורע $\{T_k> n\}$.

* קבוצת הרואליזציות המוגדרת ע"י $\{T_k\leq n\}$ כוללת את כל הרואליזציות שבהן ההצלחה ה-k קרתה בניסוי ה-n או לפניו (אך מובן שלא לפני הניסוי ה-k) $(k\leq n)$:

$$\{T_k\leq n\}=\{T_k=k\}\cup\{T_k=k+1\}\cup\dots\cup\{T_k=n\}$$

$$\{T_k=k\}\Rightarrow\{N_n\geq k\}$$

$$\{T_k=k+1\}\Rightarrow\{N_n\geq k+1\}\Rightarrow\{N_n\geq k\}$$

$$\vdots$$

$$\{T_k=n\}\Rightarrow\{N_n\geq n\}\Rightarrow\{N_n\geq k\}$$

לכן $\{T_k\leq n\}\Rightarrow\{N_n\geq k\}$ ובכיוון השני:

$$\{N_n\geq k\}=\{N_n=k\}\cup\{N_n=k+1\}\cup\dots\cup\{N_n=n\}$$

$$\{N_n=k\}\Rightarrow\{T_k\leq n\}$$

$$\{N_n=k+1\}\Rightarrow\{T_k\leq n-1\}\Rightarrow\{T_k\leq n\}$$

$$\vdots$$

$$\{N_n=n\}\Rightarrow\{T_k\leq k\}\Rightarrow\{T_k\leq n\}$$

לכן $\{N_n \geq k\} \Leftarrow \{T_k \leq n\}$. לסיכום קיבלנו ש:

$$\{T_k \leq n\} \iff \{N_n \geq k\}.$$

ג) לא נכון. הוכחה: נתבונן בקבוצת כל הריאליזציות שמופיעה בהן ההתחלה הבאה:

$$X_1=1,\ X_2=1,\ X_3=1,\ X_4=0,\ X_5=0,\ X_6=1$$

עבור כל הריאליזציות שבקבוצה זו מתקיים המאורע $\{T_3<6\}$ אבל לא מתקיים המאורע $\{N_{10}>3\}$.

ד) נכון. הוכחה: נניח שנתונה ריאליזציה מסויימת של סידרת ניסויי ברנולי בלתי תלויים ושווי התפלגות ונניח שעבור ריאליזציה זו מתקיים $T_k=n$. כלומר נניח שעבור ריאליזציה זו מתקיים שההצלחה ה-k היתה בניסוי ה-n (לדוגמא: שההצלחה ה-100 היתה בניסוי ה-100).
משמעות הדבר היא שהיו בדיוק $k-1$ הצלחות ב-$n-1$ הניסויים הראשונים וגם הצלחה נוספת בניסוי ה-n (בדוגמא: משמעות הדבר שהיו בדיוק 99 הצלחות ב-99 הניסויים הראשונים וגם הצלחה בניסוי ה-100).
כלומר הראנו ש:

$$\{T_k=n\} \Rightarrow \{N_{n-1}=k-1,\ X_n=1\}.$$

נראה את הכיוון השני:
נניח שנתונה ריאליזציה מסויימת של סידרת ניסויי ברנולי אם $N_{n-1}=k-1$, כלומר אם היו $k-1$ הצלחות ב-$(n-1)$ הניסויים הראשונים (לדוגמא: אם היו 99 הצלחות ב-99 הניסויים הראשונים) וגם $X_n=1$, כלומר היתה הצלחה בניסוי ה-n (לדוגמא: וגם היתה הצלחה נוספת בניסוי ה-100, אז ההצלחה ה-100 היתה בניסוי ה-100), נקבל שההצלחה ה-k היתה בניסוי ה-n, כלומר נקבל ש: $T_k=n$. לכן:

$$\{T_k=n\} \Leftarrow \{N_{n-1}=k-1,\ X_n=1\}.$$

תרג' 3 עמ' 10

ב) נכון. <u>הוכחה</u>: ראינו ש: $T_1,\ T_2-T_1,\ T_3-T_2,\ \dots,\ T_k-T_{k-1}$
הם משתנים מקריים בלתי תלויים ושווי התפלגות גאומטרית.
לכן הסכום של משתנים מקריים (בלתי <u>תלויים</u>) אלו:

$$T_k = T_1 + (T_2-T_1) + (T_3-T_2) + \dots + (T_k - T_{k-1})$$

מתפלג בינומי שלילי.

ג) <u>נכון</u>. <u>הוכחה</u>: (אינטואיטיבית — מכיוון ש-N_2 בלתי תלוי ב-$N_{28}-N_{20}$ וכו'
ופורמלית מכיוון ש:)

$$P(N_2 + (N_{28}-N_{20}) = k) =$$

מכיוון ש: N_2 ו-$N_{28}-N_{20}$ הם משתנים מקריים בלתי תלויים נוכל לעשות קונבולוציה:

$$= \sum_{i=0}^{2} P(N_2=i,\ N_{28}-N_{20}=k-i)$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים בלתי תלויים}}{=} \sum_{i=0}^{2} P(N_2=i)\,P(N_{28}-N_{20}=k-i) \overset{\text{אינקרימנטים סטציונריים}}{=} \sum_{i=0}^{2} P(N_2=i)\,P(N_8=k-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i} p^i (1-p)^{2-i} \binom{8}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{8-k+i}$$

$$= p^k (1-p)^{8-k} \sum_{i=0}^{2} \binom{2}{i}\binom{8}{k-i} \overset{*}{=} \binom{10}{k} p^k (1-p)^{8-k} = P(N_{10}=k).$$

$$* \quad \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k-1} + \dots + \binom{n}{k}\binom{m}{0} = \binom{n+m}{k}$$

ע"מ להוכיח זאת נחשוב על קבוצה של n גברים ו-m נשים. כמה קבוצות
בגודל k אפשר להרכיב מתוכם?

ד) לא <u>נכון</u>. <u>הוכחה</u>: (אינטואיטיבית — מכיוון ש-N_2 ו-N_8+N_2 תלויים ופורמלית מכיוון ש:)

$$P(N_{10}=0) = \binom{10}{0} p^0 (1-p)^{10-0} = (1-p)^{10}.$$

$$P(N_2+N_8=0) = P(N_2=0)\,P(N_8=0 \mid N_2=0)$$

$$= P(N_2=0)\,\frac{P(N_8=0,\ N_2=0)}{P(N_2=0)} = P(N_2=0)\,\frac{P(N_2=0,\ N_8-N_2=0)}{P(N_2=0)}$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים בלתי תלויים}}{=} P(N_2=0)\,\frac{P(N_2=0)\,P(N_8-N_2=0)}{P(N_2=0)} \overset{\text{אינקרימנטים סטציונריים}}{=} P(N_2=0)\,P(N_6=0)$$

$$= P(N_2=0)\,P(N_6=0) = \binom{2}{0} p^0 (1-p)^2 \binom{6}{0} p^0 (1-p)^6.$$

$$= (1-p)^2 (1-p)^6 = (1-p)^8$$

לכן:

$$P(N_{10}=0) \neq P(N_2+N_8=0)$$

לכן הפילוג שהמשתנה המקרי N_2+N_8 שונה מהפילוג של N_{10}.

15) יש טעות בשאלה 15: שווי התשלומים בזמן 0 הוא המשתנה המקרי הבא: $\sum_{k=1}^{\infty} v^{T_k}$ (ולא $\sum_{k=0}^{\infty} v^{T_k}$).

$$E\left(\sum_{k=1}^{\infty} v^{T_k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} E\left(v^{T_k}\right) \overset{*}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{pv}{1-qv}\right)^k = \left(\frac{\frac{pv}{1-qv}}{1-\frac{pv}{1-qv}}\right) =$$

$$= \frac{pv}{1-v} = \frac{p}{i}$$

$*$ $$E\left(v^{T_k}\right) = E\left(v^{T_1+(T_2-T_1)+\dots+(T_k-T_{k-1})}\right) = E\left(v^{T_1}\cdot v^{T_2-T_1}\cdot\ldots\cdot v^{T_k-T_{k-1}}\right)$$

$$\overset{\text{אינקרימנטים בלתי תלויים}}{=} E\left(v^{T_1}\right)E\left(v^{T_2-T_1}\right)\cdot\ldots\cdot E\left(v^{T_k-T_{k-1}}\right) \overset{\text{אינקרימנטים סטציונריים}}{=} E\left(v^{T_1}\right)E\left(v^{T_1}\right)\cdot\ldots\cdot E\left(v^{T_1}\right)$$

$$= \left[E\left(v^{T_1}\right)\right]^k \overset{**}{=} \left(\frac{pv}{1-qv}\right)^k$$

$**$ $$T_1 \sim Geo(p) \Rightarrow E\left(v^{T_1}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} v^j q^{j-1} p = pv \sum_{j=1}^{\infty} (pv)^{j-1}$$

$$= \frac{pv}{1-qv}$$

16) פקודת האקסל: $if(A,B,C)$ בודקת אם התנאי A מתקיים. אם התנאי A מתקיים אז הפקודה מחזירה את B.
אם התנאי A לא מתקיים אז הפקודה מחזירה את C.

לכן, אם $B=1$, $C=0$ ו- $Y=if(A,B,C)$ $\left(Y=if(A,1,0)\right)$, אז:

$$Y=\begin{cases}1 & \text{, A מתקיים} \\ 0 & \text{, A לא מתקיים}\end{cases}$$

פקודת האקסל $RAND()$ מחזירה מספר אקראי שגדול שווה אפס או קטן מ-1 (נניח שגם שווה). כלומר אם $X=RAND()$ אז:

$$X\sim U[0,1].$$

נתבונן בפקודה: $Y=if(0<X\leq 0.3,1,0)$ שאומרת את הדבר הבא:

$$Y=\begin{cases}1 & , 0\leq X\leq 0.3 \\ 0 & , 0.3<X\leq 1\end{cases}$$

לכן קיבלנו ש:

$$P(Y=1)=P(0\leq X\leq 0.3)=\frac{0.3}{1}=0.3$$

$$P(Y=0)=P(0.3<X\leq 1)=\frac{1-0.3}{1}=0.7.$$

לכן:

$$Y\sim Ber(0.3)$$

לסיכום, יהי $\{Y_n, n\geq 0\}$ תהליך ברנולי אז:

$$Y_n=if(RAND()\leq 0.4,1,0)$$

(בשאלות נוספות לגבי תרגיל האקסל ניתן לפנות למתרגלים בשעות הקבלה)