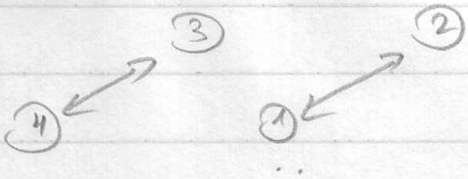
תרגיל 2

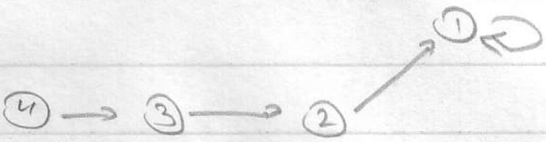
① א) לא נכון.

ב) לא נכון.

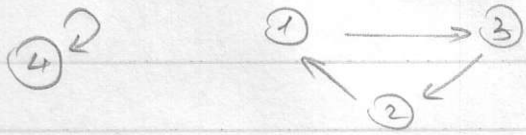
ג) לא נכון. לדוגמא:



ד) לא נכון. לדוגמא:



ה) נכון. לדוגמא:

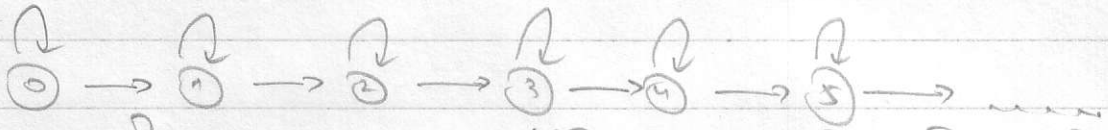


ו) נכון. $\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)} = 3.45$ <= $\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)} < \infty$ <= 2 הוא מצב חולף
(ראה משפט בחוברת).
לפי הנתונים $1 \to 3$ וגם $3 \to 2$ לכן $1 \to 2$, נתון
גם ש: $2 \to 1$ לסיכום: $1 \leftrightarrow 2$. כלומר מצבים 1 ו-2
נמצאים באותה מחלקת קשירות.
לפי משפט (ראה בחוברת) במחלקת קשירות או שכל המצבים
חולפים או שכולם מתמידים. ראינו ש-2 הוא מצב חולף לכן
כל המצבים במחלקת הקשירות של 2 חולפים. לכן בפרט
מצב 1 שנמצא במחלקת הקשירות של 2 חולף.
אם 1 חולף <= $\sum_{n=1}^{\infty} p_{11}^{(n)} < \infty$.

תרגיל 2 עמוד 2.

(*) פתרון השאלה שבין שאלות 3 ו-4 שמוספרה בשגיו א' ו-ב'! נוסח השאלה: "תאור תהליך ספירה ברנולי כשרשרת מרקוב. מהן מחלקות הקשירות ומהן מחלקה האם המצבים מתמידים או חולפים?". פתרון:

נצייר תרשים קשירות:



קיבלנו שכל מצב הוא מחלקת קשירות בפני עצמו.

כלומר מחלקות הקשירות הן: $\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \ldots$

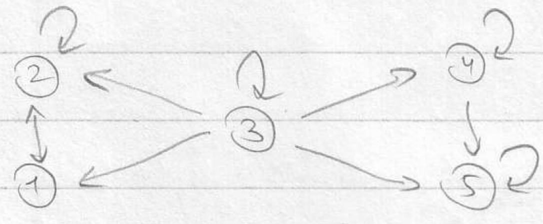
קיבלנו גם שכל המצבים חולפים.

(4) א) במטריצה סטוכסטית סכום שורה שווה ל-1 לכן:

$$\frac{1}{5} + a + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = 1 \implies a = \frac{1}{5}$$

$$0 + 0 + 0 + b + \frac{5}{8} = 1 \implies b = \frac{3}{8}$$

ב)+ג)



$\{1,2\}$ - מתמידים

$\{3\}$ - חולף

$\{4\}$ - חולף

$\{5\}$ - מתמיד (סופג).

ד) 1) (*) אם i מצב מתמיד אז $f_i = 1$ (בטוח נחזור למצב i) לכן $f_1 = f_2 = f_5 = 1$.

(*) יש רק דרך אחת לחזור למצב 3 אם יצאנו ממנו (דרך הלולאה) לכן הסיכוי לחזור ל-3 אם יצאנו ממנו הוא $f_3 = p_{33} = \frac{1}{5}$.

(*) כנ"ל (כמו לגבי מצב 3) לגבי מצב 4 $f_4 = p_{44} = \frac{3}{8}$.

(המשך פתרון שאלה 4 סעיף ד':)

2) אין דרך להגיע מ-2 ל-3, וגם אין דרך להגיע מ-4 ל-1
(ראה בתרשים הקשירות), לכן: $f_{23}=f_{41}=0$.

3) דרך א':

$$p_{12}^{(2)} = \sum_{k=1}^{5} p_{1k}p_{k2} = (0,1,0,0,0)\begin{pmatrix}1\\ \frac{1}{2}\\ \frac{1}{5}\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}$$

דרך ב': אם נתבונן בתרשים הקשירות נראה שהדרך היחידה להגיע
מ-1 ל-2 בשני צעדים היא: בצעד הראשון לעבור מ-1 ל-2, בהסתברות
1. ובצעד השני להשאר ב-2, דרך הלולאה החוזרת ל-2 בהסתברות $\frac{1}{2}$
לכן הסיכוי הוא $(1)\cdot(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

4) דרך א': לפי תרשים הקשירות אפשר לראות שאין דרך להגיע ממצב 1
למצב 5 (גם לא ב-35 צעדים), לכן $p_{15}^{(35)}=0$.
דרך ב': אפשר להכפיל את המטריצה בעצמה 35 פעמים ולקבל את
המטריצה $P^{(35)}$ ואז לראות שהאיבר $p_{15}^{(35)}$ שבמטריצה שווה לאפס.

5) ראינו שמצב 2 הוא מתמיד ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_{22}^{(n)} = \infty$.

ה) 1) נתון ש: $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=1$, וגם ידוע ש: $p_1+p_2=1$
לכן $p_3=p_4=p_5=0$. לכן התהליך יתחיל או ממצב 1 או ממצב 2.
ממצבים 1 ו-2 לא ניתן להגיע למצב 3 (ראה בתרשים הקשירות)
לכן $P(X_{24}=3)=0$.

תרגול 5 עמ' 4.

(המשך פתרון שאלה 4 סעיף ה':)

2) אם נתבונן בתרשים הקשירות נראה שהדרך היחידה להגיע למצב 3 היא ממצב 3. לכן:

$$P(X_1=3) = P(X_1=3, X_0=3) = P(X_1=3 \mid X_0=3)\, P(X_0=3)$$

$$= p_{33}\, p_{X_0}^{(3)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{25}$$

$$P(X_2=3) = P(X_2=3, X_1=3, X_0=3)$$

כלל השרשרת

$$\overset{\downarrow}{=} P(X_2=3 \mid X_1=3, X_0=3)\, P(X_1=3 \mid X_0=3)\, P(X_0=3)$$

מרקוביות

$$\overset{\downarrow}{=} P(X_2=3 \mid X_1=3)\, P(X_1=3 \mid X_0=3)\, P(X_0=3)$$

הומוגניות בזמן !

$$\overset{\downarrow}{=} p_{33}\, p_{33}\, p_{X_0}^{(3)} = \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{125}$$

3) דרך א': ראינו בתרגול ש: $P_{X_0} P^4 = P_{X_4}$. כלומר ש:

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(P(X_4=1), P(X_4=2), P(X_4=3), P(X_4=4), P(X_4=5)\right)$$

כלומר:

$$P(X_4=1) = \sum_{k=1}^{5} P_{X_0}^{(k)} P_{k1}^{(4)} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)\begin{pmatrix} p_{11}^{(4)} \\ p_{21}^{(4)} \\ p_{31}^{(4)} \\ p_{41}^{(4)} \\ p_{51}^{(4)} \end{pmatrix}$$

תרגול 5 שאלה 2.

(המשך פתרון שאלה 4, סעיף ה', תת סעיף 3)

אם $p_1+p_2=1$ אז (כמו בסעיף ו') $p_3=p_4=p_5=0$

לכן $P(X_4=1) = p_1 p_{11}^{(4)} + p_2 p_{21}^{(4)}$

<u>דרך ב'</u> - מכיוון ש: $p_3=p_4=p_5=0$ ניתן לראות לפי תרשים הקשירות שהתהליך לעולם לא יגיע למצבים 3, 4 ו-5. לכן ניתן להתעלם ממצבים אלו ולהתבונן במטריצה המצומצמת הבאה:

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} 1 & 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{array}$$

ואז לפי $P_{X_0} P^4 = P_{X_4}$ נקבל ש:

$$(p_1, p_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}^4 = \left(P(X_4=1),\ P(X_4=2)\right)$$

(*) את פתרון שאלות 6, 7 ו-8 ניתן למצוא בפתרון בוחן אמצע מתאריך 5/5/2005 שמופיע באתר הקורס משנה שעברה (ניתן להגיע לאתר מהאתר של יוני).

5) א) f_i - הסיכוי לחזור אי פעם למצב i אם יוצאים ממצב i.

ב)+ג) N_i - שווה למספר הביקורים במצב i (לאחר שנבקר N_i ביקורים במצב i לא נבקר יותר במצב i. (מצב i הוא חולף)).

$$N_i \sim Geo(1-f_i)$$ (גיאומטרי סופר כשלונות)

$$E(N_i) = \frac{f_i}{1-f_i}$$

ד) הפתרון מופיע בעמוד הבא ←

תרגול 2 עמוד 7.

<u>פתרון לשאלה 5ד בתרגול 5:</u>

נתון שמצב i בשרשרת מרקוב הוא חולף ונתון $P(X_0 = i) = 1$.
נגדיר: N - מספר הפעמים אשר נכנס למצב i. (זהו הגודל של הקבוצה $\{n \ge 1 | X_n = i\}$).
בגלל ש i חולף אז N סופי ומתפלג גיאומטרית סופר ניסיונות עם פרמטר "סיכוי הצלחה" $1-f_i$.
תזכורת: $f_i = f_{ii} = P(\exists m \ge 0 \;\; X_m = i | X_0 = i) = P(T_i < \infty | X_0 = i)$ (T_i זהו זמן הפגיעה במצב i).
אמנם על פי נתוני השאלה אנחנו לא יודעים מהו f_i אבל נתון שיש ערך כזה וערכו קטן ממש מ -1.

בשאלה נתון שעבור הכניסה הראשונה למצב i (במידה ויש כזאת) מקבלים $\left(\frac{1}{2}\right)^1$. עבור הכניסה השנייה מקבלים $\left(\frac{1}{2}\right)^2$. עבור הכניסה השלישית מקבלים $\left(\frac{1}{2}\right)^3$. וכן הלאה....
אנו נדרשים לחשב את:
$E[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^j | X_0 = i]$. זוהי תוחלת של המשתנה המקרי:

$$S = \sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^j = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}} - 1 = \frac{\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{\frac{1}{2}} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^N$$

זהו משתנה מקרי שהוא טור גיאומטרי סופי כפונקציה של המשתנה המקרי N. נשים לב שהחישוב לעיל (באמצעות טור גיאומטרי הוא עדיין נכון עבור המקרה בו $N = 0$ (במקרה זה מקבלים $S = 0$).
אם כך:

$$E[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^j | X_0 = i] = E[1-\left(\frac{1}{2}\right)^N | X_0 = i] = 1 - E[\left(\frac{1}{2}\right)^N | X_0 = i] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k P_N(k)$$

כאשר $P_N(k) = (1-f_i) f_i^k$ היא פונקצית מסת ההסתברות של N (כאשר נתון $X_0 = i$).

אם כך:

$$E[\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^j | X_0 = i] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k f_i^k (1-f_i) = 1-(1-f_i)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{f_i}{2}\right)^k = 1-(1-f_i)\frac{\frac{f_i}{2}}{1-\frac{f_i}{2}}$$