

7. זמן המתנה

||| (2) (ק)

$N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t) \Rightarrow E(N(t)) = \text{Var}(N(t)) = \lambda t.$

||| (ב)

$T_k \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ ש"כ $N(t) \sim \text{Poisson}(\lambda t)$ ש"כ

. $k \rightarrow$ מספר הפניות T_k ש"כ

$E(T_k) = \frac{k}{\lambda}$ ש"כ

||| (ג)

ש"כ $\{N(t) \geq 1\}$ פירושו, הפניה אחת לפחות הגיעה עד לרגע t .
 ש"כ $\{T_1 \leq t\}$ פירושו, הפניה אחת הגיעה עד לרגע t .
 ש"כ $\{N(t) \geq 1\} \iff \{T_1 \leq t\}$ ש"כ

$P(\{T_1 \leq t\}) = P(\{N(t) \geq 1\})$ ש"כ

||| (ד)

ש"כ $N(t) \neq 7$ ש"כ $N(s) = 8$ ש"כ
 ש"כ $N(t) = N(s) \rightarrow$ הפניות באותו הזמן

||| (ה)

||| (ו)

(8 - 2 dice)

3x נאויף'ון - $N(t) \sim \text{poiss}(\lambda t)$
 $t = 1/3$

= 1/3

נא 3 פנס 3x - $N(3) = 1$:פנס
3 איל פאיל-12



$$p(N(1) = 1 \mid N(3) = 1) \sim \text{Bin}(1, 1/3) = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$= \binom{1}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2: $p(N(2) - N(1) = 1 \mid N(3) = 1) = \boxed{\frac{1}{3}}$

34

3 איל 12 נאויף'ון 2 פנס

3: $p(N(3.5) - N(2.5) = 1 \mid N(3) = 1) =$

$$= \frac{p(N(2.5) = 1, N(3) - N(2.5) = 0, N(3.5) - N(3) = 1) + p(N(2.5) = 0, N(3) - N(2.5) = 1, N(3.5) - N(3) = 0)}{p(N(3) = 1)} =$$

$$= \frac{p(N(2.5) = 1) \cdot p(N(\frac{1}{2}) = 0) \cdot p(N(\frac{1}{2}) = 1) + p(N(2.5) = 0) \cdot p(N(\frac{1}{2}) = 1) \cdot p(N(\frac{1}{2}) = 0)}{p(N(3) = 1)} =$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda} \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}\lambda}}{e^{-3\lambda} (3\lambda)^1} \cdot \left(\frac{e^{-2.5\lambda} (2.5\lambda)^1}{1!} + e^{-2.5\lambda} \right)$$

נאויף'ון : פנס

$N(t) \sim \text{poiss}(\lambda t)$. $\lambda=2$ הנצטרך פתרון עבור $N(t)$ 'יהי' (9 - האוכלוס, 19 - 31/1/18)

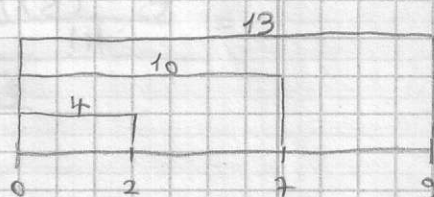
א': $p(N(2)=4) = \frac{e^{-2 \cdot 2} \cdot 4^4}{4!}$

ב': $p(N(2)=4, N(3)=6) \stackrel{\text{indep}}{=} p(N(2)=4, N(3)-N(2)=2) =$
 $\stackrel{\text{indep}}{=} p(N(2)=4) \cdot p(N(1)=2) =$
 $= \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^2}{2!}$

ג': $p(N(2)=4, N(7)=10, N(9)=13) = ?$

$\stackrel{\text{indep}}{=} p(N(2)=4, N(7)-N(2)=6, N(9)-N(7)=3)$

$\stackrel{\text{indep}}{=} p(N(2)=4) \cdot p(N(5)=6) \cdot p(N(2)=3) =$
 $= \frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-10} \cdot 10^6}{6!} \cdot \frac{e^{-4} \cdot 4^3}{3!}$



ד': $p(N(2)=4 | N(3)=5) = ?$

$= \frac{p(N(2)=4, N(3)-N(2)=1)}{p(N(3)=5)} = \frac{p(N(2)=4) \cdot p(N(1)=1)}{p(N(3)=5)}$

$= \frac{\frac{e^{-4} \cdot 4^4}{4!} \cdot \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!}}{\frac{e^{-6} \cdot 6^5}{5!}} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 =$

$= \binom{5}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \sim \text{Bin}\left(5, \frac{2}{3}\right)$

$$\begin{aligned}
 \underline{2}: \quad p(N(3)=5 | N(2)=4) &= \frac{p(N(3)=5, N(2)=4)}{p(N(2)=4)} = \\
 &= \frac{p(N(2)=4, N(3)-N(2)=1)}{p(N(2)=4)} = \frac{p(N(2)=4) \cdot p(N(1)=1)}{p(N(2)=4)} = \\
 &= \frac{e^{-2} \cdot 2^1}{1!} = p(N(1)=1).
 \end{aligned}$$

$$\underline{1}: \quad p(N(s)=k | N(t)=n) = ? \quad s < t, \quad k < n.$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{p(N(s)=k, N(t)=n)}{p(N(t)=n)} = \frac{p(N(s)=k) \cdot p(N(t-s)=n-k)}{p(N(t)=n)} = \\
 &= \frac{\frac{e^{-s\lambda} (s\lambda)^k}{k!} \cdot \frac{e^{-\lambda(t-s)} (t-s)^{n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-t\lambda} (t\lambda)^n}{n!}} = \binom{n}{k} \left(\frac{s}{t}\right)^k \left(\frac{t-s}{t}\right)^{n-k} \\
 &\quad \Downarrow \\
 &\quad \sim \text{Bin}(n, \frac{s}{t}).
 \end{aligned}$$

$$N(t) \sim \text{poiss}(\lambda t)$$

$$(1 - \lambda t)$$

$$\underline{1c}: \quad p(N(3)=5) = \frac{e^{-3\lambda} (3\lambda)^5}{5!}$$

$$\underline{2}: \quad p(N(3)=5, N(5)=8) = p(N(3)=5, N(5)-N(3)=3) =$$

$$= p(N(3)=5) \cdot p(N(2)=3) = \frac{e^{-3\lambda} (3\lambda)^5}{5!} \cdot \frac{e^{-2\lambda} (2\lambda)^3}{3!}$$

$$\underline{3}: \quad p(N(3)=0) = \frac{e^{-3\lambda} (3\lambda)^0}{0!} = e^{-3\lambda}$$

$$\underline{3}: \quad p(N(8)=8 | N(5)=5) = \frac{p(N(5)=5, N(8)-N(5)=3)}{p(N(5)=5)} = p(N(3)=3) = \frac{e^{-3\lambda} (3\lambda)^3}{3!}$$

$$\begin{aligned}
 2: \quad P(N(5)=5 | N(8)=8) &= \frac{P(N(5)=5, N(8)=8)}{P(N(8)=8)} = \dots \\
 &= \frac{P(N(5)=5) \cdot P(N(8)-N(5)=3)}{P(N(8)=8)} = \frac{P(N(5)=5) \cdot P(N(3)=3)}{P(N(8)=8)} \\
 &= \frac{\frac{e^{-5\lambda} (5\lambda)^5}{5!} \cdot \frac{e^{-3\lambda} (3\lambda)^3}{3!}}{\frac{e^{-8\lambda} (8\lambda)^8}{8!}} = \binom{8}{5} \left(\frac{5}{8}\right)^5 \left(\frac{3}{8}\right)^3 \sim \text{Bin}\left(8, \frac{5}{8}\right).
 \end{aligned}$$

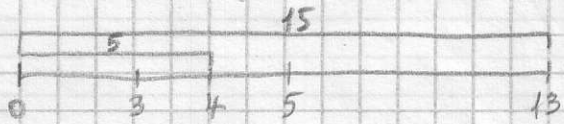
$$1: \quad E(N(9)) = \overset{\text{בזמן } t}{\text{הצפוי מספר אירועים}} = \lambda t = \boxed{9\lambda}$$

$$\begin{aligned}
 5: \quad E(N(10) | N(3)=6) &= E(N(10) - N(3) + N(3) | N(3)=6) = \\
 &= E(N(10) - N(3) | N(3)=6) + \underbrace{E(N(3) | N(3)=6)}_6 = \\
 &= E(N(7)) + 6 = \boxed{7\lambda + 6}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4: \quad E(N(3) | N(10)=8) &\Rightarrow \sim \text{Bin}\left(8, \frac{3}{10}\right) \\
 \overset{\text{בזמן } t}{\text{הצפוי מספר אירועים}} &= np = \frac{8 \cdot 3}{10} = \underline{2.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6: \quad P(N(2)=1, N(3)=4, N(5)=8) &= \\
 &= P(N(2)=1, N(3)-N(2)=3, N(5)-N(3)=4) = \\
 &= P(N(2)=1) \cdot P(N(1)=3) \cdot P(N(2)=4) = \\
 &= \frac{e^{-2\lambda} (2\lambda)^1}{1!} \cdot \frac{e^{-\lambda} (\lambda)^3}{3!} \cdot \frac{e^{-2\lambda} (2\lambda)^4}{4!}
 \end{aligned}$$

31: $P(N(5) - N(3) = 3 \mid N(4) = 5, N(13) = 15)$



Number 4

5	0	3	7
4	1	2	8
3	2	1	9
2	3	0	10

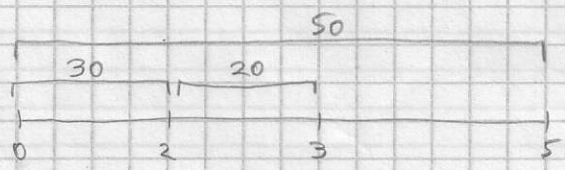
$$\begin{aligned}
 & P(N(3)=5) \cdot P(N(1)=0) \cdot P(N(4)=3) \cdot P(N(8)=7) \\
 + & P(N(3)=4) \cdot P(N(1)=1) \cdot P(N(4)=2) \cdot P(N(8)=8) \\
 + & P(N(3)=3) \cdot P(N(1)=2) \cdot P(N(4)=1) \cdot P(N(8)=9) \\
 + & P(N(3)=2) \cdot P(N(1)=3) \cdot P(N(4)=0) \cdot P(N(8)=10) = \\
 & P(N(4)=5, N(13)=15)
 \end{aligned}$$

$N(t) \sim \text{poiss}(20t)$

(13 - 2/100)

$P(N(2)=30, N(5)-N(2)=20 \mid N(5)=50) = ?$

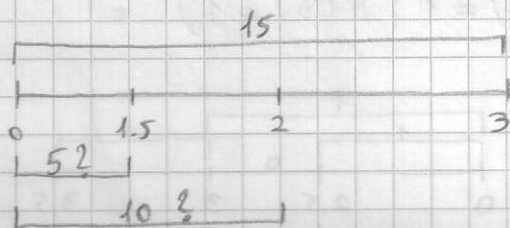
$$\begin{aligned}
 & = \frac{P(N(2)=30) \cdot P(N(3)=20)}{P(N(5)=50)} = \\
 & = \frac{\frac{e^{-20} \cdot (40)^{30}}{30!} \cdot \frac{e^{-60} \cdot (60)^{20}}{20!}}{\frac{e^{-100} \cdot (100)^{50}}{50!}} = \binom{50}{30} \left(\frac{4}{10}\right)^{30} \left(\frac{6}{10}\right)^{20} \\
 & \Downarrow \\
 & \sim \text{Bin}\left(50, \frac{4}{10}\right)
 \end{aligned}$$



תהליך פואסון - $N(t) \sim \text{poiss}(8t)$
 תהליך פואסון

(10 - אולם)

$N(3) = 15$: נתון



$P(N(1.5) = 5, N(2) = 10 \mid N(3) = 15) = ?$

$$= \frac{P(N(1.5) = 5) P(N(2 - 1.5) = 5) P(N(1) = 5)}{P(N(3) = 15)}$$

$$= \frac{e^{-12} \cdot (12)^5}{5!} \cdot \frac{e^{-4} \cdot (4)^5}{5!} \cdot \frac{e^{-8} \cdot (8)^5}{5!} = \frac{e^{-24} \cdot (24)^{15}}{15!}$$

הסתברות
 אלוהי לראשונה
 אלוהי לראשונה
 אלוהי לראשונה

$$= \frac{15!}{5! 5! 5!} \left(\frac{12}{24}\right)^5 \left(\frac{4}{24}\right)^5 \left(\frac{8}{24}\right)^5$$
 : מנתונים

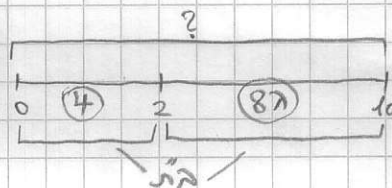
(12 - אולם)

תהליך פואסון $N(t) \sim \text{poiss}(\lambda t)$
 תהליך פואסון

1: $E(N(10)) = 10\lambda$

$N(10) \sim \text{poiss}(10\lambda)$

2: $E(N(10) \mid N(2) = 4) = ?$



הסתברות
 ביניים

$$= E(N(10) - N(2) + N(2) \mid N(2) = 4) = 4$$

$$= E(N(10) - N(2) \mid N(2) = 4) + E(N(2) \mid N(2) = 4) =$$

$$E(N(10) - N(2)) = E(N(8)) + 4 = 8\lambda + 4$$

$$= E(N(6)) \cdot \left[\underbrace{E(N(10) - N(6) | N(6))}_{E(N(4)) = 4\lambda} + \underbrace{E(N(6) | N(6))}_{N(6)} \right] =$$

$$= E(N(6)(4\lambda + N(6))) =$$

$$= E(N(6) \cdot 4\lambda) + E(N^2(6)) =$$

$$E(X^2) = V(X) + E^2(X)$$

$$= 24\lambda^2 + 6\lambda + 36\lambda^2 = \boxed{60\lambda^2 + 6\lambda}$$

$$6) E(N(6) \cdot N(10) | N(6) = 6) =$$

$$= 6 \cdot E(N(10) | N(6)) =$$

$$7) E(N(6) \cdot N(10) | N(10) = 6) =$$

$$= 6 \cdot E(N(6) | N(10) = 6)$$

$$\sim \text{Bin}\left(6, \frac{6}{10}\right)$$

↓

$$6 \times \frac{6 \cdot 6}{10} = \frac{6^3}{10} =$$