תרגיל - בית מס' 1

(שאלה - 18)

מספר לקוחות לחנות בשעה $N(t) \sim poiss(8t)$

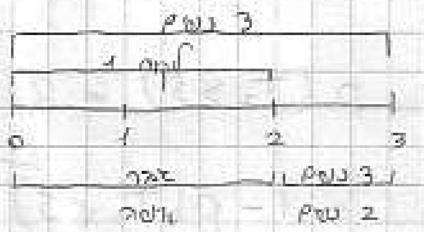
גברים - $N_1(t) \sim poiss(2t)$

נשים - $N_2(t) \sim poiss(6t)$

א': $p(N_2(2)=3 \mid N(2)=10) = \dfrac{p(N_2(2)=3)\cdot p(N_1(2)=7)}{p(N(2)=10)} =$

$$= \frac{\frac{e^{-12}\cdot 12^3}{3!}\cdot\frac{e^{-4}\cdot 4^7}{7!}}{\frac{e^{-16}\cdot 16^{10}}{10!}} = \binom{10}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^7 \sim \underline{Bin\left(10,\tfrac{3}{4}\right)}$$

ב': $p(N_2(3)=3 \mid N(2)=1)$



$$= \frac{p(N_1(1)=1)\cdot p(N_2(2)=0,\ N_2(3)-N_2(2)=3) + p(N_2(2)=1,\ N_2(3)-N_2(2)=2)\cdot p(N_1(1)=0)}{p(N(2)=1)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-2}\cdot 2^1}{1!}\cdot\frac{e^{-12}\cdot e^{-6}\cdot 6^3}{3!} + \frac{e^{-12}\cdot 12^1}{1!}\cdot\frac{e^{-6}\cdot 6^2}{2!}\cdot\frac{e^{-2}\cdot 2^0}{0!}}{\frac{e^{-16}\cdot 16^1}{1!}} =$$

ג': $E(N_1(2) \mid N(2)=5)$

$\Downarrow$

$\sim Bin\left(5, \dfrac{E(N_1(2))}{E(N(2))}\right) \sim \underline{Bin\left(5,\tfrac{2}{8}\right)}$

$\Downarrow$

$(n\cdot p)$ תוחלת $= 5\cdot\frac{2}{8} = \boxed{1.25}$

מספר לנשים $X(t) \sim poiss(\lambda t)$ (19 - שאלה

מספר לגברים $y(t) \sim poiss(\mu t)$ $\underline{Z(t) = X(t) + y(t)}$

א': $p(X(1.5)=2, y(1.5)=3) = ?$

$$\overset{\text{ב"ת}}{=} p(X(1.5)=2)\cdot p(y(1.5)=3) = \frac{e^{-1.5\lambda}(1.5\lambda)^2}{2!}\cdot\frac{e^{-1.5\mu}(1.5\mu)^3}{3!}$$

ב': $p(y(2)=2, X(3)=4) = \frac{e^{-2\mu}(2\mu)^2}{2!}\cdot\frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^4}{4!}$

ג': $p(Z(1)=15 \mid y(1)=8) = ?$

$$= \frac{p(y(1)=8)\cdot p(X(1)=7)}{p(y(1)=8)} = \frac{\cancel{\frac{e^{-\mu}(\mu)^8}{8!}}\cdot\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^7}{7!}}{\cancel{\frac{e^{-\mu}(\mu)^8}{8!}}} = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^7}{7!}$$

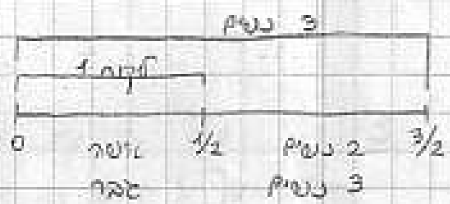
ד': $p(X(2)=5 \mid Z(2)=8) = \frac{p(X(2)=5)\cdot p(y(2)=3)}{p(Z(2)=8)} =$

$$= \frac{\frac{\cancel{e^{-2\lambda}}(2\lambda)^5}{5!}\cdot\frac{\cancel{e^{-2\mu}}(2\mu)^3}{3!}}{\frac{\cancel{e^{-2(\mu+\lambda)}}(2(\mu+\lambda))^8}{8!}} = \binom{8}{5}\left(\frac{2\lambda}{2(\mu+\lambda)}\right)^5\left(\frac{2\mu}{2(\mu+\lambda)}\right)^3$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{\sim Bin\left(8, \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\right).}$$

ה': $p(X(1.5)=3 \mid Z(0.5)=1) = ?$



$= p(X(1.5)=1)\cdot p(X(2)=2)\cdot$

$$= \frac{[p(X(0.5)=1)\cdot p(X(1)=2)\cdot p(y(0.5)=0)] + [p(X(0.5)=0)\cdot p(X(1)=3)\cdot p(y(0.5)=1)]}{p(Z(0.5)=1)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda}(\frac{1}{2}\lambda)^1}{1!}\cdot\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^2}{2!}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}\mu}(\frac{1}{2}\mu)^0}{0!} + e^{-\frac{1}{2}\lambda}\cdot\frac{e^{-\lambda}(\lambda)^3}{3!}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{2}\mu}(\frac{1}{2}\mu)^1}{1!}}{\frac{e^{-\frac{1}{2}(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^1}{1!}}$$

ג': $E\left(Y(3) \mid Z(3)=7\right) = ?$

$$\Downarrow$$

$$\sim Bin\left(7, \frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$E(Bin) = n \cdot p = \boxed{\frac{7\mu}{\lambda+\mu}}$$

שאלה - 22)

שיחות טלפון לחוב. לסטר $N(t) \sim poiss(8t)$

$\xrightarrow{0.8}$ שיחה מעוניינת לחבר $N_1(t) \sim p(6.4t)$

$\xrightarrow{0.15}$ שיחה מעוניינת לעוסר $N_2(t) \sim p(1.2t)$

$\xrightarrow{0.05}$ טעות במספר. $N_3(t) \sim p(0.4t)$

א': $p(N_1(3)=5) = \dfrac{e^{-3\cdot 6.4}(3\cdot 6.4)^5}{5!}$

ב': $p(N_1(3)+N_2(3)=8) =$ מס' השיחות המעוניינות לסגירות החוב ב-3 שעות הוא-8.

נגדיר - $N_4(3) = N_1(3) + N_2(3) \implies N_4(3) \sim poiss(6.4t + 1.2t)$

$$p(N_4(3)=8) = \frac{e^{-7.6\times 3}(7.6\times 3)^8}{8!}$$

ג': התפלגות הזמן בין 2 שיחות מעוניינות היא
אקספוננציאלית עם 2 (הפרש הזמן בין שיחה 1 לשיחה 2
תהיה תמיד זוגי כשמדובר בממוצע פואסון).

$$\Downarrow$$

כל רביעי $N_5(t) \sim poiss\left(8 \times \frac{1}{4}t\right) \sim \underline{poiss(2t)}$.

$$\Downarrow$$

$T_1 = T_2 \ldots \underline{\sim exp(2)}$.

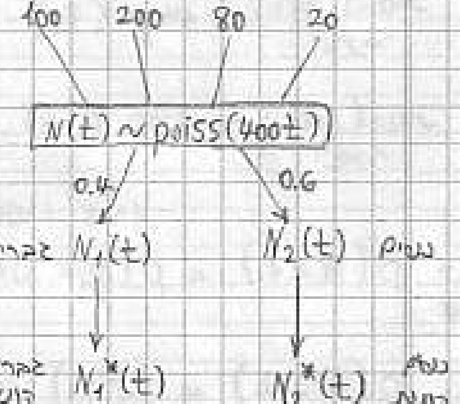
שאלה - 20)

קצב תיירים מגיעים לביקור לשבוע - $N(t) \sim poiss(10t)$

תיירים דוברי עברית לשבוע - $N_1(t) \sim poiss(\frac{1}{12} \cdot 10t) \sim poiss(P \cdot \lambda t)$

$$P(\underbrace{N_1(4)}_{\text{4 שבועות.}} = 0) = \boxed{e^{-\frac{40}{12}}}$$

שאלה - 21)



קצב כניסה לבנין מכון הכושר $N(t) \sim poiss(400t)$

גברים $N_1(t) \sim poiss(160t)$

נשים $N_2(t) \sim poiss(240t)$

גברים קונים $N_1^*(t) \sim poiss(48t)$

נשים קונות. $N_2^*(t) \sim poiss(240 \cdot 0.99t)$

ג': המבקרים קונים $N_1^*(t) + N_2^*(t) = N^*(t) \sim poiss((240 \cdot 0.99 + 48)t) \sim poiss(285.6t)$

$N^*(5) \sim poiss(285.6 \times 5)$

$\boxed{E = 70 \times (285.6 \times 5)} =$ תוחלת הקנייה ב-5 שעות

ב':

$N(t)$ – מס' מופעים עד זמן t.

T_n – זמן הגעת/קרה המופע ה-n.

הזמן שהמופע ה-5 קרה הגיע ב-1/4 שעה הראשונה.

$$P\left(T_5^{*2} \leq \frac{1}{4}\right) = P\left(N_2^*(1/4) \geq 5\right) = 1 - P\left(N_2^*(\tfrac{1}{4}) \leq 4\right) =$$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-\frac{1}{4} \cdot 237.6} (237.6 \times \frac{1}{4})^x}{x!}$$

ג':

$$E(T_4^*) = ?$$

$$T_4^* \sim \text{erlang}(4, 285.6)$$

$$E(T_4^*) = \boxed{\frac{4}{285.6}}$$

(שאלה 23 -

נשים $N_1(t) \sim \text{poiss}(80t)$

גברים $N_2(t) \sim \text{poiss}(50t)$

מס' הגברים שמגיעים עד אישה ראשונה $p(N=0) = p(\text{אישה} < \text{גבר}) = \frac{80}{130} = \frac{8}{13}$

תחרות בין שעונים.

זמן להגעת אישה $X \sim \exp(80)$

$$P(X<Y) = \frac{80}{80+50} \; ; \; P(Y<X) = \frac{50}{50+80}$$

זמן להגעת גבר $Y \sim \exp(50)$

גבר 1 אישה 1 אישה 1 גבר 2

הגיע גבר ראשון ומיד אחריו אישה $p(N=1) = p(y_1 < X_1) \cdot p(X_1 < y_2) = \left(\frac{50}{130}\right)\left(\frac{80}{130}\right)$

$$p(N=2) = \left(\frac{50}{130}\right)^2 \cdot \frac{80}{130}$$

2 גברים לפני אישה ראשונה.

$$p(N=k) = \left(\frac{50}{130}\right)^k \cdot \frac{80}{130} \sim G\left(\frac{80}{130}\right)$$

"סופר כשלונות":
$(N = 0, \dots, \infty)$