פתרון תרגיל מספר 9

2. נסמן: $X(t)$ - מספר הטלפונים התקינים בזמן t.
$\{X(t), t\geq 0\}$ הוא תהליך קפיצה מרקובי (שרשרת מרקוב בזמן רציף - CTMC - Continuous Time Markov Chain).
בתרגול האחרון ראינו שמדובר בתהליך לידה מוות (Birth & Death Process) עם מרחב מצבים סופי. במקרה זה מרחב המצבים הוא $\{0,1,2,3\}$
(בתהליך לידה ומוות אלו נתייחס בקורס הלידות והמיתות מתרחשות בצורה אקראית לחלוטין ומשך הזמן שלהן תלוי אך ורק במצב הנוכחי של המערכת. כלומר, התהליך הנו מרקובי בזמן רציף).
כאשר נתון שהתהליך נמצא במצב n (בדוגמה שלנו - כאשר יש n טלפונים תקינים). ההסתברות להתרחשות בדיוק לידה אחת (כלומר, להשלמת תיקון טלפון אחד) בקטע הזמן $(t, t+h)$ היא $\lambda_n h + o(h)$, כאשר λ_n הוא קבוע חיובי (λ_n נקרא גם קצב המעבר ממצב 0 למצב 1). הסיכוי להתרחשות יותר מלידה אחת בקטע הזמן $(t, t+h)$ (כלומר, הסיכוי שיתוקנו 2 טלפונים בו-זמנית) שווה ל- $o(h)$.

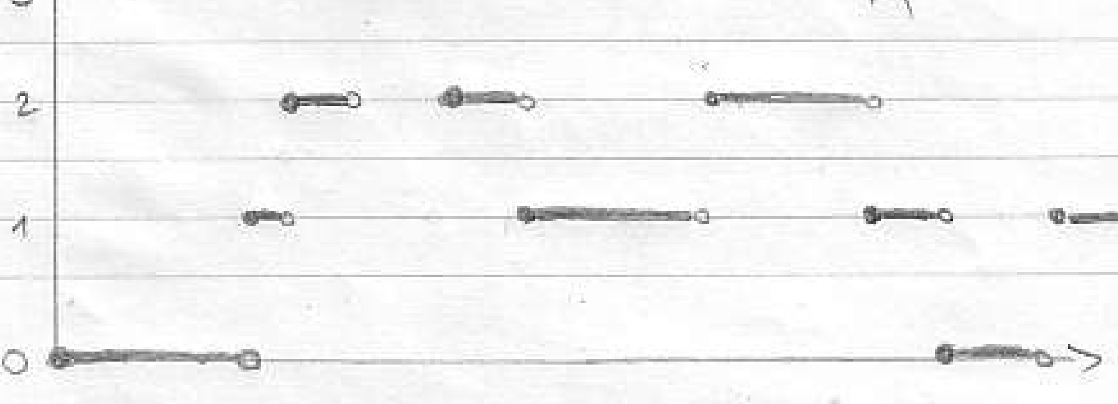
בהתאם לכך, התהליך לא יכול לקפוץ יותר ממדרגה אחת בקפיצה אחת (כלומר, לדוגמה, לא ניתן לעבור ממצב 1 למצב 3 ישירות מפני שהסיכוי לכך הוא $o(h)$ אלא רק דרך מצב 2. ראה בשרטוט להלן)

כ"כ לגבי מוות, כאשר התהליך במצב n ההסתברות להתרחשות בדיוק מוות אחד בקטע הזמן $(t, t+h)$ היא $\mu_n h + o(h)$. ההסתברות ליותר ממוות אחד היא $o(h)$.

לכן גרף הקשירות של התהליך נראה כך

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_2"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu_3"]
\end{tikzcd}
$$

גרף של המסלול של רעליזציה של התהליך יכול לדוגמה להראות כך:



נניח שאנו במצב 0, כלומר שאין כלל טלפונים תקינים. נמספר את הטלפונים 1, 2, 3 ונסמן:

X_1 - זמן ההסרה של תקלת טלפון מספר 1,

X_2 - " " " " " 2,

X_3 - " " " " " " 3.

נתון ש: $X_i \stackrel{iid}{\sim} \exp(\lambda)$ לכל i וגם ש: $E(X_i) = 2$

ידוע ש: $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$ לכן: $\lambda = \frac{1}{E(X)} = \frac{1}{2}$

ולכן: $X_i \stackrel{iid}{\sim} \exp(\frac{1}{2})$ לכל i.

נזכר שבתרגול (וזה גם בהרצאות הקורס) הגדרנו תהליך קפיצה מרקובי באמצעות תחרות בין מ"מ אקספוננציאליים.

נסמן: W_{ij} - הזמן שלוקח למ"מ האקספוננציאלי להעביר את התהליך ממצב i למצב j לעשות את מעברו (הזמן מרגע הגעתו למצב i), ואז:

$$W_{01} = \min(X_1, X_2, X_3) \Rightarrow W_{01} \sim \exp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \lambda_0 = \frac{3}{2} = 1.5$$

במונחי המודל נקבל ש:

$$\lambda_1 = \frac{2}{2} = 1 \quad \Leftarrow \quad W_{12} \sim \exp\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} = 0.5 \quad \Leftarrow \quad W_{23} \sim \exp\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\mu_3 = \frac{3}{4} = 0.75 \quad \Leftarrow \quad W_{32} \sim \exp\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\mu_2 = \frac{2}{4} = 0.5 \quad \Leftarrow \quad W_{21} \sim \exp\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{4} = 0.25 \quad \Leftarrow \quad W_{10} \sim \exp\left(\frac{1}{4}\right)$$

נצייר את תרשים הקשתות:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, bend left, "\lambda_0 = 1.5"] & 1 \arrow[l, bend left, "\mu_1 = 0.25"] \arrow[r, bend left, "\lambda_1 = 1"] & 2 \arrow[l, bend left, "\mu_2 = 0.5"] \arrow[r, bend left, "\lambda_2 = 0.5"] & 3 \arrow[l, bend left, "\mu_3 = 0.75"]
\end{tikzcd}$$

ב) מטריצת היוצר (הגנרטור) של התהליך היא על כן (הע'
הערכים באלכסון הראשי נקבעו כך שסכום האיברים בכל
שורה יהיה אפס):

$$Q = \begin{array}{c|cccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 0 & -1.5 & 1.5 & 0 & 0 \\ 1 & 0.25 & -1.25 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0.5 & -1 & 0.5 \\ 3 & 0 & 0 & 0.75 & -0.75 \end{array}$$

ב

המטריצה המשוכנת: (נותר לחשב את איבריה בהתאם למטריצת היוצר עפ הגדרת הנוסחה $P(i,j) = \frac{q_{ij}}{q_i}$):

$$P = \begin{array}{c|cccc} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{0.25}{1.25} = \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{1.25} = \frac{4}{5} & 0 \\ 2 & 0 & \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2} & 0 & \frac{0.5}{1} = \frac{1}{2} \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

נשים לב שיכולנו לחשב את המטריצה המשוכנת מבלי לחשב תחילה את מטריצת היוצר. כפי שראינו בתרגול איברי המטריצה המשוכנת הם הסתברויות של מציאת אפשרות של תחרות בין שני אקספוננציאליים, כלומר:

$P(1,0) = P(w_{10} < w_{12})$ $\quad$ $P(1,2) = P(w_{12} < w_{10})$

$P(2,1) = P(w_{21} < w_{23})$ $\quad$ $P(2,3) = P(w_{23} < w_{21})$

$P(0,1) = 1$ - מפני שמעבר ממצב 0 למצב 1 הוא המעבר היחיד האפשרי (כנ"ל לגבי $P(3,2) = 1$).

ב) כפי שראינו בתרגול. זמני השהייה בכל מצב מתפלגים אקספוננציאלית, את קצבי התפלגויות השהייה במצבים השונים ניתן לראות באלכסון הראשי של מטריצת היוצר (קצב התפלגות זמן השהייה במצב i שווה ל- q_i. נשים לב שהאיבר המופיע באלכסון שווה $-q_i$).

נסמן w_i - זמן השהייה במצב i

(נזכיר שבתרגול ראינו שמתקיימת תחרות בין משתנים מקריים אקספוננציאליים w_{ij} המנסים כל אחד להוציא את התהליך למצב j אחר. w_i הוא הזמן שלוקח למנצח מביניהם להוציא את התהליך ממצב i, כלומר, הזמן המינימלי). לסיכום:

$$w_2 = \min(w_{21}, w_{23})$$

$$w_2 \sim \exp(q_{21}+q_{23})$$

$$w_2 \sim \exp(q_2)$$ הקצב באלכסון הראשי של Q

$$w_2 \sim \exp(1).$$

$$E(w_2) = E(\text{זמן השהייה במצב 2}) = 1$$

7

[illegible]
תוחלת של Q.

באותו האופן:

$w_0 \sim exp(1.5) \Rightarrow E(w_0) = \frac{1}{1.5}$

$w_1 \sim exp(1.25) \Rightarrow E(w_1) = \frac{1}{1.25}$

$w_3 \sim exp(0.75) \Rightarrow E(w_3) = \frac{1}{0.75}$