

**מה עלי לדעת למבחן הסופי (מועדים א', ב', ג'):**

**גרסא 3.**

הערה: רשימה זו הורכבה על סמך הרשימות של בוחן הפתיחה ומבחני הביניים אבל מכילה שינויים. מומלץ מאוד לעבור עליה באופן יסודי.

1. הסתברות:

- a. תכונות בסיסיות של פו' הסתברות  $(P(\Omega), P(\emptyset), P(A \cup B))$  (וכו').
- b. תכונות בסיסיות של הסתברות מותנה ומאורעות בלתי תלויים (נוסחת ההסתברות השלמה, נוסחת השרשרת).
- c. משתנים מקריים בדידים – פו' מסת הסתברות, פו' הסתברות מצטברת, פו' מסת הסתברות משותפת, פו' מסת הסתברות מותנה. תוחלת, שונות.
- d. משתנים מקריים רציפים – צפיפות, פו' הסתברות מצטברת, פו' צפיפות משותפת, פו' צפיפות מותנה. תוחלת, שונות.
- e. קונבולוציה של משתנים מקריים.
- f. משפחות של משתנים מקריים (לזכור בעל פה ולדעת לפתח תכונות):
  - i. ברנולי – משמעות, תוחלת, שונות.
  - ii. בינומי – פו' מסת הסתברות, משמעות, תוחלת, שונות.
  - iii. גיאומטרי – פו' מסת הסתברות, פו' שרידות, משמעות, תוחלת, שונות. (סופר כישלונות, סופר ניסיונות). חוסר זיכרון.
  - iv. בינומי שלילי – פו' מסת הסתברות, משמעות, תוחלת, שונות. (סופר כישלונות, סופר ניסיונות).
  - v. פואסון – פו' מסת הסתברות, תוחלת, שונות.
  - vi. אקספוננציאלי – צפיפות, פו' שרידות, תוחלת, שונות, חוסר זיכרון.
  - vii. ארלנג (סכום של אקספוננציאלי i.i.d) – צפיפות, תוחלת, שונות.
- g. תכונות של משתנים מקריים אקספוננציאליים (לדעת לפתח את התכונות):
  - i. חוסר זיכרון.
  - ii. פילוג מינימום של משתנים בלתי תלויים.
  - iii. תחרות בין משתנים בלתי תלויים.
  - iv. קשר לארלנג.
- h. שימוש בתוחלת מותנה.
- i. תכונות של סכום מקרי (סכום של מספר אקראי של משתנים i.i.d).

2. הגדרה ומשמעות של התכונות:

- a. אינקרימנטים סטציונריים.
- b. אינקרימנטים בלתי תלויים.
- c. הגדרות גם לזמן בדיד (לדוגמא: תה' ספירה ברנולי) וגם לזמן רציף (לדוגמא תה' פואסון).

3. תהליכי ברנולי (תהליך ספירה ברנולי ותהליך זמני הצלחה):

- a. משמעות התהליכים.
- b. הקשרים בין התהליכים (תהליך הספירה ותהליך זמני הצלחה).
- c. פונקצית התוחלת ופונקצית השונות של התהליכים.

- d. הפילוג השולי של התהליכים.
- e. ביצוע חישובים באמצעות תכונות אינקרימנטים סטציונרים ואינקרימנטים בלתי תלויים.
- f. פיתוח הפילוג של  $N_m$  בהינתן  $N_n$  כאשר  $m < n$  וכאשר  $n < m$ .
4. עקרונות שרשראות מרקוב:
- a. הגדרה של שרשרת מרקוב (תכונת המרקוביות ותכונת ההומאניות בזמן).
- b. בניית מודל שרשרת מרקוב על סמך סיפור.
- c. ייצוג תהליכי ברנולי כשרשראות מרקוב.
- d. שאלות "הגיון" הקשורות למבנה השרשרת.
- e. בניית שרשרת מרקוב עם מרחב מצבים  $S \times S$  (כמו בדוגמת מזג האוויר).
- f. דוגמאות מורכבות יותר: דוגמת מלאי, דוגמת מהמר, דוגמת שארית אורך החיים, דוגמת כדורים העוברים בין תאים.
- g. מידול תהליכי ברנולי (i.i.d), ספירה וזמני הצלחה) כשרשראות מרקוב.
5. חישובים בסיסיים הקשורים לשרשראות מרקוב:
- a. חישוב הפילוג של סדרה סופית מתוך הריאליזציה  $(P(X_1, \dots, X_n) = (i_1, \dots, i_n))$ .
- b. צ'פמן קולמוגורוב.
- c. מטריצת המעבר ב  $n$  צעדים.
- d. הפילוג השולי של השרשרת בזמן  $n$ .
6. מבנה של שרשראות מרקוב:
- a. יחס קשירות, מחלקות קשירות, פריקות/אי-פריקות.
- b. הוכחת משפט: יחס הקשירות על מרחב המצבים הוא יחס שקילות. (רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות).
- c. מציאת מחלקות הקשירות בשרשראות מרקוב קטנות (עד 10 מצבים) או בעלות מבנה סדור (כמו מודל המהמר).
- d. מצבים מתמידים/חולפים.
- e. פילוג מספר הביקורים במצב חולף.
- f. תוצאה: בכל מחלקת קשירות או שכל המצבים מתמידים או שכולם חולפים.
- g. התמדה של כל המצבים בשרשרת מרקוב אם מרחב מצבים סופי.
- h. דוגמא עם מרחב מצבים אין-סופי שבה כל המצבים חולפים.
- i. הגדרה של מצב מתמיד אפס ומצב מתמיד חיובית.
7. עקרונות ניתוח צעד ראשון – דגש על העיקרון.
- a. אופן חישוב הסיכוי להגיעה אי פעם ממצב למצב.
- b. אופן חישוב תוחלת מספר הצעדים עד הגעה למצב (או קבוצה של מצבים).
- c. אופן חישוב תוחלת מספר הביקורים במצב עד הגעה למצב (או קבוצה של מצבים).

8. עקרונות של ארגודיות וסטציונריות.
- הבנה של המשמעות של תהליך סטוכסטי ארגודי.
  - באיזה מקרים שרשראות מרקוב הן ארגודיות.
  - הבנה של המשמעות של תהליך סטוכסטי הוא סטציונרי.
  - באיזה מקרים שרשראות מרקוב הן סטציונריות.
9. ההתפלגות הסטציונרית:
- רישום משוואות שווי משקל (גם בצורה מטריציונית).
  - פתרון משוואות שווי משקל.
  - 4 משמעויות שונות של פתרון  $(\pi)$  של משוואות שווי המשקל.
  - דוגמאות של ניתוח עלות/רווח ממוצע באמצעות פתרון משוואות שווי משקל.
10. הבנה בסיסית של מחזוריות של שרשראות מרקוב (בדומה לשאלה ב-4 בבוחן הביניים השני).
11. קצב סיכון:
- הגדרה.
  - משמעות.
  - קצב סיכון של אקספוננציאלי והמשמעות.
12. משמעות של תהליך פואסון.
- אינקרימנטים סטציונריים.
  - אינקרימנטים בלתי תלויים.
  - אוסף ניסויי מיקרו-ברנוליים (גבול של תהליך ספירה ברנולי).
13. ארבע הגדרות שונות של תהליך פואסון.
- משפט תכונות של תהליך פואסון (מכיל את כל המידע מ-4 הגדרות + תוצאות נוספות).
  - פיתוח  $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$  מההגדרה המיקרו-ברנולית (כמו השאלה בבוחן הביניים השני).
14. תכונות נוספות של תהליך פואסון:
- הקשר בין פילוג ארלנג ופילוג פואסון.  $(P(N_t \leq k) = P(T_k \geq t))$ .
  - פילוג מותנה של  $N_t$  בהינתן  $N_{t+s}$  (כולל הוכחה).
  - פילוג  $T_1$  בהינתן  $N_t = 1$  (כולל הוכחה).
  - פילוג משותף של  $T_1, \dots, T_n$  בהינתן  $N_t = n$  (ללא הוכחה).
  - פיצול פואסון (כולל הוכחה).
  - מיזוג פואסון.

15. תהליכי קפיצה מרקובים:

- a. הגדרה.
- b. מטריצת הגנראטור.
- c. מעבר ממטריצת הגנראטור למטריצה המשוכנת והמטריצה המשוכנת + וקטור קצבים למטריצת הגנראטור.
- d. בניית מודל מסיפור.

16. התפלגות סטציונרית של תהליכי קפיצה מרקובים.

- a. משוואות שווי משקל.
- b. משוואות שווי משקל מפורטות.

17. תהליכי לידה מוות.

- a. הגדרה.
- b. פתרון משוואות שווי משקל מפורטות. באופן כללי (עבור קצבי לידה וקצבי מוות כלשהם). כולל הוכחה.
- c. תנאי לקיום פתרון משוואות שווי משקל.

18. תורת התורים.

- a. הגדרה של מערכת תורים.
- b. נוסחת ליטל.
- c. ייצוג מערכות תורים באמצעות תהליכי לידה מוות:  $M/M/1$ ,  $M/M/c$ ,  $M/M/1/K$ ,  $M/M/\infty$  וכו'.
- d. חישוב פילוג זמן ההמתנה/זמן השהייה של צרכן במערכת  $M/M/1$ .
- e. מידול באמצעות מודלים של תורים.

הערה: לגבי נוסחאות של **תורת התורים**: אין צורך לזכור נוסחאות בעל פה, נוסחאות ינתנו בשאלות על פי הצורך.

### מה עלי לעשות בכדי להגיע מוכן למבחן:

1. לחזור על כל ההרצאות בלויי חוברת ההרצאה (להשתמש בחוברת ההרצאה במקומות שבהן ההרצאה לא ברורה).
  2. לחזור על כל התרגולים ושיעורי הבית.
  3. לעבור על בוחן הפתיחה בהסתברות (ועל בחני הפתיחה בהסתברות של סמסטר שעבר) – סה"כ 3 בחנים.
  4. לעבור על בוחן האמצע הראשון והשני של סמסטר זה.
  5. לעבור על מועדים א, ב, ג, של סמסטר שעבר. לפתור באופן מלא.
  6. לעבור על מועדים א, ב, ג, ומבחן הביניים של לפני שנתיים.
- הערה: המשמעות ב"לעבור" היא: לפתור שאלות, להשוות לחומר הנלמד בהרצאה ובתרגול, לחשוב איך אפשר לשנות קצת את השאלות (וכך להבין איך להתמודד עם שאלות נוספות).

**הערה: מבנה המבחן שונה עבור מועדים ב' ו-ג' ביחס למועד א'.  
הסיבה: במועד א' היה 3 שעות ובמועדים ב' ו-ג' יש רק שעתיים וחצי.**

מבנה המבחן הסופי (מועדים א', ב', ג') יהיה דומה למבנה מבחני הביניים:  
4 שאלות כן/לא. (סה"כ 28 נקודות).  
5 שאלות אמריקאיות. (סה"כ 40 נקודות).  
שאלה פתוחה עם 7 סעיפים. (סה"כ 35 נקודות).  
סה"כ 103 נקודות. (ניתן לקבל ציון בגובה 103 לצורך שקלול הציון הכולל).

**במבחן: ממבחני האמצע רואים שהסטודנטים אשר יוצאים מאוחר יותר לרוב מקבלים ציונים טובים יותר. אין סיבה לצאת מוקדם, אין סיבה לוותר, יש להלחם עד הסוף ולהצליח!!!**

### **בהצלחה**