

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן ביניים מס' 1

30.7.2007

מרצה: יוני נצרתי.

מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
 - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 20 נקודות.
 - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 50 נקודות.
 - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 30 נקודות.
- יש לענות על כל השאלות במקומות המיועדים לכך בשאלון זה בלבד באופן ברור ומסודר. אין להגיש דפי טיוטה.

יש לרשום שם ומספר ת"ז באופן ברור:

שם:

ת"ז:

בהצלחה

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות באופן ברור.

<u>תשובות לחלק א:</u>		
(1-א)	נכון	לא נכון
(2-א)	נכון	לא נכון
(3-א)	נכון	לא נכון
(4-א)	נכון	לא נכון

(1-א) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$ שרשרת מרקוב. אז המשתנים המקריים X_1 ו- X_3 בהכרח בלתי תלויים.

(2-א) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$ שרשרת מרקוב אי-פריקה בעלת מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4\}$.

$$\text{נסמן } p_{i,j}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i) \text{ אז הטור } \sum_{n=178}^{\infty} p_{2,2}^{(n)} \text{ מתבדר.}$$

(3-א) יהי $\{N_n, n \geq 0\}$ תהליך ספירה ברנולי $(N_n = \sum_{i=1}^n X_i)$ כאשר $\{X_i, i \geq 1\}$ הם משתנים מקריים i.i.d ברנולי עם פרמטר p . אז כאשר $\{N_n, n \geq 0\}$ מיוצג כשרשרת מרקוב, מרחב המצבים הוא $S = \{0, 1, 2, \dots\}$ וכל המצבים מתמידים אם $p = 0$, או שכולם חולפים אם $p > 0$.

(4-א) להלן התחלה של ריאליזציה של שרשרת מרקוב:

$$X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 5, X_6 = 7$$

(הנח שיש סיכוי חיובי ממש לקבל ריאליזציה שזו ההתחלה שלה).
אז בהכרח מצבים 3 ו-2 בהכרח מתקשרים.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) באופן ברור.

<u>תשובות לחלק ב:</u>					
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	1-ב
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	2-ב
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	3-ב
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	4-ב
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	5-ב

1-ב נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1, 2, 3\}$ ומטריצת מעבר

$$.P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 2 היא:

(א) 0

(ב) $\frac{1}{5}$

(ג) 1

(ד) $\frac{2}{5}$

(ה) לא ניתן לחשב זאת ללא מידע לגבי הפילוג ההתחלתי של השרשרת.

ב-2) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מטריצת מעבר P .
 נגדיר תהליך סטוכסטי חדש $\{Z_n, n \geq 0\}$. כך ש $Z_n = X_{2^n}$ $n = 0, 1, 2, \dots$.

א) התהליך $\{Z_n, n \geq 0\}$ אינו בהכרח שרשרת מרקוב.

ב) מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$ זהה לזו של $\{X_n, n \geq 0\}$.

ג) מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$ היא P^2 .

ד) אין מספיק נתונים בשביל לדעת מהי מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$.

ה) מרחב המצבים של $\{Z_n, n \geq 0\}$ גדול פי 2 ממרחב המצבים של $\{X_n, n \geq 0\}$.

ב-3) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1, 2, 3, 4\}$ ומטריצת מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נתון שבזמן 25 המצב הוא 3, מה תוחלת הזמן (מספר צעדים) עד שהמצב יהיה 2?

א) 27

ב) 3

ג) 2

ד) 8

ה) ∞

ב-4) בגן ילדים ישנם 4 ילדים. הילדים מחולקים לשתי קבוצות: קבוצה אחת משחקת עם חיות מחמד וקבוצה שנייה מציירת. בכל דקה הגננת מאפשרת לילד אחד להחליף קבוצה באופן הבא: הגננת בוחרת באקראי שם של ילד (סיכוי של $1/4$ לכל ילד) והילד הנבחר מחליף קבוצה. מספר הילדים המשחקים עם חיות מחמד בזמן n הוא שרשרת מרקוב, $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $\{0,1,2,3,4\}$. מהי מטריצת המעבר?

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{ה})$$

ב-5) n תלמידים יושבים בטור (זה אחר זה) במבחן ומנסים לענות על שאלת נכון/לא נכון כלשהי. התלמיד הראשון (הראשון בטור) עונה תשובה נכונה בסיכוי $\frac{17}{19}$ (ורושם אותה בטופס). כל שאר התלמידים פועלים באופן הבא: לכל תלמיד ישנו סיכוי של $\frac{1}{5}$ שיעתיק את השאלה מהתלמיד שלפניו. במידה והתלמיד מחליט להעתיק אז הוא מצליח בכך (אינו נתפס ורואה בדיוק את התשובה של זה שלפניו). במידה ואינו מחליט להעתיק, אז ישנו סיכוי של $\frac{2}{3}$ שיענה נכון (וירשום בטופס). מהו בקרוב (n גדול) הציון הממוצע עבור שאלה זו?

א) 13.33%

ב) 50%

ג) 20%

ד) 75.34%

ה) 66.66%

חלק ג – שאלות פתוחות:

ענה על כל הסעיפים בעמוד זה ובעמוד הבא באופן ברור ומסודר.

תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

1-א

נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד $\{X_n, n \geq 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ומטריצת מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(א) (7) מהן מחלקות הקשירות בשרשרת זו?

(ב) (6) סווג את מחלקות הקשירות (מי הן המחלקות המתמידות, מי הן מהחלקות החולפות).

(ג) (7) נתון $X_0 = 3$, מה הסיכוי שבזמן 2 השרשרת תהיה במצב 2?

(ד) (7) בניח עכשיו $X_0 = 1$. רשום מערכת משוואות בשלושה נעלמים לצורך מציאת פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצבים 1, 2, 5. אין צורך לפתור.

(ה) (3) נסמן $T_{\{1,2,5\}} = \inf\{n \geq 1 \mid X_n \in \{1, 2, 5\}\}$ זהו הזמן (החל מ-1) שבו בפעם הראשונה השרשרת באחד מהמצבים 1 או 2 או 5. מהי $E[T_{\{1,2,5\}} \mid X_0 = 4]$?