החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

פתרון למבחן ביניים מס' 1

30.7.2007

מרצה: יוני נצרתי.

מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

א-1) תהי $\{X_n,\, n\geq 0\}$ שרשרת מרקוב. אז המשתנים המקריים X_1 ו - X_3 בהכרח בלתי תלויים.

לא-נכון – כמעט בכל דוגמא המשתנים של שרשרת המרקוב תלויים:

הנה דוגמא קיצונית עבור $S=\{1,2\}$: $P=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **.** בדוגמא זו תמיד מתקיים ש $X_1=X_3$ 1 ולכן ברור שהמשתנים תלויים.

ניתן לראות זאת גם כך:

הפילוג המשתנים הללו בנוי על סמך הפילוג של X_0. ז"א אם $P_{X_0}=\begin{pmatrix}p_1 & p_2\end{pmatrix}$ אז

$$P_{X_1,X_3}=\begin{cases}p_2 & X_1=1,X_3=1\\ 0 & X_1=1,X_3=2\\ 0 & X_1=2,X_3=1\\ p_1 & X_1=2,X_3=2\end{cases}\qquad P_{X_1}=\begin{cases}p_2 & X_1=1\\ p_1 & X_1=2\end{cases}\qquad P_{X_3}=\begin{cases}p_2 & X_3=1\\ p_1 & X_3=2\end{cases}$$

אז לא מתקיים שהפילוג המשותף ($P_{X_1X_3}$) הוא מכפלת הפילוגים השוליים ולכן המשתנים המקריים אינם בלתי-תלויים.

א-2) תהי $\{X_n, n\geq 0\}$ שרשרת מרקוב אי-פריקה בעלת מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4\}$.
נסמן $p_{i,j}{}^{(n)}=P(X_n=j\,|\,X_0=i)$. אז הטור $\sum_{n=178}^{\infty}p_{2,2}{}^{(n)}$ מתבדר.

נכון – השרשרת היא בעלת מרחב מצבים סופי ואי-פריקה אז כל המצבים שלה מתמידים (כולל מצב 2). אם כך הטור $\sum_{n=1}^{\infty}p_{2,2}{}^{(n)}$ מתבדר וגם הטור $\sum_{n=178}^{\infty}p_{2,2}{}^{(n)}$ בגלל ש-

$$\sum_{n=178}^{\infty}p_{2,2}{}^{(n)}=\sum_{n=1}^{\infty}p_{2,2}{}^{(n)}-\underbrace{\sum_{n=1}^{177}p_{2,2}{}^{(n)}}_{finite}.$$

א-3) יהי $\{N_n, n \geq 0\}$ תהליך ספירה ברנולי ($N_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ כאשר $\{X_i, i \geq 1\}$ הם משתנים מקריים i.i.d ברנולי עם פרמטר p). אז כאשר $\{N_n, n \geq 0\}$ מיוצג כשרשרת מרקוב, מרחב המצבים הוא $S = \{0,1,2,....\}$ וכל המצבים מתמידים אם $p = 0$, או שכולם חולפים אם $p > 0$.

נכון – במידה ו p=0 אז מטריצת המעבר היא מטריצת היחידה האין-סופית. ואז כל מצב הוא סופג ומהווה מחלקת קשירות מתמידה בפני עצמו. במידה ו p>0 אז j נגיש מ i אם j>i אבל לא ההיפך ולכן אין צמדי מצבים קשירים ולכן כל מצב הוא מחלקת קשירות בפני עצמו. כל אחת ממחלקות הקשירות חולפות בגלל שלכל מצב יש מצב ממחלקה אחרת הנגיש ממנו.

א-4) להלן התחלה של ריאליזציה של שרשרת מרקוב:
$X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_3 = 1, X_4 = 5, X_6 = 7$
(הנח שיש סיכוי חיובי ממש לקבל ריאליזציה שזו ההתחלה שלה).
אז בהכרח מצבים 3 ו-2 בהכרח מתקשרים.

נכון – בזמן 2 השרשרת עברה ממצב 2 למצב 3, מכאן אנו לומדים ש $p_{23}^{(1)} > 0$. בזמן 3 השרשרת עברה ממצב 3 למצב 1 ובזמן 1 השרשרת עברה ממצב 1 למצב 2 ומכאן אנו לומדים ש $p_{32}^{(2)} > 0$. אם כך 3 נגיש מ 2 ו- 2 נגיש מ 3 ולכן 3 ו-2 מתקשרים.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

ב-1) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \ge 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר
$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 2 היא:

א) 0

ב) $\frac{1}{5}$

ג) 1

ד) $\frac{2}{5}$

ה) לא ניתן לחשב זאת ללא מידע לגבי הפילוג ההתחלתי של השרשרת.

<u>פתרון:</u> **ד'**

זו שרשרת אי-פריקה.

קל לפתור כאן את משוואות שווי משקל ולקבל $\pi = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$

בדיקה:
$$\boxed{\begin{array}{l} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \\ \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 1 \end{array}}$$

ולכן פרופורציית הזמן שהשרשרת במצב 2 היא $\frac{2}{5}$.

ב-2) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מטריצת מעבר P.
נגדיר תהליך סטוכסטי חדש $\{Z_n, n \geq 0\}$. כך ש $n = 0,1,2,....$ $Z_n = X_{2n}$.

א) התהליך $\{Z_n,\ n \geq 0\}$ אינו בהכרח שרשרת מרקוב.

ב) מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$ זהה לזו של $\{X_n, n \geq 0\}$.

ג) מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$ היא P^2.

ד) אין מספיק נתונים בשביל לדעת מהי מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$.

ה) מרחב המצבים של $\{Z_n, n \geq 0\}$ גדול פי 2 ממרחב המצבים של $\{X_n, n \geq 0\}$

<u>פתרון: **ג'**</u>

$\{Z_n, n \geq 0\}$ הוא שרשרת מרקוב. מתקיימת התכונה המרקובית:

$$P(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n, ..., Z_0 = i_0) = P(X_{2n+2} = i_{n+1} \mid X_{2n} = i_n, ..., X_0 = i_0)$$
$$= P(X_{2n+2} = i_{n+1} \mid X_{2n} = i_n) = P(Z_{n+1} = i_{n+1} \mid Z_n = i_n)$$

האיברים במטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$ הם:
$$P(Z_1 = j \mid Z_0 = i) = P(X_2 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}^{(2)}$$

ולכן מטריצת המעבר של $\{Z_n, n \geq 0\}$ היא P^2.

ב-3) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר:
$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
נתון שבזמן 25 המצב הוא 3, מה תוחלת הזמן (מספר צעדים) עד שהמצב יהיה 2?

א) 27

ב) 3

ג) 2

ד) 8

ה) ∞

<u>פתרון: **ד'**</u>

נראה שתי דרכים:

הנתון "זמן 25" אינו רלוונטי. תכונת ההומגניות בזמן מאפשרת לנו לבצע את החישוב מ"זמן 0". (ייתכן ומנתוני השאלה לא היה ברור האם דרוש למצוא את תוחלת מספר הצעדים מ25 או מ-0, אבל בדיקה של התשובות האפשריות מראה שמדובר בתוחלת מספר הצעדים מזמן - 25). במידה והייתה תשובה אפשרית $25+8$, אז זה כבר לא ברור.

דרך א': משתנים מקריים גיאומטריים:

המבנה של השרשרת הוא פשוט: במצב 3 מבצעים "סדרת ניסויים גיאומטרית" עד אשר עוברים למצב 4, ממצב 4 עוברים למצב 1 בצעד יחיד, ממצב 1 עוברים למצב 2 לאחר סדרת ניסויים נוספת.

סך תוחלת הזמן הוא סכום תוחלות הזמנים בכל מצב שזה: $8=\frac{1}{1/4}+1+\frac{1}{1/3}$.

דרך ב': חישוב באמצעות התניה בצעד ראשון:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mu_{12}=\frac{1}{4}1+\frac{3}{4}(1+\mu_{12}) & \Rightarrow\ \mu_{12}=4 \\ & \quad\Downarrow \\ \mu_{42}=1+\mu_{12} & \Rightarrow\ \mu_{42}=5 \\ & \quad\Downarrow \\ \mu_{32}=\frac{2}{3}(1+\mu_{32})+\frac{1}{3}(1+\mu_{42}) & \Rightarrow\ \mu_{32}=\frac{2}{3}(1+\mu_{32})+\frac{1}{3}(1+5) \\ & \quad \mu_{32}=8 \end{array}}$$

ב-4) בגן ילדים ישנם 4 ילדים. הילדים מחולקים לשתי קבוצות: קבוצה אחת משחקת עם חיות מחמד וקבוצה שנייה מציירת. בכל דקה הגננת מאפשרת לילד אחד להחליף קבוצה באופן הבא: הגננת בוחרת באקראי שם של ילד (סיכוי של ¼ לכל ילד) והילד הנבחר מחליף קבוצה. מספר הילדים המשחקים עם חיות מחמד בזמן n הוא שרשרת מרקוב, $\{X_n, n\ge 0\}$ בעלת מרחב מצבים $\{0,1,2,3,4\}$. מהי מטריצת המעבר?

התשובה הנכונה היא:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

זוהי שרשרת "Ehrenfest" (מוצגת גם בחוברת ההרצאה ובכל הספרים כדוגמא בסיסית).

ב-5) n תלמידים יושבים בטור (זה אחר זה) במבחן ומנסים לענות על שאלת נכון/לא נכון כלשהי. התלמיד הראשון (הראשון בטור) עונה תשובה נכונה בסיכוי $17/19$ (ורושם אותה בטופס). כל שאר התלמידים פועלים באופן הבא: לכל תלמיד ישנו סיכוי של $1/5$ שיעתיק את השאלה מהתלמיד שלפניו. במידה והתלמיד מחליט להעתיק אז הוא מצליח בכך (אינו נתפס ורואה בדיוק את התשובה של זה שלפניו). במידה ואינו מחליט להעתיק, אז ישנו סיכוי של $2/3$ שיענה נכון (וירשום בטופס). מהו בקרוב (n גדול) הציון הממוצע עבור שאלה זו?

<u>פתרון:</u>

ניתן למדל את התשובות של התלמידים כשרשרת מרקוב כאשר משמעות פרמטר השרשרת הוא מספר התלמיד בטור. הרי התשובה של כל תלמיד תלויה בתשובה של התלמיד שקדם לו. מרחב המצבים הוא $S=\{0,1\}$, 0 – תשובה שגויה, 1 תשובה נכונה. להלן הערכים של מטריצת המעבר:

$$P_{00}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$
$$P_{01}=\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$
$$P_{10}=\frac{1}{2}\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$
$$P_{11}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

ז"א

$$P=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}$$

משוואות שווי המשקל הן:

$$\boxed{\begin{array}{l}\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{6} & \frac{5}{6}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{pmatrix}\\ \pi_0+\pi_1=1\end{array}}$$

או

$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{2}{3}\pi_0+\frac{1}{6}\pi_1=\pi_0\\ \pi_0+\pi_1=1\end{array}}$$

והפתרון הוא: $\boxed{\pi_0=\frac{1}{3}\quad \pi_1=\frac{2}{3}}$

אם כך על פי משפט ההתכנסות עבור n גדול נקבל ש $P(X_n=1)\approx\frac{2}{3}$ ולכן הציון הממוצע הוא 66.66%.

חלק ג – שאלות פתוחות:

נתונה שרשרת מרקוב בזמן בדיד $\{X_n, n \geq 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

א) מהן מחלקות הקשירות בשרשרת זו?

פתרון: $\{1,2,5\},\{3,4\}$.

ב) סווג את מחלקות הקשירות (מי הן המחלקות המתמידות, מי הן מהחלקות החולפות).

פתרון: המחלקה $\{1,2,5\}$ מתמידה והמחלקה $\{3,4\}$ חולפת.

ג) נתון $X_0 = 3$, מה הסיכוי שבזמן 2 השרשרת תהייה במצב 2?

פתרון: צריך לחשב את האיבר $p_{3,2}^{(2)}$ זה בסך הכל הכפלה של השורה השלישית בעמודה השנייה של מטרית המעבר:

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/4 \\ 1/2 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\frac{1}{2} = \frac{1}{6}}$$

ד) נניח עכשיו ש $X_0 = 1$. רשום מערכת משוואות בשלושה נעלמים לצורך מציאת פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצבים $1,2,5$. אין צורך לפתור.

פתרון: כאשר $X_0 = 1$ אז השרשרת "תמיד תישאר" במחלקה $\{1,2,5\}$ בגלל שזו מחלקה מתמידה. אם כך ניתן להתייחס אל השרשרת כשרשרת אי-פריקה בעלת שלושה מצבים. בשרשראות סופיות אי-פריקות אחת המשמעויות של פתרון משוואות שווי המשקל היא פרופורצית הזמן שהשרשרת נמצאת במצבים.

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_5 \end{pmatrix}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_5 = 1$$

אחת משלושת המשוואות הראשונות תלויות באחרות אז נמחוק אחת (לדוגמא את השלישית) ואז (לדוגמא) המשוואות הן:

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\frac{1}{2}\pi_5=\pi_1 \\ &\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2 \qquad\quad =\pi_2 \\ &\pi_1+\pi_2+\pi_5=1 \end{aligned}}$$

לא היה צורך לפתור את המשוואות אבל הנה הפתרון:

מהמשוואה הראשונה והשלישית מקבלים מייד $\pi_1=\frac{1}{2}$

אז מהמשוואה השנייה מקבלים $\pi_2=\frac{1}{4}$ ואז גם (לפי השלישית) $\pi_5=\frac{1}{4}$.

ה) נסמן $T_{\{1,2,5\}}=\inf\{n\ge 1 \mid X_n\in\{1,2,5\}\}$ - זהו הזמן (החל מ-1) שבו בפעם הראשונה השרשרת באחד מהמצבים 1 או 2 או 5. מהי $E[T_{\{1,2,5\}} \mid X_0=4]$?

פתרון:

דרך א': בשרשרת זו הסיכוי לעבור מהמחלקה החולפת $\{2,3\}$ למחלקה המתמידה $\{1,2,5\}$ הוא זהה (1/3) בשתי המצבים החולפים, $\{2,3\}$. לכן כל עוד נמצאים "מטיילים" במחלקה החולפת, מתקיימים "ניסויי ברנולי" עם סיכוי להצלחה 1/3. ולכן תוחלת הזמן עד שעוברים ל $\{1,2,5\}$ היא 3. (שימו לב שזה גיאומטרי סופר ניסיונות – ז"א התומך הוא $1,2,3...$).

דרך ב' (התניה בצעד ראשון):

נסמן $A=\{1,2,5\}$ אז:

$$\boxed{\begin{aligned} &\mu_{4A}=\frac{1}{3}1+\frac{2}{3}(1+\mu_{3A}) \\ &\mu_{3A}=\frac{1}{3}1+\frac{2}{3}(1+\mu_{4A}) \end{aligned}}$$

נציב את המשוואה השנייה בתוך הראשונה:

$$\mu_{4A}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(1+\mu_{4A}))$$

ולכן $\mu_{4A}=3$.