החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

<u>מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250</u>

תשובות למבחן ביניים מס' 2

4.1.2008

מרצה: יוני נצרתי.
מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

א-1) יש טעות בשאלה, כוונת המשורר הייתה: $X_n = \begin{cases} 0 & N_n - N_{n-1} = 0 \\ 1 & N_n - N_{n-1} \geq 1 \end{cases}$ במקרה זה התשובה היא **נכון**. כפי שהשאלה כתובה, לא ברור מהו X_n כאשר $N_n - N_{n-1} > 1$ ולכן <u>השאלה בוטלה</u>.

א-2) **לא נכון.** נתון ש $N_{10} = 0$ אז המשתנה המקרי T_1 מתפלג כמו משתנה מקרי אקספוננציאלי מוזז ב – 10: ז"א

$f_{T_1}(t) = \begin{cases} 0 & t < 10 \\ \lambda e^{-\lambda(t-10)} & t \geq 10 \end{cases}$. פילוג אחיד מתקבל כאשר נתון היה ש $N_{10} = n$ עבור $n > 0$.

א-3) **נכון.** שרשרת מרקוב פריקה בעלת מרחב מצבים בגודל 3, חייבת להכיל 2 או 3 מחלקות קשירות. במידה ויש 2 מחלקות קשירות אז אחת היא עם 2 מצבים ואחת עם מצב 1, במידה ויש 3 מחלקות קשירות אז כל אחת עם מצב יחיד. נתון בנוסף שכל המצבים מתמידים, אז אותה מחלקה שיש בה מצב יחיד היא כזאת עם מצב סופג.

א-4) **נכון:**

$N_{12.5} - N_{10} \sim Poisson(2.5\lambda)$

$N_{11.5} - N_9 \sim Poisson(2.5\lambda)$

אם כך המשתנים המקריים הללו הינם שווי התפלגות. אמנם הם לא בלתי תלויים אבל זאת לא הייתה השאלה!!!

ב-1) השאלה היא למעשה $E[N_{1/2}] = ?$. כי הרי אפשר להניח שתהליך הפואסון N_t סופר כמה אנשים הגיעו לרכבת משעה 8:00 (כאשר יחידות הזמן של t הן שעות). ידוע שמספר האנשים שמגיעים בכל שעה (n) מתפלג: $N_n - N_{n-1} \sim Poisson(\lambda)$ וידוע (הנבחן צריך לדעת) ש $Var(Poisson(\lambda)) = \lambda$. ולכן על פי נתוני השאלה, $\lambda = 20$ ולכן $N_{1/2} \sim Poisson(20 \cdot \frac{1}{2} = 10)$ ולכן $E[N_{1/2}] = 10$.

ב-2) ראשית נבחין שהשרשרת בעלת מטריצת המעבר

א-1

$$P=\begin{pmatrix}1/3 & 2/3 & 0\\ 1/3 & 0 & 2/3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

היא **אי-פריקה** (קל לבדוק). אם כך התשובות הנכונות הן או א' או ג'.
את ב' אפשר לפסול בגלל שבשרשרת אי-פריקה סופית $\pi_i>0$ (גדול ממש מ – 0) ולכן לא יכול להיות ש $\pi_3=1$ (בגלל שאז $\pi_2=\pi_1=0$).
ה' הוא סעיף בשביל כאלו שבאמת לא הבינו את החומר – וניתן לפסול.
עכשיו בשביל להחליט בין א' ל – ג' ניתן לחשב במפורש את $(\pi_1\,\pi_2\,\pi_3)$ או להסתכל על המשוואה שמקבלים מהעמודה השלישית $\pi_2\frac{2}{3}=\pi_3$ ואז רואים שתשובה ג' היא הנכונה.

ב-3) נתון $\sum_{n=1}^{\infty}p_{10,10}{}^{(n)}=1.356$ (מתכנס) אז לכן מצב 10 הוא **חולף**. השרשרת אי-פריקה – אז יש לה מחלקת קשירות אחת וכל המצבים הם מאותו סוג (חולפים). אז גם מצב 15 הוא חולף ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}p_{15,15}{}^{(n)}$ מתכנס <= אז תשובה ג' נכונה ותשובות ב' ד' ה' לא נכונות.
תשובה א' היא לא נכונה: אמנם זהו סכום של ערכים שהם הסתברויות, אז מה? אלו לא הסתברויות של מאורעות בהכרח זרים.

ב-4) נשים לב שהשרשרת בעלת מטריצת המעבר

$$P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1/2 & 1/2 & 0\end{pmatrix}$$

היא מחזורית: במידה ומתחילים במצב 1 או 2 (בזמן 0) אז נמצאים במצבים 1 או 2 רק בזמנים הזוגיים (דרושים 2 צעדים לחזור לקבוצת מצבים זו) ובזמנים האי-זוגיים נמצאים תמיד במצב 3. במידה ומתחילים במצב 3 (בזמן 0) אז בזמנים האי-זוגיים נמצאים במצב 1 או 2 והסיכוי להיות במצב 1 בזמנים אלו הוא ½.

לכן טענות א', ב' ו- ג' נכונות והתשובה הנכונה היא ה'.

ב-5) תרגיל טכני פשוט: תשובה ג' היא הנכונה:

$$\begin{aligned}P(N_4=3,N_5=5)&=P(N_5-N_4=2,N_4=3)\\ &\underbrace{=}_{independent\ increments}P(N_5-N_4=2)P(N_4=3)\\ &\underbrace{=}_{stationary\ \ increments}P(N_1=2)P(N_4=3)\\ &=e^{-1\lambda}\frac{(1\lambda)^2}{2!}e^{-4\lambda}\frac{(4\lambda)^3}{3!}=e^{-5\lambda}\lambda^5\frac{16}{3}\end{aligned}$$

שאלות פתוחות:

א) הנציג מגיע לבדוק הודעות כל 12 דקות בדיוק. מספר ההודעות אשר נצברו במהלך 12 הדקות בין בדיקה לבדיקה (או בין תחילת המשמרת לבדיקה) מתפלג $Poisson(\frac{12}{60}20=4)$ ולכן הסיכוי שאין הודעות הוא e^{-4}.

ב) נסתכל על תהליך פואסון שמתחיל ב 12:00 או מייד לאחר בדיקת ההודעות ע"י הנציג. יש כאן עניין קטן הקשור ליחידות הזמן. במידה ואנו רוצים להתייחס לזמן בשעות אז $\lambda=20$ במידה ורוצים להתייחס לזמן בדקות אז $\lambda=\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ (ניתן לחשב גם כך וגם כך כמובן). נניח כי יחידת הזמן היא דקות, אז אנו מתבקשים לחשב: $P(T_1>10\mid N_{12}=1)$. אנו יודעים ש $T_1\mid_{N_{12}=1}\sim uniform(0,12)$ (את זה צריכים להוכיח בסעיף הבא). ולכן $P(T_1>10\mid N_{12}=1)=1-\frac{10}{12}=\frac{1}{6}$.

ג) בסעיף הקודם השתמשנו בתכונה $T_1\mid_{N_t=1}\sim uniform(0,t)$ ההוכחה פשוטה וניתנה בהרצאה (או חוברת ההרצאות). – הסטודנטים נתבקשו ללמוד הוכחה זו (סעיף 13 ברשימת הנושאים לבוחן).

ד) כאן מסתכלים רק על תהליך הפואסון של בדיקת ההודעות זהו תהליך אם קצב $\mu=2$ הודעות בשעה. אנו מתקשים לחשב:

$$P(N_{1/6}-N_0>0, N_{1+1/6}-N_1>0, N_{2+1/6}-N_2>0,\ldots,N_{7+1/6}-N_7>0)$$

$$\underset{\text{stationary and independent increments}}{\underset{\smile}{=}} P(N_{1/6}-N_0>0)^8=(1-e^{-2\frac{1}{6}})^8$$

$$=(1-e^{-1/3})^8$$

ה) הגעת "פריטים" שהם "הודעות" או "בדיקות" היא על פי תהליך פואסון בעל קצב 22. "פריט" הוא "בדיקה" בסיכוי $\frac{2}{22}$ ו"הודעה" בסיכוי $\frac{20}{22}$. ניתן להתייחס לכל הגעה של "פריט" כאל ניסוי ברנולי שהסיכוי להצליח בו הוא $\frac{2}{22}$. אם כך מספר הניסויים בין "הצלחה" ל"הצלחה" מתפלג גיאומטרית סופר כישלונות עם פרמטר $p=\frac{2}{22}=\frac{1}{11}$. זהו בדיוק מספר ההודעות שממתינות לנציג בכל בדיקה:

מספר ההודעות הממתינות $\equiv$ מספר הכישלונות.

אם כך פונקציות מסת ההסתברות היא:

$$P(X=k)=\left(\frac{10}{11}\right)^k\frac{1}{11}\ k=0,1,2,\ldots$$

ו) זאת הוכחה סטנדרטית שניתנה בהרצאה (ובחוברת ההרצאות) – הסטודנטים נתבקשו ללמוד הוכחה זו (סעיף 10 ברשימת הנושאים לבוחן).