החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן ביניים מס' 2

4.1.2008

מרצה: יוני נצרתי.
מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
  - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 20 נקודות.
  - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 50 נקודות.
  - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 30 נקודות.
- יש לענות על כל השאלות במקומות המיועדים לכך בשאלון זה בלבד באופן ברור ומסודר. אין להגיש דפי טיוטה.

יש לרשום שם ומספר ת"ז באופן ברור:

שם:____

ת"ז:____

בהצלחה

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות באופן ברור.

<u>תשובות לחלק א:</u>

א-1)	נכון	לא נכון
א-2)	נכון	לא נכון
א-3)	נכון	לא נכון
א-4)	נכון	לא נכון

א-1) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ. נסמן:

$X_n = \begin{cases} 0 & N_n - N_{n-1} = 0 \\ 1 & N_n - N_{n-1} = 1 \end{cases}$ עבור $n = 1,2,3...$ אזי $M_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא תהליך ספירה ברנולי עם פרמטר "סיכוי להצלחה" $1-e^{-\lambda}$.

(הערה: $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$). **שימו לב – יש טעות בשאלה – היא בוטלה, ראו פתרון.**

א-2) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ. נתון ש $N_{10} = 0$ אז $T_1 \sim Uniform(0,10)$ (T_1 מסמן את זמן המופע הראשון).

א-3) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$ שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $S = \{1,2,3\}$. נתון בנוסף שהשרשרת **פריקה** וכל והמצבים מתמידים. אז אחד המצבים הוא בהכרח מצב סופג (תזכורת: מצב i הוא סופג אם $p_{ii} = 1$).

א-4) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ. אז המשתנה המקרי, $N_{12.5} - N_{10}$ שווה התפלגות למשתנה המקרי $N_{11.5} - N_9$.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) באופן ברור.

תשובות לחלק ב:

ב-1)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-2)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-3)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-4)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-5)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)

ב-1) אנשים מגיעים לתחנת רכבת על פי תהליך פואסון. השונות של מספר האנשים אשר מגיעים בכל שעה היא 20. בשעה 8:00 הגיעה רכבת ואספה את כל האנשים ברציף. בשעה 8:30 מגיעה רכבת נוספת ואוספת את כל האנשים. מהי תוחלת מספר האנשים שעלו על הרכבת בשעה 8:30?

א) $\sqrt{20}$

ב) $1/\sqrt{20}$

ג) 20

ד) 10

ה) אין מספיק מידע בשביל לענות על השאלה.

ב-2) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 3 היא:

א) $5/7$

ב) 1

ג) קטנה מפרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 2.

ד) השרשרת פריקה ולכן לא ניתן לחשב.

ה) לא ניתן לחשב זאת ללא מידע לגבי הפילוג ההתחלתי של השרשרת.

ב-3) נתונה שרשרת מרקוב אי-פריקה בעלת מרחב מצבים אין-סופי $\{10,11,12,13,....\}$.

נתון בנוסף כי $\sum_{n=1}^{\infty} p_{10,10}{}^{(n)} = 1.356$.

(תזכורת לסימון $p_{i,j}{}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$).

א) לא ייתכן שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{10,10}{}^{(n)}$ גדול מ-1 בגלל שזהו סכום של הסתברויות.

ב) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{15,15}{}^{(n)}$ בהכרח מתבדר.

ג) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{15,15}{}^{(n)}$ בהכרח מתכנס.

ד) כל המצבים בשרשרת הם מתמידים.

ה) תשובות ג' ו – ד' נכונות.

ב-4) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \ge 1\}$ בעלת מרחב מצבים $\{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

א) במידה ו $P(X_0 = 1) = 1$ אז $P(X_{247} = 3) = 1$.

ב) במידה ו $P(X_0 = 2) = 1$ אז $P(X_{247} = 3) = 1$.

ג) במידה ו $P(X_0 = 3) = 1$ אז $P(X_{247} = 1) = 1/2$.

ד) טענות א' ו – ב' נכונות בלבד.

ה) טענות א', ב' ו- ג' נכונות.

ב-5) יהי $\{N_t, t \ge 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ. מהי $P(N_4 = 3, N_5 = 5)$?

א) $\frac{5}{24}$

ב) $e^{-3\lambda}\frac{32}{3}\lambda^4$

ג) $e^{-5\lambda}\frac{16}{3}\lambda^5$

ד) $e^{-5\lambda}\frac{18}{31}\lambda^2$

ה) $e^{-\lambda}\frac{16}{3}\lambda^7$

חלק ג – שאלות פתוחות:

חברת אוטובוסים מפעילה מרכז שרות לקוחות באמצעות הודעות SMS. אנשים כותבים SMSים לחברת האוטובוס ובהם שאלות לגבי לוחות הזמנים של קווי האוטובוס ונציגי החברה משיבים. מהשעה 12:00 בלילה ועד השעה 8:00 בבוקר עובד בחברה נציג אחד בלבד אשר משיב להודעות SMS.

נניח בנוסף את ההנחות הבאות:

- SMSים מגיעים לחברה בין השעות 12:00 בלילה ועד 8:00 בבוקר על פי תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda = 20$ הודעות בשעה.
- זמן הטיפול בהודעות SMS של נציג החברה הוא זניח (שניות ספורות) וניתן להניח שהוא 0 (מיידי).
- בתחילת המשמרת של הנציג לא ממתינים עבורו SMSים לטיפול.

ראשית נניח הנציג ניגש לטפל בהודעות בכל 12 דקות בדיוק:

א) (5) מה ההסתברות שכאשר הנציג מגיע לבדוק הודעות, לא ממתניות עבורו הודעות לטיפול.

ב) (5) נתון כי הנציג בדק את ההודעות והמתינה עבורו הודעה בודדת. מה הסיכוי שההודעה המתינה לנציג יותר מ – 10 דקות.

ג) (5) תשובתכם לסעיף הקודם השתמשה בתכונה מסוימת של תהליך פואסון. ציין מהי התכונה במפורש והוכח את התכונה. ההוכחה צריכה להיות קצרה, ברורה ומדויקת.

כעת נניח שהנציג בודק את ההודעות על פי תהליך פואסון עם קצב $\mu = 2$. ז"א בממוצע כל 30 דקות הנציג ניגש לבדוק את ההודעות והזמנים בין בדיקה לבדיקה הינם משתנים מקריים אקספוננציאלים חסרי זיכרון.

ד) (5) מה הסיכוי שהנציג בדק הודעות במהלך 10 הדקות הראשונות של כל שעה עגולה (ז"א הודעות נבדקו בקטעי הזמן $12:00-12:10, 1:00-1:10, \ldots, 7:00-7:10$).

ה) (5) מהו פילוג מספר ההודעות אשר הנציג משיב אליהן בכל פעם שהוא בודק את ההודעות. רשום את פונקצית מסת ההסתברות (פונקציות ההסתברות) במפורש.

<u>ו) (5): (ללא קשר לסעיפים הקודמים):</u>

נתון תהליך סטוכסטי בזמן רציף, $\{N_t, t \ge 0\}$ המקיים:

1) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$

2) $P(N_h \ge 2) = o(h)$

3) התהליך הוא בעל אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

הוכח: $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$. ההוכחה צריכה להיות קצרה ומדויקת (בלי סיפורים).

(תזכורת: $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$).

ענה על כל הסעיפים בעמודים הבאים באופן מסודר.

<u>תשובות לחלק ג:</u>

<u>המשך תשובות לחלק ג:</u>

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

עמוד אחרון.