החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

פתרון למבחן סופי – מועד א'

7.2.2008

מרצה: יוני נצרתי.
מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

א-1) נתון $X \sim \exp(\lambda)$. אז קצב הסיכון של X הוא $\frac{1}{\lambda}$.

לא נכון- קצב הסיכון הוא λ.

א-2) יהיו $X_1, X_2, ...$ סדרת משתנים מקריים i.i.d. נגדיר $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. אז התהליך $\{S_n, n \geq 1\}$ הוא תהליך בעל אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

נכון -

אינק' סטצ' - $S_{m+k} - S_m = \sum_{i=m+1}^{m+k} X_k \underbrace{\overset{d}{=}}_{equal\ in\ distribution} S_{n+k} - S_n = \sum_{i=n+1}^{n+k} X_k$.

אינק' ב"ת – ניקח $n_1 < n_2 \leq n_3 < n_4$

$$S_{n_2} - S_{n_1} = \sum_{i=n_1+1}^{n_2} X_i$$

בלתי תלויים.

$$S_{n_4} - S_{n_3} = \sum_{i=n_3+1}^{n_4} X_i$$

א-3) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ. נסמן:

$X_n = \begin{cases} 0 & N_n - N_{n-1} = 0 \\ 1 & N_n - N_{n-1} \geq 1 \end{cases}$ עבור $n = 1,2,3...$.

אזי $n = 0,1,2,...$ $G_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא תהליך ספירה ברנולי עם פרמטר "סיכוי להצלחה" $1 - e^{-\lambda}$.

(הערה: $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$).

נכון - G_n הוא סכום של משתנים מקריים ברנולי בלתי תלויים עם סיכוי להצלחה $P(N_1 \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$.

א-4) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון. נתון ש $N_{18} = 18$ אז בהכרח $\lambda = 1$.

לא נכון – אמנם אם $\lambda = 1$ אז $E[N_{18}] = 18$ אבל ייתכן בהחלט ש $\lambda \neq 1$ ונקבל $N_{18} = 18$.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

ב-1) במשרד גדול ישנה תיבת דואר יוצא. העובדים במשרד מניחים דואר בתיבה ואחראי המשרד מגיע לאסוף את הדואר באופן תקופתי. פריטי הדואר מונחים בתיבה על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. אחראי הדואר מגיע לאסוף את הדואר על פי תהליך פואסון עם פרמטר μ. שני התהליכים הינם בלתי תלויים.
מה הסיכוי שכאשר אחראי הדואר מגיעה לתא הוא אוסף יותר מ – 5 פריטי דואר?

א) $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^6$ ב) $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^5$ ג) $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^6$ ד) $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^5$ ה) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lambda+\mu}$

<u>פתרון: ד'</u>

ניתן להסתכל על "הגעות" אל תיבת הדואר כתהליך פואסון בעל קצב $\lambda+\mu$. הסיכוי ש"הגעה" היא פריט דואר הוא $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ והסיכוי ש"הגעה" היא אחראי המשרד הוא $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

לאחר כל הגעה של אחראי המשרד נתחיל אוסף ניסויי ברנולי ב"ת עם סיכוי להצלחה $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ (ניסוי עבור כל "הגעה" נוספת). מספר פריטי הדואר הנאספים ב"הגעה" הבאה מתפלג גיאומטרי סופר כישלונות עם סיכוי הצלחה $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$. הסיכוי שיש יותר מ – 5 פרטי דואר הוא הסיכוי לכך שהיו לפחות 5 כישלונות וזה $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^5$.

ב-2) נתון תהליך קפיצה מרקובי, $\{X_t, t\geq 0\}$, בעל מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q=\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

א) פרופורציית הזמן במצב 2 כפולה מפרופורציית הזמן במצב 3.

ב) פרופורציית הזמן במצב 2 היא חצי מפרופורציית הזמן במצב 3.

ג) פרופורציית הזמן במצב 1 שווה לפרופורציית הזמן במצב 4.

ד) פרופורציית הזמן במצב 1 שווה לפרופורציית הזמן במצב 2.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

<u>פתרון: ג'</u>

להלן משוואות שווי משקל:

$$2\pi_1 = 2\pi_4$$
$$2\pi_1 = \pi_2$$
$$\pi_2 = \pi_3$$
$$\pi_3 = 2\pi_4$$
$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$$

רואים מהמשוואות ש – א', ב' אינן נכונות, ג' נכונה ו – ד' אינה נכונה.

ב-3) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \ge 0\}$ בעל מרחב מצבים $S = \{1,2,3\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

מהי מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב המשוכנת?

א) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ ב) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$ ג) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

ד) $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$ ה) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$

פתרון: ה':

פשוט מאוד. אין מה להסביר.

ב-4) נתונות 2 מערכות תורים במצב יציב: $M/M/1$ ו - $M/M/\infty$.

קצבי ההגעה והשרות הינם כדלקמן:

קצב הגעת הצרכנים הוא 2 צרכנים בדקה.

תוחלת זמן השרות היא $\frac{1}{4}$ דקה.

הקצבים זהים עבור 2 המערכות.

עבור מערכת ה - $M/M/1$: נסמן את תוחלת מספר הצרכנים במערכת ע"י L_1 ואת שונות מספר הצרכנים במערכת ע"י V_1. עבור מערכת ה - $M/M/\infty$: נסמן את תוחלת מספר הצרכנים במערכת ע"י L_∞ ואת שונות מספר הצרכנים במערכת ע"י V_∞.

א) $L_1 > L_\infty$ וגם $V_1 > V_\infty$.

ב) $L_1 > L_\infty$ וגם $V_1 < V_\infty$.

ג) $L_1 < L_\infty$ וגם $V_1 > V_\infty$.

ד) $L_1 < L_\infty$ וגם $V_1 < V_\infty$.

ה) $L_1 = L_\infty$ וגם $V_1 = V_\infty$.

<u>פתרון: א'</u>

במערכת $M/M/\infty$ פילוג מספר הצרכנים הוא $Possion(\rho)$. במערכת $M/M/1$ פילוג מספר הצרכנים הוא $Geometric_0(1-\rho)$. לכן:

$$L_\infty = \rho \qquad V_\infty = \rho$$

$$L_1 = \frac{\rho}{1-\rho} \qquad V_1 = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

נשים לב ש $1-\rho<1$ ולכן $\frac{1}{(1-\rho)^2}>1$, $\frac{1}{1-\rho}>1$ ולכן המדדים (תוחלת שונות) של מערכת M/M/1 הינם גבוהים יותר ולכן סעיף א' נכון.

ב-5) נתונה מערכת תורים $M/M/1/30$ במצב יציב. קצב הגעת הצרכנים הוא $\lambda=1$. תוחלת זמן השרות היא $\frac{1}{\mu}=4$ דקות. מהי תוחלת מספר הצרכנים אשר עוזבים את המערכת בדקה?

א) $4\left(1-4^{30}\frac{1-4}{1-4^{31}}\right)$

ב) $1-4^{30}\frac{1-4}{1-4^{31}}$

ג) $\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{30}\frac{1-1/4}{1-(1/4)^{31}}\right)$

ד) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1-1/4}{1-(1/4)^{31}}\right)$

ה) $\frac{1-1/4}{1-(1/4)^{31}}$

<u>פתרון: ב':</u>

המערכת במצב יציב אז קצב עזיבת הצרכנים שווה לקצב כניסת הצרכנים. קצב כניסת הצרכנים הוא: $\lambda(1-\pi_{30})$.

במערכת $\rho=\frac{\lambda}{\mu}=4$. ו - $\pi_{30}=4^{30}\frac{1-4^{30}}{1-4^{31}}$. לכן הפתרון הוא תשובה ב'.

ב-6) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \ge 0\}$ בעל מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q=\begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot$$

נתון $P(X_0=1)=1$.

א) הסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 2 שווה לסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 3.

ב) הסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 4 הוא ¼.

ג) הסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 4 הוא ½.

ד) תשובות א' ו – ב' נכונות.

ה) תשובות א' ו – ג' נכונות.

<u>פתרון: ה':</u>

נסתבכל על השרשרת המשוכנת:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

. יש מחלקה חולפת: $\{1\}$ ו- 2 מחלקות מתמידות: $\{2,3\},\{4,5\}$.

2, 3 הינם באותה מחלקה מתמידה ולכן תשובה א' נכונה.

הסיכוי להגיעה אי פעם ל – 4 תלוי אך ורק בקפיצה הראשונה ויש סיכוי של ½ שבקפיצה הראשונה ניכנס למחלקה המתמידה $\{4,5\}$. לכן תשובה ג' נכונה.

לכן הפתרון הוא ה'.

ב-7) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \ge 0\}$ בעל מרחב מצבים $S=\{0,1,2,...\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

א) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 היא $1/3$.

ב) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 היא $1/2$.

ג) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 היא $1/4$.

ד) לא ניתן לחשב את פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 בגלל שמרחב המצבים הוא אינסופי.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

<u>פתרון: ב':</u>

זהו תהליך קפיצה מרקובי לידה-מוות של M/M/1 עם $\lambda=1$, $\mu=2$. אז

$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}=\dfrac{1}{2}$ ולכן $\pi_0=1-\rho=\dfrac{1}{2}$

<u>חלק ג – שאלות פתוחות:</u>

על אי בודד קטן חיים 7 אנשים. באי יש טלפון ציבורי יחיד. הטלפון הוא הקשר היחיד של האנשים לשאר העולם.

להלן נתונים נוספים:

- כאשר אדם מעוניין לקיים שיחת טלפון והטלפון תפוס הוא נעמד בתור לטלפון ולא עוזב את התור עד אשר הגיעה תורו.
- כאשר אדם מסיים שיחת טלפון. משך הזמן עד לפעם הבאה שהוא יהיה מעוניין לקיים שיחה הוא משתנה מקרי $\exp(\lambda)$.
- משך שיחת טלפון הוא משתנה מקרי $\exp(\mu)$.
- כל המשתנים המקריים שתוארו הינם בלתי תלויים.
- נניח שהמערכת במצב יציב.

נסמן ב $\{X_t,t\geq 0\}$ את מספר האנשים אשר עומדים בתור או מקיימים שיחת טלפון בזמן t . לדוגמא: אם $X_{21.5}=3$ אז המצב בזמן 21.5 הוא: 2 אנשים עומדים בתור. אדם אחד מדבר בטלפון, ו 4 אנשים על האי אינם משתמשים בתור או בטלפון.

א) תאר את $\{X_t,t\geq 0\}$ כתהליך קפיצה מרקובי: רשום באופן נקי ומסודר את מטריצת הגנראטור.

<u>פתרון:</u>

$$Q=\begin{array}{c}0\\1\\2\\3\\4\\5\\6\\7\end{array}\begin{pmatrix}
-7\lambda & 7\lambda & & & & & & \\
\mu & -(\mu+6\lambda) & 6\lambda & & & & & \\
 & \mu & -(\mu+5\lambda) & 5\lambda & & & & \\
 & & \mu & -(\mu+4\lambda) & 4\lambda & & & \\
 & & & \mu & -(\mu+3\lambda) & 3\lambda & & \\
 & & & & \mu & -(\mu+2\lambda) & 2\lambda & \\
 & & & & & \mu & -(\mu+\lambda) & \lambda \\
 & & & & & & \mu & -\mu
\end{pmatrix}$$

לדוגמא: נסתכל על השורה הרביעית (השורה שמתאימה לקצבי המעבר ממצב 3: במצב 3 יש 2 אנשים בתור, 1 בשרות ו 4 אנשים אינם בתור או בשרות. הזמן עד לסיום השרות (מוות בתהליך לידה המוות) הוא $\exp(\mu)$. הזמן עד להגעה של אדם נוסף לתור הוא המינימום של 4 מ"מ $\exp(\lambda)$ ולכן הוא $\exp(4\lambda)$.

ב) רשום את מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב המשוכנת.

<u>פתרון:</u>

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ \frac{\mu}{6\lambda+\mu} & 0 & \frac{6\lambda}{6\lambda+\mu} & & & & & \\ & \frac{\mu}{5\lambda+\mu} & 0 & \frac{5\lambda}{5\lambda+\mu} & & & & \\ & & \frac{\mu}{4\lambda+\mu} & 0 & \frac{4\lambda}{4\lambda+\mu} & & & \\ & & & \frac{\mu}{3\lambda+\mu} & 0 & \frac{3\lambda}{3\lambda+\mu} & & \\ & & & & \frac{\mu}{2\lambda+\mu} & 0 & \frac{2\lambda}{2\lambda+\mu} & \\ & & & & & \frac{\mu}{\lambda+\mu} & 0 & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \\ & & & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ג) מה הקשר בין התהליך $\{X_t, t \geq 0\}$ לבין התהליך המתאים למערכת תורים $M/M/7/7$. הסבר באופן קצר ומדויק.

__פתרון:__

נסתכל על תהליך $\{\widehat{X}_t, t \geq 0\}$ המתאים למערכת M/M/7/7 עם קצב הגעה $\widehat{\lambda}$ וקצב שרות $\widehat{\mu}$.

נסמן את מטריצת הגנראטור של תהליך זה ב $\widehat{Q}$.

אז:

$$\widehat{Q}=\begin{pmatrix} & \widehat{\lambda} & & & & & & \\ \widehat{\mu} & & \widehat{\lambda} & & & & & \\ & 2\widehat{\mu} & & \widehat{\lambda} & & & & \\ & & 3\widehat{\mu} & & \widehat{\lambda} & & & \\ & & & 4\widehat{\mu} & & \widehat{\lambda} & & \\ & & & & 5\widehat{\mu} & & \widehat{\lambda} & \\ & & & & & 6\widehat{\mu} & & \widehat{\lambda} \\ & & & & & & 7\widehat{\mu} & \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} & 7\lambda & & & & & & \\ \mu & & 6\lambda & & & & & \\ & \mu & & 5\lambda & & & & \\ & & \mu & & 4\lambda & & & \\ & & & \mu & & 3\lambda & & \\ & & & & \mu & & 2\lambda & \\ & & & & & \mu & & \lambda \\ & & & & & & \mu & \end{pmatrix}$$

(הערה: לא רשמנו את האלכסון – הוא לא מוסיף מידע לפתרון.

אם נציב (ב- $\widehat{\lambda},\widehat{\mu}$) $\widehat{\lambda}=\mu$ ו- $\widehat{\mu}=\lambda$ ונסתכל על התהליך $\{Z_t = 7-\widehat{X}_t, t \geq 0\}$ אז נקבל ש Z_t הוא שווה התפלגות לתהליך המקורי שלנו (X_t).

תשובה פחות פורמאלית (אבל מספיק טובה לצורך קבלת ניקוד) – התהליך שלנו (אורך התור מאוכלוסיה סופית בגודל 7) מתנהג כמו תהליך $M/M/7/7$ כאשר מחליפים את קצב ההגעה וקצב השרות וכאשר מתייחסים למצב 7 של $M/M/7/7$ כמצב 0 בתהליך שלנו, למצב 6 של $M/M/7/7$ כמצב 1 בתהליך שלנו וכן הלאה.

ד) רשום ביטוי לפרופורציית הזמן שבו הטלפון אינו בשימוש (רמז: ניתן להשתמש בסעיף ג').

<u>פתרון:</u>

לאור הסעיף הקודם, זהו הסיכוי לכך ש ב $M/M/7/7$ (עם קצבי הגעה ושרות מוחלפים) המערכת מלאה:
$$\pi_{not\ in\ use}=\frac{\frac{\left(\mu/\lambda\right)^7}{7!}}{\sum_{i=0}^{7}\frac{\left(\mu/\lambda\right)^i}{i!}}$$

הערה: למי שלא הצליח בסעיף הקודם, ניתן גם לפתור מעקרונות ראשונים: פיתוח משוואות שווי משקל מפורטות (או שימוש בנוסחה הכללית של תהליך לידה מוות).

ה) הנח כעת שעל האי ישנם 2 אנשים בלבד. בנוסף הנח: $\lambda=\mu=1$. מהי תוחלת מספר האנשים הממתינים בתור לטלפון.

<u>פתרון:</u>

עכשיו:
$$Q=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

בדומה לסעיף הקודם (ד') ניתן להשתמש בתוצאה דומה לזו של סעיף (ג') (מערכת $M/M/2/2$). לצורך קבלת $\left(\pi_0\quad \pi_1\quad \pi_2\right)$. ואז הפתרון הוא

$$L_q=0\cdot\pi_0+0\cdot\pi_1+1\cdot\pi_2=\pi_2 \underset{equivilance\ \ to\ \ M/M/2/2}{=}\frac{\frac{\left(1/1\right)^0}{0!}}{\sum_{i=0}^{2}\frac{\left(1/1\right)^i}{i!}}=\frac{1}{1+1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}.$$

לחלופין ניתן לפתור משוואת שווי משקל או משוואות שווי משקל מפורטות:

להלן המשוואות המפורטות:
$$2\pi_0=\pi_1$$
$$\pi_1=\pi_2$$
$$\pi_0+\pi_1+\pi_2=1$$

$$\frac{1}{2}\pi_2+\pi_2+\pi_2=1$$

והפתרון הוא:
$$\Downarrow$$
$$\pi_2=\frac{2}{5}$$

<u>ללא קשר לסעיפים הקודמים:</u>

הוכח את הטענות הבאות באופן מדויק ותמציתי:

ו) יהי $\{N_t,t\ge 0\}$ תהליך פואסון עם קצב λ. אז: $N_t\,|_{N_{t+s}=n}\sim Bin(n,\frac{t}{t+s})$.

2-א

<u>פתרון:</u>

$$P(N_t=k \mid N_{t+s}=n)=\frac{P(N_t=k, N_{t+s}=n)}{P(N_{t+s}=n)}=\frac{P(N_t=k, N_{t+s}-N_t=n-k)}{P(N_{t+s}=n)}$$

$$\underbrace{=}_{ind'stat'increments}\frac{P(N_t=k)P(N_{t+s}-N_t=n-k)}{P(N_{t+s}=n)}=\frac{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-k}}{n-k!}}{e^{-\lambda(t+s)}\frac{(\lambda(t+s))^n}{n!}}=\binom{n}{k}\frac{t^k s^{n-k}}{(t+s)^{k+n-k}}$$

$$=\binom{n}{k}\left(\frac{t}{t+s}\right)^k\left(\frac{s}{t+s}\right)^{n-k}$$

ז) תהי $\{X_n, n\geq 0\}$, שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $S=\{1,...,N\}$ ומטריצת מעבר P . אז $P^{(2)}=P^2$. (האיבר ה i,j של $P^{(2)}$ הוא $p_{i,j}{}^{(2)}=P(X_2=j \mid X_0=i)$.

<u>פתרון:</u>

$$p_{i,j}{}^{(2)}=P(X_2=j \mid X_0=i)\underbrace{=}_{law of total probability}\sum_{k=1}^{N}P(X_2=j \mid X_1=k, X_0=i)P(X_1=k \mid X_0=i)$$

$$\underbrace{=}_{Markov property}\sum_{k=1}^{N}P(X_2=j \mid X_1=k)P(X_1=k \mid X_0=i)\underbrace{=}_{Time Homogenous}\sum_{k=1}^{N}P(X_1=j \mid X_0=k)P(X_1=k \mid X_0=i)$$

$$=\sum_{k=1}^{N}p_{kj}p_{ik}$$