החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן סופי – מועד א'

7.2.2008

מרצה: יוני נצרתי.
מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שלוש שעות.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
  - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 20 נקודות.
  - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 49 נקודות.
  - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 35 נקודות.
- יש לענות על כל השאלות במקומות המיועדים לכך **בשאלון זה בלבד** באופן ברור ומסודר. אין להגיש דפי טיוטה.

יש לרשום שם ומספר ת"ז באופן ברור:

שם:____

ת"ז:____

בהצלחה

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות באופן ברור.

תשובות לחלק א:

א-1)	נכון	לא נכון
א-2)	נכון	לא נכון
א-3)	נכון	לא נכון
א-4)	נכון	לא נכון

א-1) נתון $X \sim \exp(\lambda)$. אז קצב הסיכון של X הוא $\frac{1}{\lambda}$.

א-2) יהיו $X_1, X_2, ...$ סדרת משתנים מקריים i.i.d. נגדיר $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. אז התהליך $\{S_n, n \geq 1\}$ הוא תהליך בעל אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

א-3) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ. נסמן:

$X_n = \begin{cases} 0 & N_n - N_{n-1} = 0 \\ 1 & N_n - N_{n-1} \geq 1 \end{cases}$ עבור $n = 1,2,3...$.

אזי $G_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ הוא תהליך ספירה ברנולי עם פרמטר "סיכוי להצלחה" $1 - e^{-\lambda}$.

(הערה: $\sum_{i=1}^{0} X_i = 0$).

א-4) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון. נתון ש $N_{18} = 18$ אז בהכרח $\lambda = 1$.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) באופן ברור.

תשובות לחלק ב:

ב-1)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-2)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-3)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-4)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-5)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-6)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-7)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)

ב-1) במשרד גדול ישנה תיבת דואר יוצא. העובדים במשרד מניחים דואר בתיבה ואחראי המשרד מגיע לאסוף את הדואר באופן תקופתי. פריטי הדואר מונחים בתיבה על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. אחראי הדואר מגיע לאסוף את הדואר על פי תהליך פואסון עם פרמטר μ. שני התהליכים הינם בלתי תלויים.
מה הסיכוי שכאשר אחראי הדואר מגיעה לתא הוא אוסף יותר מ – 5 פריטי דואר?

א) $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^6$

ב) $\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^5$

ג) $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^6$

ד) $\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^5$

ה) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\lambda+\mu}$

ב-2) נתון תהליך קפיצה מרקובי, $\{X_t, t \geq 0\}$, בעל מרחב מצבים $S = \{1,2,3,4\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

א) פרופורציית הזמן במצב 2 כפולה מפרופורציית הזמן במצב 3.

ב) פרופורציית הזמן במצב 2 היא חצי מפרופורציית הזמן במצב 3.

ג) פרופורציית הזמן במצב 1 שווה לפרופורציית הזמן במצב 4.

ד) פרופורציית הזמן במצב 1 שווה לפרופורציית הזמן במצב 2.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

ב-3) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \geq 0\}$ בעל מרחב מצבים $S = \{1,2,3\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

מהי מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב המשוכנת?

א) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

ב) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

ג) $P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

ד) $P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

ה) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/5 & 2/5 & 0 \end{pmatrix}$

ב-4) נתונות 2 מערכות תורים במצב יציב: $M/M/1$ ו- $M/M/\infty$.
קצבי ההגעה והשרות הינם כדלקמן:
קצב הגעת הצרכנים הוא 2 צרכנים בדקה.
תוחלת זמן השרות היא $\frac{1}{4}$ דקה.
הקצבים זהים עבור 2 המערכות.
עבור מערכת ה - $M/M/1$: נסמן את תוחלת מספר הצרכנים במערכת ע"י L_1 ואת שונות מספר הצרכנים במערכת ע"י V_1.
עבור מערכת ה - $M/M/\infty$: נסמן את תוחלת מספר הצרכנים במערכת ע"י L_∞ ואת שונות מספר הצרכנים במערכת ע"י V_∞.

א) $L_1 > L_\infty$ וגם $V_1 > V_\infty$.

ב) $L_1 > L_\infty$ וגם $V_1 < V_\infty$.

ג) $L_1 < L_\infty$ וגם $V_1 > V_\infty$.

ד) $L_1 < L_\infty$ וגם $V_1 < V_\infty$.

ה) $L_1 = L_\infty$ וגם $V_1 = V_\infty$.

ב-5) נתונה מערכת תורים $M/M/1/30$ במצב יציב. קצב הגעת הצרכנים הוא $\lambda = 1$. תוחלת זמן השרות היא $\frac{1}{\mu} = 4$ דקות. מהי תוחלת מספר הצרכנים אשר עוזבים את המערכת בדקה?

א) $4\left(1-4^{30}\frac{1-4}{1-4^{31}}\right)$

ב) $1-4^{30}\frac{1-4}{1-4^{31}}$

ג) $\frac{1}{4}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{30}\frac{1-1/4}{1-(1/4)^{31}}\right)$

ד) $\frac{1}{4}\left(1-\frac{1-1/4}{1-(1/4)^{31}}\right)$

ה) $\frac{1-1/4}{1-(1/4)^{31}}$

ב-6) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \geq 0\}$ בעל מרחב מצבים $S = \{1,2,3,4,5\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

נתון $P(X_0 = 1) = 1$.

א) הסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 2 שווה לסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 3.

ב) הסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 4 הוא ¼.

ג) הסיכוי שהתהליך יגיעה אי פעם למצב 4 הוא ½.

ד) תשובות א' ו – ב' נכונות.

ה) תשובות א' ו – ג' נכונות.

ב-7) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \geq 0\}$ בעל מרחב מצבים $S = \{0,1,2,...\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

א) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 היא $1/3$.

ב) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 היא $1/2$.

ג) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 היא $1/4$.

ד) לא ניתן לחשב את פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 0 בגלל שמרחב המצבים הוא אינסופי.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

חלק ג – שאלות פתוחות:

על אי בודד קטן חיים 7 אנשים. באי יש טלפון ציבורי יחיד. הטלפון הוא הקשר היחיד של האנשים לשאר העולם.
להלן נתונים נוספים:

- כאשר אדם מעוניין לקיים שיחת טלפון והטלפון תפוס הוא נעמד בתור לטלפון ולא עוזב את התור עד אשר הגיעה תורו.
- כאשר אדם מסיים שיחת טלפון. משך הזמן עד לפעם הבאה שהוא יהיה מעוניין לקיים שיחה הוא משתנה מקרי $\exp(\lambda)$.
- משך שיחת טלפון הוא משתנה מקרי $\exp(\mu)$.
- כל המשתנים המקריים שתוארו הינם בלתי תלויים.
- נניח שהמערכת במצב יציב.

נסמן ב $\{X_t, t \geq 0\}$ את מספר האנשים אשר עומדים בתור או מקיימים שיחת טלפון בזמן t. לדוגמא: אם $X_{21.5} = 3$ אז המצב בזמן 21.5 הוא: 2 אנשים עומדים בתור, אדם אחד מדבר בטלפון, ו 4 אנשים על האי אינם משתמשים בתור או בטלפון.

א) תאר את $\{X_t, t \geq 0\}$ כתהליך קפיצה מרקובי: רשום באופן נקי ומסודר את מטריצת הגנראטור.

ב) רשום את מטריצת המעבר של שרשרת המרקוב המשוכנת.

ג) מה הקשר בין התהליך $\{X_t, t \geq 0\}$ לבין התהליך המתאים למערכת תורים $M/M/7/7$. הסבר באופן קצר ומדויק.

ד) רשום ביטוי לפרופורציית הזמן שבו הטלפון אינו בשימוש (רמז: ניתן להשתמש בסעיף ג').

ה) הנח כעת שעל האי ישנם 2 אנשים בלבד. בנוסף הנח: $\lambda = \mu = 1$. מהי תוחלת מספר האנשים הממתינים בתור לטלפון.

ללא קשר לסעיפים הקודמים:

הוכח את הטענות הבאות באופן מדויק ותמציתי:

ו) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם קצב λ. אז: $N_t |_{N_{t+s}=n} \sim Bin(n, \frac{t}{t+s})$.

ז) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$, שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $S = \{1,...,N\}$ ומטריצת מעבר P. אז $P^{(2)} = P^2$.
(תזכורת: האיבר ה i,j של $P^{(2)}$ הוא $p_{i,j}^{(2)} = P(X_2 = j | X_0 = i)$).

ענה על כל הסעיפים של עמוד זה בעמודים הבאים __באופן מסודר__.

תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

עמוד אחרון.