החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

פתרון למבחן סופי – מועד ב'

28.2.2008

מרצה: יוני נצרתי.

מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

א-1) בשרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים סופי, כל המצבים המתמידים הם מצבים מתמידים חיובית.

פתרון: נכון – מצבים מתמידים אפס יכולים להיות קיימים אך ורק בשרשראות בעלות מרחב מצבים אין-סופי.

א-2) יהי $\{N_t, t \ge 0\}$ תהליך פואסון. אז $P(T_1 < 3 \mid N_5 = 1) = 1/3$.

תזכורת: T_1 הוא זמן המופע הראשון.

פתרון: לא נכון. $T_1|_{N_5=1} \sim Uniform(0,5)$ ולכן $P(T_1 < 3 \mid N_5 = 1) = 3/5$.

א-3) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \ge 0\}$ מחזורית בעלת מטריצת מעבר P. אז כל איברי P הינם 0 או 1.

פתרון: לא נכון. אמנם כל שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים וללא מצבים סופגים אשר איברי מטריצת המעבר, P, שלה הם 0 או 1 היא מחזורית. אבל יש הרבה דוגמאות לשרשראות מחזוריות שאינן דטרמיניסטיות:

לדוגמא:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

א-4) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \ge 0\}$ בעלת מטריצת מעבר P. נתון כי במטריצה P ישנם אפסים (לא כל האיברים שונים מאפס). אז יש לשרשרת המרקוב לפחות מצב חולף אחד.

פתרון: לא נכון. לדוגמא:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

ב-1) נתון תהליך קפיצה מרקובי, $\{X_t, t \geq 0\}$, בעל מרחב מצבים $S = \{1,2,3,4\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

א) פרופורציית הזמן במצב 1 שווה לפרופורציית הזמן במצב 4.

ב) פרופורציית הזמן במצב 4 היא שליש מפרופורציית הזמן במצב 3.

ג) בשרשרת המרקוב המשוכנת כל המצבים חולפים.

ד) תשובות א', ב' ו – ג' נכונות.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

<u>פתרון: א'</u>

משוואת שווי משקל הראשונה: $\pi_1 = \pi_4$ אז א' נכון.

משוואת שווי משקל שלישית: $3\pi_3 = \pi_4$ אז ב' לא נכון.

ג' לא נכון – מרחב המצבים של שרשרת המרקוב המשוכנת הוא סופי – אז יש משפט שאומר שלא כל המצבים יכולים להיות חולפים – חוץ מזה, כולם מתמידים.

ב-2) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \geq 0\}$ בעל מרחב מצבים $S = \{1,2,3,4\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

א) בשרשרת המרקוב המשוכנת יש מחלקת קשירות אחת.

ב) שרשרת המרקוב המשוכנת הינה אי פריקה.

ג) בשרשרת המרקוב המשוכנת כל המצבים מתמידים.

ד) תשובות א', ב' ו – ג' נכונות.

ה) אף תשובה אינה נכונה.

<u>פתרון: ה'</u>

להלן מטריצת המעבר המשוכנת:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מחלקות הקשירות הן: $\{1,2\}$ - חולפת. $\{3,4\}$ - מתמידה.

ב-3) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

א) פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 1 גדולה מפרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 2.

ב) פרופורציית הזמן שהשרשת נמצאת בכל מצב היא שווה.

ג) במידה וההתפלגות ההתחלתית היא אחידה בדידה אז $\{X_n, n \geq 0\}$ הוא סטציונרי.

ד) תשובות א' ו- ג' נכונות.

ה) תשובות ב' ו – ג' נכונות.

<u>פתרון: ה'</u>

סעיף ב נכון: זאתי שרשרת מרקוב "סטוכסטית כפולה" ולכן (כפי שיש להוכיח בסעיף ז' בשאלה הפתוחה) ההתפלגות הסטציונרית היא אחידה בדידה. ניתן גם כמובן לראות ישירות ממשואות שווי משקל ש -

$$\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \frac{1}{3}.$$

סעיף ג נכון: במידה ומתחילים שרשרת מרקוב עם ההתפלגות הסטציונרית (ז"א $P(X_0 = i) = \pi_i$ אז השרשרת היא סטציונרית (בפרט, $P(X_n = i) = P(X_m = i)$).

ב-4) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{1,2,3\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

חשב את $E[T_3 \mid X_0 = 1]$

תזכורת: $T_3 = \min\{n \geq 1 \mid X_n = 3\}$.

א) $E[T_3 \mid X_0 = 1] = 8/3$

ב) $E[T_3 \mid X_0 = 1] = 3$

ג) $E[T_3 \mid X_0 = 1] = 12$

ד) לא ניתן לחשב את $E[T_3 \mid X_0 = 1]$ בגלל ש $p_{3,3} = 0$.

ה) לא ניתן לחשב את $E[T_3 \mid X_0 = 1]$ בגלל שניתן להגיע ממצב 1 ל-3 ביותר מדרך אחת.

<u>פתרון: א'</u>

נסמן $\mu_i = E[T_3 \mid X_0 = i]$

אז לאחר התניה בצעד הראשון:

א-2

$$\mu_1=\frac{1}{3}(1+\mu_1)+\frac{1}{3}(1+\mu_2)+\frac{1}{3}(1)=1+\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\mu_2$$

$$\mu_2=\frac{1}{2}(1+\mu_1)+\frac{1}{2}(1)=1+\frac{1}{2}\mu_1$$

מכאן

$$\mu_1=1+\frac{1}{3}\mu_1+\frac{1}{3}\underbrace{(1+\frac{1}{2}\mu_1)}_{\mu_2}$$

$$\mu_1=\frac{4}{3}+\frac{1}{2}\mu_1$$

$$\mu_1=\frac{8}{3}$$

ב-5) מערכת מחשב מנהלת תור של הודעות. לתור אין הגבלת מקום. המערכת פועלת בזמן בדיד. בכל יחידת זמן יש סיכוי של $1/4$ לקבלת הודעה חדשה ובאופן בלתי תלוי יש סיכוי של $1/3$ לסיים טיפול בהודעה (במידה והתור אינו ריק). נסמן ב $\{X_n, n\geq 0\}$ את שרשרת המרקוב המתארת את מספר ההודעות בתור. מהי מטריצת המעבר:

א) $P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/3 & 7/12 & 1/4 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/3 & 7/12 & 1/4 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/3 & 7/12 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

ב) $P=\begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 7/12 & 1/6 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/4 & 7/12 & 1/6 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/4 & 7/12 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

ג) $P=\begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/4 & 7/12 & 1/6 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/4 & 7/12 & 1/6 & \cdots \\ 0 & 0 & 1/4 & 7/12 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

ד) $P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 4/7 & 0 & 3/7 & 0 & \cdots \\ 0 & 4/7 & 0 & 3/7 & \cdots \\ 0 & 0 & 4/7 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$

ה)אף תשובה אינה נכונה.

<u>פתרון: ב'</u>

במידה והמערכת ריקה (מצב 0) אז יש סיכוי של $\frac{1}{4}$ שהודעה תתקבל (ואז עוברים למצב 1) וסיכוי של $\frac{3}{4}$ שלא תגיע הודעה.**(זאת השורה הראשונה במטריצה)**.

במידה והמערכת עם 0<k הודעות (מצב k) אז ייתכן שבצעד הבא נשאר במצב k אם:

1) מגיעה הודעה ועוזבת הודעה. (סיכוי: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$).

2) לא מגיעה הודעה וגם לא עוזבת הודעה. (סיכוי: $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$).

לכן סך הסיכוי שלא יהיה שינוי במצב הוא $\frac{7}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}$. **(זה האלכסון של המטריצה, פרט לשורה הראשונה).** מעבר לכך כאשר המערכת במצב k>0 אז היא תעבור

למצב k+1 אם מגיעה הודעה ולא עוזבת (סיכוי: $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{6}$. **(אלו האיברים מעל לאלכסון המטריצה, פרט לשורה הראשונה).** ויש באופן דומה סיכוי לעבור למצב k-1 : $\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$.**(אלו האיברים מתחת לאלכסון המטריצה, פרט לשורה הראשונה).**

מכאן התשובה הנכונה היא מטריצה ב'.

חלק ג – שאלות פתוחות:

להקות של ציפורים מגיעות לאגם בעמק החולה על פי תהליך פואסון. מספר הלהקות הממוצע ביום הוא $\lambda=4$. זמן השהייה של להקת ציפורים באגם הוא משתנה מקרי $\exp(\mu)$ עם תוחלת של 6 שעות. ניתן להניח שכל המשתנים המקריים בלתי תלויים ושהמערכת המתוארת הינה במצב יציב.

א) מהי תוחלת מספר הלהקות השוהות באגם.

<u>**פתרון:**</u>

זוהי מערכת תורים $M/M/\infty$. $\lambda=4$. $\mu=4$ (6 שעות זה רבע יום).

ידוע שהפילוג הסטציונרי הוא $Poisson(\rho=\frac{\lambda}{\mu}=1)$ אז הפתרון הוא **1**.

ב) מהי פרופורציית הזמן אשר בה יש ציפורים באגם.

<u>**פתרון:**</u>

יש ציפורים (להקות) באגם כאשר המערכת במצב $1,2,3,...$ ולכן אנחנו מחפשים את

$$1-\pi_0=1-e^{-1}$$

ג) לצורך סעיף זה בלבד, נניח שיש באגם מקום ל 3 להקות לכל היותר. זאת אומרת שבמידה ולהקת ציפורים מגיעה אל האגם ויש שם כבר 3 להקות אז היא אינה עוצרת באגם. מהי תוחלת מספר להקות הציפורים השוהות באגם.

<u>**פתרון:**</u>

עכשיו זוהי מערכת $M/M/c/c$ עם $c=3$ ו - $r=1$. ההתפלגות הסטציונרית היא:

$$\pi_i=\frac{r^i/i!}{\sum_{n=0}^{3}r^n/n!}\underset{r=1}{=}\frac{1/i!}{\sum_{n=0}^{3}1/n!}=\frac{1/i!}{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}}=\frac{3}{8\cdot i!}.$$

אז $\frac{15}{16}=L=\pi_1+2\pi_2+3\pi_3=\frac{3}{8}(\frac{1}{1}+2\frac{1}{2}+3\frac{1}{6})=\frac{15}{16}$.

הערה: כ"בדיקת שפיות" ניתן לראות שהתוצאה $\frac{15}{15}$ קצת יותר קטנה מהתוצאה של סעיף א' כאשר אין הגבלת מקום.

כעת נניח שישנם 2 סוגים של להקות ציפורים: חסידות ועגורים. נניח גם את הנתונים הבאים:

- תוחלת מספר העגורים בלהקת עגורים היא 5.
- תוחלת מספר החסידות בלהקת חסידות היא 7.
- פרופורציית להקות העגורים (מתוך כלל הלהקות) היא 1/3.
- הלהקות אינן מפריעות ואינן תלויות זו בזו.

ד) מהי תוחלת מספר להקות העגורים באגם.

<u>**פתרון:**</u> יש כאן פיצול פואסון של הלהקות (1/3 הן עגורים).

אז תהליך הגעת להקות העגורים הוא פואסון עם קצב $\lambda = 4/3$. מערכת ה $M/M/\infty$ של להקות העגורים באגם היא עכשיו אם $\rho = \frac{4/3}{4} = \frac{1}{3}$.

אז תוחלת מספר להקות האגורים באגם הוא $\frac{1}{3}$.

הערה: באופן דומה, תוחלת מספר להקות החסידות באגם הוא: $\rho = \frac{4 \cdot \frac{2}{3}}{4} = \frac{2}{3}$. אז תוחלת מספר הלהקות באגם מתאים לסעיף א': 1.

ה) מהי תוחלת מספר הציפורים (חסידות ו-עגורים) באגם.

<u>פתרון:</u>

תוחלת מספר להקות העגורים היא $\frac{1}{3}$ אז תוחלת מספר העגורים היא $5 \cdot \frac{1}{3}$.

תוחלת מספר להקות החסידות היא $\frac{2}{3}$ אז תוחלת מספר החסידות היא $7 \cdot \frac{2}{3}$.

תוחלת סך הציפורים היא $\frac{19}{3} = 7 \cdot \frac{2}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3}$

<u>ללא קשר לסעיפים הקודמים:</u>

הוכח את הטענות הבאות באופן מדויק ותמציתי:

ב) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם קצב λ. נסמן $T_1 = \min\{t \geq 0 \mid N_t = 1\}$. אז $T_1|_{N_t=1} \sim Uniform(0,t)$.

<u>הוכחה:</u>

$$P(T_1 \leq s \mid N_t = 1) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ \dfrac{P(T_1 \leq s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} & 0 \leq s \leq t \\ 1 & t < s \end{cases}$$

$$\frac{P(T_1 \leq s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} = \frac{P(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{P(N_t = 1)} \underset{stationary, independent\ increments}{=} \frac{P(N_s = 1)P(N_{t-s} = 0)}{P(N_t = 1)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda s}\lambda s\, e^{-\lambda(t-s)}}{e^{-\lambda t}\lambda t} = \frac{s}{t}$$

ג) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$ שרשרת מרקוב אי-פריקה בעלת מרחב מצבים $S = \{1, ..., N\}$ ומטריצת מעבר P עם איברים p_{ij}. נתון $j = 1, ..., N$ $\sum_{i=1}^{N} p_{ij} = 1$.

אז ההתפלגות הסטציונרית היא

$i = 1, ...N$ $\pi_i = \frac{1}{N}$.

<u>הוכחה:</u>

נראה ש $i = 1, ...N$ $\pi_i = \frac{1}{N}$ הוא פתרון של

$$\pi P = \pi$$

$$\sum_{i=1}^{N} \pi_i = 1.$$

2-א

מייד רואים שמשוואת הסכום לאחד מתקיימים. עכשיו: $\pi P = \pi \;\Rightarrow\; \sum_{k=1}^{N} \pi_k p_{ki} = \pi_i \quad i = 1,\ldots,N$

נציב $\frac{1}{N}$: $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} p_{ki} = \frac{1}{N} \quad i = 1,\ldots,N$ ולכן $\sum_{k=1}^{N} p_{ki} = 1 \quad i = 1,\ldots,N$ שזה בדיוק מה שנתון.