

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן סופי – מועד ב'

28.2.2008

מרצה: יוני נצרת.

מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
 - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 28 נקודות (כל שאלה 7 נקודות).
 - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 40 נקודות (כל שאלה 8 נקודות).
 - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 35 נקודות (כל שאלה 5 נקודות).
- יש לענות על כל השאלות במקומות המיועדים לכך **בשאלון זה בלבד** באופן ברור ומסודר. אין להגיש דפי טיוטה.

בהצלחה

דף נוסחאות

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} \Leftrightarrow P(X=k) = \begin{cases} (1-p)^{k-1} p & k=1,2,\dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \Leftrightarrow X \sim \text{Geometric}(p) \quad (\text{א})$$

(ב) מערכות תורים במצב יציב.

קצב הגעות: λ

קצב שרות: μ

הערות	התפלגות סטציונרית	מערכת
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ פילוג זמן השהייה במערכת במצב יציב הוא $\exp(\mu - \lambda)$.	$\pi_k = \rho^k (1 - \rho) \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \rho < 1$	M/M/1
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\pi_k = \begin{cases} \rho^k \frac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \rho \neq 1 \\ \frac{1}{K+1} & \rho = 1 \end{cases} \quad k = 0, 1, \dots, K$	M/M/1/K $K \in \{1, 2, \dots\}$
$r = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = \frac{r}{c}$	$\pi_k = \begin{cases} \left(\sum_{n=0}^{c-1} \frac{r^n}{n!} + \frac{r^c}{c!} \frac{1}{1-\rho} \right)^{-1} & k=0 \\ \frac{r^k}{k!} \pi_0 & k=1, \dots, c \\ \frac{r^k}{c! c^{k-c}} \pi_0 & k=c+1, c+2, \dots \end{cases} \quad \rho < 1$	M/M/c $c \in \{1, 2, \dots\}$
$r = \frac{\lambda}{\mu}$ $\rho = \frac{r}{c}$	$\pi_k = \frac{r^k / k!}{\sum_{n=0}^c r^n / n!}$	M/M/c/c $c \in \{1, 2, \dots\}$
$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	$\pi_k = e^{-\rho} \frac{\rho^k}{k!} \quad k = 0, 1, 2, \dots$	M / M / ∞

$$f_{i,N} = \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N} & p \neq q \\ \frac{i}{N} & p = q \\ 0 & i = 0 \end{cases} \quad i = 1, \dots, N$$

(ג) עבור מודל המהמר:

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות באופן ברור.

<u>תשובות לחלק א:</u>		
(1-א)	נכון	לא נכון
(2-א)	נכון	לא נכון
(3-א)	נכון	לא נכון
(4-א)	נכון	לא נכון

א-1) בשרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים סופי, כל המצבים המתמידים הם מצבים מתמידים חיובית.

א-2) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון. אז $P(T_1 < 3 | N_5 = 1) = 1/3$.
תזכורת: T_1 הוא זמן המופע הראשון.

א-3) נתונה שרשרת מרקוב, $\{X_n, n \geq 0\}$, מחזורית בעלת מטריצת מעבר P . אז כל איברי P הינם 0 או 1.

א-4) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מטריצת מעבר P . נתון כי במטריצה P ישנם אפסים (לא כל האיברים שונים מאפס). אז יש לשרשרת המרקוב לפחות מצב חולף אחד.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) באופן ברור.

<u>תשובות לחלק ב:</u>					
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	ב-1
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	ב-2
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	ב-3
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	ב-4
(ה)	(ד)	(ג)	(ב)	(א)	ב-5

ב-1) נתון תהליך קפיצה מרקובי, $\{X_t, t \geq 0\}$, בעל מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

- (א) פרופורציית הזמן במצב 1 שווה לפרופורציית הזמן במצב 4.
 (ב) פרופורציית הזמן במצב 4 היא שליש מפרופורציית הזמן במצב 3.
 (ג) בשרשרת המרקוב המשוכנת כל המצבים חולפים.
 (ד) תשובות א', ב' ו - ג' נכונות.
 (ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

ב-2) נתון תהליך קפיצה מרקובי, $\{X_t, t \geq 0\}$, בעל מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

- (א) בשרשרת המרקוב המשוכנת יש מחלקת קשירות אחת.
 (ב) שרשרת המרקוב המשוכנת הינה אי פריקה.
 (ג) בשרשרת המרקוב המשוכנת כל המצבים מתמידים.
 (ד) תשובות א', ב' ו- ג' נכונות.
 (ה) אף תשובה אינה נכונה.

ב-3) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (א) פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 1 גדולה מפרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת במצב 2.
 (ב) פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת בכל מצב היא שווה.
 (ג) במידה וההתפלגות ההתחלתית היא אחידה בדידה אז $\{X_n, n \geq 0\}$ הוא סטציונרי.
 (ד) תשובות א' ו- ג' נכונות.
 (ה) תשובות ב' ו- ג' נכונות.

ב-4) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S = \{1, 2, 3\}$ ומטריצת מעבר

$$P = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

חשב את $E[T_3 | X_0 = 1]$. תזכורת: $T_3 = \min\{n \geq 1 | X_n = 3\}$.

$$E[T_3 | X_0 = 1] = \frac{8}{3} \quad (\text{א})$$

$$E[T_3 | X_0 = 1] = 3 \quad (\text{ב})$$

$$E[T_3 | X_0 = 1] = 12 \quad (\text{ג})$$

(ד) לא ניתן לחשב את $E[T_3 | X_0 = 1]$ בגלל ש $p_{3,3} = 0$.

(ה) לא ניתן לחשב את $E[T_3 | X_0 = 1]$ בגלל שניתן להגיע ממצב 1 ל-3 ביותר מדרך אחת.

2-א

ב-5) מערכת מחשב מנהלת תור של הודעות. לתור אין הגבלת מקום. המערכת פועלת בזמן בדיד. בכל יחידת זמן יש סיכוי של $1/4$ לקבלת הודעה חדשה ובאופן בלתי תלוי יש סיכוי של $1/3$ לסיים טיפול בהודעה (במידה והתור אינו ריק). נסמן ב $\{X_n, n \geq 0\}$ את שרשרת המרקוב המתארת את מספר ההודעות בתור. מהי

מטריצת המעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 7/12 & 1/4 & 0 & \dots \\ 0 & 1/3 & 7/12 & 1/4 & \dots \\ 0 & 0 & 1/3 & 7/12 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{א})$$

$$P = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 7/12 & 1/6 & 0 & \dots \\ 0 & 1/4 & 7/12 & 1/6 & \dots \\ 0 & 0 & 1/4 & 7/12 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{ב})$$

$$P = \begin{pmatrix} 5/6 & 1/6 & 0 & 0 & \dots \\ 1/4 & 7/12 & 1/6 & 0 & \dots \\ 0 & 1/4 & 7/12 & 1/6 & \dots \\ 0 & 0 & 1/4 & 7/12 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{ג})$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 4/7 & 0 & 3/7 & 0 & \dots \\ 0 & 4/7 & 0 & 3/7 & \dots \\ 0 & 0 & 4/7 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (\text{ד})$$

ה) אף תשובה אינה נכונה.

חלק ג – שאלות פתוחות:

להקות של ציפורים מגיעות לאגם בעמק החולה על פי תהליך פואסון. מספר הלהקות הממוצע ביום הוא $\lambda = 4$. זמן השהייה של להקת ציפורים באגם הוא משתנה מקרי $\exp(\mu)$ עם תוחלת של 6 שעות. ניתן להניח שכל המשתנים המקריים בלתי תלויים ושהמערכת המתוארת הינה במצב יציב.

- (א) מהי תוחלת מספר הלהקות השוהות באגם?
- (ב) מהי פרופורציית הזמן אשר בה יש ציפורים באגם?
- (ג) לצורך סעיף זה בלבד, נניח שיש באגם מקום ל 3 להקות לכל היותר. זאת אומרת שבמידה ולהקת ציפורים מגיעה אל האגם ויש שם כבר 3 להקות אז היא אינה עוצרת באגם. מהי תוחלת מספר הלהקות הציפורים השוהות באגם?

כעת נניח שישנם 2 סוגים של להקות ציפורים: חסידות ועגורים. נניח גם את הנתונים הבאים:

- תוחלת מספר העגורים בלהקת עגורים היא 5.
- תוחלת מספר החסידות בלהקת חסידות היא 7.
- פרופורציית להקות העגורים (מתוך כלל הלהקות) היא $1/3$.
- הלהקות אינן מפריעות ואינן תלויות זו בזו.

- (ד) מהי תוחלת מספר להקות העגורים באגם?
- (ה) מהי תוחלת מספר הציפורים (חסידות ו-עגורים) באגם?

ללא קשר לסעיפים הקודמים:

הוכח את הטענות הבאות באופן מדויק ותמציתי:

- (1) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון עם קצב λ . נסמן $T_1 = \min\{t \geq 0 \mid N_t = 1\}$. אז
- $$T_1 |_{N_t=1} \sim \text{Uniform}(0, t)$$
- (2) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$ שרשרת מרקוב אי-פריקה בעלת מרחב מצבים $S = \{1, \dots, N\}$ ומטריצת מעבר P עם איברים p_{ij} . נתון $\sum_{i=1}^N p_{ij} = 1 \quad j = 1, \dots, N$.
- אז ההתפלגות הסטציונרית היא
- $$\pi_i = \frac{1}{N} \quad i = 1, \dots, N$$

ענה על כל הסעיפים של עמוד זה בעמודים הבאים באופן מסודר.

תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג: