החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

פתרון למבחן סופי – מועד ג'

30.3.2008

מרצה: יוני נצרתי.
מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

א-1) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$. אז X_{24} ו - X_{13} הם בהכרח משתנים מקריים שווי התפלגות.

פתרון: לא נכון.

במידה והשרשרת סטציונרית אז כן. אבל במידה ולא קל למצוא דוגמא שמראה פילוג שונה למשתנים מקריים אלו.

א-2) נתונה שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר P אשר כל מצביה מתמידים. אז בהכרח כל איברי מטריצת המעבר שונים מאפס.

פתרון: לא נכון.

קל למצוא דוגמא נגדית.

א-3) נתונה שרשרת מרקוב אי-פריקה. נתון שקיים בשרשרת מצב מתמיד אפס. אז מרחב המצבים הוא בהכרח אין-סופי.

פתרון: נכון.

יש לנו משפט: בשרשראות בעלות מרחב מצבים סופי, כל המצבים המתמידים הינם מתמידים חיובית (ולכן לא מתמידים אפס).

א-4) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון. אז $P(N_5 = N_{15} - N_{10}) = 1$.

פתרון: לא נכון.

!!!! – אמנם N_5 שווה התפלגות ל - $N_{15} - N_{10}$. אבל המשתנים המקריים הללו אינם שווים בהסתברות אחת. ייתכנו הרבה מאוד ריאליזציות אשר בהן ערכי המשתנים המקריים שונים.

הערה: ניתן לחשב את ההסתברות $P(N_5 = N_{15} - N_{10}) = 1$ בגלל שהמשתנים המקריים N_5 ו - $N_{15} - N_{10}$ הינם בלתי תלויים.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

ב-1) נתון תהליך קפיצה מרקובי בעל מרחב מצבים ומטריצת גנראטור $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$$Q=\begin{pmatrix} -3 & 1 & ? & ? & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & -1 & 1 & ? & ? \\ ? & ? & 1 & -1 & ? & ? \\ ? & ? & 2 & ? & -3 & 1 \\ ? & ? & ? & ? & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מהן מחלקות הקשירות?

א) $\{3,4\}$, $\{1,2,5,6\}$

ב) $\{1,2,3,4,5,6\}$

ג) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

ד) $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$

ה) $\{1,2\},\{3,4,5,6\}$

<u>פתרון: ד'</u>

ראשית נשלים את המטריצה:

$$Q=\begin{pmatrix} -3 & 1 & a & 1-a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

רואים שמצבים 1,2 מתקשרים. מצבים 3,4 מתקשרים. ומצבים 5,6 מתקשרים.

רואים גם (ללא תלות בערכו הלא ידוע של a) שמצבים 3,4,5,6 נגישים ממצבים 1,2. אבל ההיפך אינו נכון (מצבים 1,2 אינם נגישים ממצבים 3,4,5,6) ולכן 1,2 אינם מתקשרים עם 3,4,5,6.

בנוסף, מצבים 3,4 נגישים ממצבים 5,6 אבל גם כאן ההיפך אינו נכון אז 3,4 אינם מתקשרים עם 5,6.

לסיכום קבלנו מחלקות קשירות: $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$.

ב-2) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n\geq 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & (1/2) & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

א) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 3 שווה לפרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 1.

ב) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 2 שווה לפרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 1.

ג) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 3 שווה לפרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 4.

ד) פרופורציית הזמן שהשרשת נמצאת בכל מצב היא שווה.

ה) לא ניתן לחשב התפלגות סטציונרית בגלל ש $\{X_n, n\geq 0\}$ היא מחזורית.

הערה: השאלה בוטלה (האיבר p_{12} במטריצה, המסומן בסוגריים, היה 1 במקום ½ וזה אומר ש – P אינה מטריצה סטוכסטית). למרות זאת להלן הפתרון עבור $p_{12}=\frac{1}{2}$.

פתרון:

להלן משוואות שווי משקל:

$$\pi_1+\pi_3=2\pi_1$$
$$\pi_1+\pi_2=2\pi_2$$
$$\pi_3+2\pi_4=2\pi_3$$
$$\pi_2+\pi_4=2\pi_4$$
$$\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$$

מהמשוואה הראשונה רואים שתשובה א' נכונה.

מהמשוואה השנייה רואים שתשובה ב' אינה נכונה.

מהמשוואה השלישית רואים שתשובה ג' אינה נכונה.

תשובה ד' אינה נכונה (לדוגמא לפי המשוואה השלישית).

תשובה ה' אינה נכונה – השרשרת אינה מחזורית. דרך 1 לראות זאת היא על פי העובדה שהאלכסון שונה מאפס.

ב-3) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t\geq 0\}$ בעל מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נסמן ב- $\pi=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6\end{pmatrix}$ את ההתפלגות הסטציונרית.

א) אם $P(X_0=i)=\pi_i$ אז $P(X_{14.3}=2)=\dfrac{1}{6}$.

ב) $P(X_{14.3}=2)=\dfrac{1}{6}$.

ג) תשובות א' ו – ב' נכונות.

ד) אם $P(X_0=i)=\pi_i$ אז $P(X_{14.3}=2)=\dfrac{1}{14.3}$.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

פתרון: א'

במידה והיינו לוקחים את מרחב המצבים להיות $S=\{0,1,2,3,4,5\}$ אז זאת מטריצת הגנרטור של $M/M/1/5$ כאשר $\lambda=\mu=1$. על פי דף הנוסחאות (וניתן גם לחשב בקלות לבד), ההתפלגות הסטציונרית היא אחידה בדידה. אם כך זוהי גם ההתפלגות הסטציונרית עבור $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

אם כך, הפתרון הוא א'. מדוע? במידה ומתחילים עם ההתפלגות הסטציונרית, אז התהליך הוא סטציונרי והפילוג השולי בכל זמן הוא על פי ההתפלגות הסטציונרית (בפרט בזמן 14.3).

ב' אינה נכונה באופן כללי בגלל שאם לא מובטח $P(X_0=i)=\pi_i$, אז הפילוג השולי בזמן 14.3 הוא

תלוי המצב ההתחלתי.

ב-4) שרת הורדות תוכנה מאפשר למשתמשים להוריד קבצים. ברגע נתון השרת יכול לטפל בהורדה אחת בלבד. בקשות הורדה אשר מגיעות כאשר השרת עסוק נכנסות לתור (ללא הגבלת מקום). בקשות הורדה מגיעות על פי תהליך פואסון. תוחלת הזמן בין בקשה לבקשה היא 10 שניות. קצב ההורדה הוא קבוע (לא אקראי) – 2 מגה בייט (MB) בשנייה. גדלי הקבצים אשר מורדים הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי פילוג אקספוננציאלי ותוחלת 4 מגה בייט (MB). הנח שהמערכת במצב יציב.
נסמן: $\widetilde{W}$ - משך הזמן (בשניות) מרגע הגעת בקשת הורדה אל השרת עד סיום ההורדה.

א) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-10}$

ב) $P(\widetilde{W}>10)=e^{80}$

ג) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-80}$

ד) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-4}$

ה) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-\frac{1}{4}}$

__פתרון: ד'__

זאת מערכת $M/M/1$ עם $\lambda=\dfrac{1}{10}$ נתון שגול קובץ ממוצע הוא 4 MB. המערכת מורידה בדיוק 2 MB בשנייה אז זמן הורדת קובץ ממוצע הוא 2 שניות ולכן $\mu=\dfrac{1}{2}$.

במערכת $M/M/1$ $\widetilde{W}\sim\exp(\mu-\lambda)$. **אצלנו** $\mu-\lambda=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{2}{5}$.

אז $P(\widetilde{W}>10)=e^{-\frac{2}{5}\cdot 10}=e^{-4}$.

ב-5) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t,t\ge 0\}$ בעל מרחב מצבים $S=\{1,2\}$ ומטריצת גנראטור
$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$

א) ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}$.

ב) ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix}\dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} & \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}\end{pmatrix}$.

ג) ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix}\dfrac{\mu}{\lambda+\mu} & \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu}\end{pmatrix}$.

ד) ההתפלגות הסטציונרית היא פתרון מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}$$
$$\pi_1+\pi_2=1$$

ה)   תשובות ג' ו – ד' נכונות.

<u>פתרון: ג'</u>

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} = 1$$

הערה: ד' אינו נכון – אלו הן משוואות שווי משקל של שרשרת מרקוב בזמן בדיד.

חלק ג – שאלות פתוחות:

צרכנים מגיעים לדוכן מפעל פיס על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. בדוכן יש שרת יחיד ואין הגבלה על מספר הצרכנים בתור. משך הזמן בשרות של כל צרכן הוא משתנה מקרי $\exp(\mu)$. נניח שכל המשתנים המקריים המתוארים הינם בלתי תלויים ושהמערכת במצב יציב.

<u>פתרון כללי (עבור א', ב', ג'):</u>

זאת מערכת M/M/1 במצב יציב. אז ידוע ש $\lambda < \mu$.

א) מה הסיכוי שצרכן אשר מגיע לא ימתין בתור בכלל?

<u>פתרון:</u>

הסיכוי למצוא תור ריק הוא $\pi_0 = 1-\frac{\lambda}{\mu}$.

ב) מהי תוחלת זמן ההמתנה בתור של צרכן?

<u>פתרון:</u>

תוחלת מספר הצרכנים במערכת היא $\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}$ (תוחלת של מ"מ גיאומטרי סופר כישלונות עם סיכוי להצלחה $1-\frac{\lambda}{\mu}$). תוחלת מספר הצרכנים בשרות היא $\frac{\lambda}{\mu}$. אם כך תוחלת מספר הצרכנים בתור היא:

$$\underbrace{\frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu}}_{system}-\underbrace{\frac{\lambda}{\mu}}_{service}=\underbrace{\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}}_{queue}$$

עכשיו על פי נוסחת ליטל תוחלת זמן ההמתנה בתור היא $\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$.

ג) מה הסיכוי שצרכן ישהה במערכת (תור + שרות) למשך יותר מ 20 יחידות זמן?

<u>פתרון:</u>

ידוע שזמן השהייה מערכת הוא $\exp(\mu-\lambda)$. אם כך הפתרון הוא $e^{-20(\mu-\lambda)}$.

נניח כעת מערכת קצת שונה: כאשר יש הרבה צרכנים במערכת אז צרכנים פוטנציאלים פחות מעוניינים להיכנס. לצורך כך נשתמש בתהליך לידה מוות עם קצבי לידה $k=0,1,2,...$ $\lambda_k=\frac{\lambda}{1+k}$ וקצבי שרות קבועים $\mu_k=\mu$.

ד) מצא את ההתפלגות הסטציונרית של המערכת. (הביטוי צריך להיות פשוט ככל שניתן).

<u>פתרון:</u>

משוואות שווי משקל מפורטות:

$$\pi_{k-1}\frac{\lambda}{k}=\pi_k\mu \quad k=1,2,\ldots$$

ולכן $\pi_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}=\pi_k \quad k=1,2,\ldots$

על פי משוואת "הסכום שווה 1":

$$\pi_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k\frac{1}{k!}}=e^{-\lambda/\mu}$$

אם כך רואים שההתפלגות הסטציונרית היא פואסונית עם פרמטר $\frac{\lambda}{\mu}$.

ה) השתמש בנוסחת ליטל בשביל לקבל ביטוי לתוחלת זמן השהייה במערכת.

<u>**פתרון:**</u>

תוחלת מספר הצרכנים במערכת:

$$L=\sum_{k=0}^{\infty}k\pi_k=\frac{\lambda}{\mu}.$$

על פי נוסחת ליטל, זמן השהייה במערכת הוא

$$W=\frac{1}{\mu}.$$

<u>ללא קשר לסעיפים הקודמים:</u>
הוכח את הטענות הבאות באופן מדויק ותמציתי:

ו) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך ספירה המקיים:

1) $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$.
2) $P(N_h \geq 2) = o(h)$.
3) לתהליך אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

אז $P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}$.

תזכורת לסימון $o(h)$: $\lim_{h \to 0} \frac{o(h)}{h} = 0$.

<u>פתרון:</u>

ראה הוכחה מדפי ההרצאה.

ז) תהי $\{X_n, n \geq 0\}$, שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $S = \{1, ..., N\}$ ומטריצת מעבר P . נתון שמצבים i ו- j מתקשרים ומצבים j ו- k מתקשרים.
אז מצבים i ו- k מתקשרים.

<u>פתרון:</u>

ראה הוכחה מדפי ההרצאה.