החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

מבחן סופי – מועד ג'

30.3.2008

מרצה: יוני נצרתי.
מתרגלים: גלעד גיא, נעם פז.

הנחיות כלליות:

- משך הבחינה: שעתיים וחצי.
- חומר עזר: מחשבון בלבד.
- המבחן מורכב מ – 3 חלקים:
  - חלק א: שאלות נכון/לא נכון. סה"כ 28 נקודות (כל שאלה 7 נקודות).
  - חלק ב: שאלות אמריקאיות. סה"כ 40 נקודות (כל שאלה 8 נקודות).
  - חלק ג: שאלות פתוחות. סה"כ 35 נקודות (כל שאלה 5 נקודות).
- יש לענות על כל השאלות במקומות המיועדים לכך **בשאלון זה בלבד** באופן ברור ומסודר. אין להגיש דפי טיוטה.

בהצלחה

דף הנוסחאות המצורף למבחן הסופי

א) $X \sim Geometric(p) \Leftarrow P(X=k)=\begin{cases}(1-p)^{k-1}p & k=1,2,...\\ 0 & otherwise\end{cases} \Leftarrow Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$

ב) מערכות תורים במצב יציב.
קצב הגעות: λ
קצב שרות: μ

מערכת	התפלגות סטציונרית	הערות
M/M/1	$\pi_k=\rho^k(1-\rho)\ \ k=0,1,2,...\quad \rho<1$	$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$ פילוג זמן השהייה במערכת במצב יציב הוא $\exp(\mu-\lambda)$.
M/M/1/K $K\in\{1,2,...\}$	$\pi_k=\begin{cases}\rho^k\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{K+1}} & \rho\neq 1\\ \dfrac{1}{K+1} & \rho=1\end{cases}\quad k=0,1,...,K$	$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$
M/M/c $c\in\{1,2,...\}$	$\pi_k=\begin{cases}\left(\sum_{n=0}^{c-1}\dfrac{r^n}{n!}+\dfrac{r^c}{c!}\dfrac{1}{1-\rho}\right)^{-1} & k=0\\ \dfrac{r^k}{k!}\pi_0 & k=1,...,c\\ \dfrac{r^k}{c!c^{k-c}}\pi_0 & k=c+1,c+2,...\end{cases}\quad \rho<1$	$r=\dfrac{\lambda}{\mu}$ $\rho=\dfrac{r}{c}$
M/M/c/c $c\in\{1,2,...\}$	$\pi_k=\dfrac{r^k/k!}{\sum_{n=0}^{c}r^n/n!}$	$r=\dfrac{\lambda}{\mu}$ $\rho=\dfrac{r}{c}$
M/M/∞	$\pi_k=e^{-\rho}\dfrac{\rho^k}{k!}\ \ k=0,1,2,...$	$\rho=\dfrac{\lambda}{\mu}$

ג) עבור מודל המהמר:

$$f_{i,N}=\begin{cases}\begin{cases}\dfrac{1-\left(q/p\right)^i}{1-\left(q/p\right)^N} & p\neq q\\ \dfrac{i}{N} & p=q\end{cases} & i=1,...,N\\ 0 & i=0\end{cases}$$

חלק א – שאלות נכון/לא נכון:

ענה עבור כל סעיף: "נכון" או "לא נכון". סמן את התשובות באופן ברור.

תשובות לחלק א:

א-1)	נכון	לא נכון
א-2)	נכון	לא נכון
א-3)	נכון	לא נכון
א-4)	נכון	לא נכון

א-1) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$. אז X_{24} ו - X_{13} הם בהכרח משתנים מקריים שווי התפלגות.

א-2) נתונה שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר P אשר כל מצביה מתמידים. אז בהכרח כל איברי מטריצת המעבר שונים מאפס.

א-3) נתונה שרשרת מרקוב אי-פריקה. נתון שקיים בשרשרת מצב מתמיד אפס. אז מרחב המצבים הוא בהכרח אין-סופי.

א-4) יהי $\{N_t, t \geq 0\}$ תהליך פואסון. אז $P(N_5 = N_{15} - N_{10}) = 1$.

חלק ב – שאלות אמריקאיות:

עבור כל סעיף סמן את התשובה הנכונה (רק אחת) באופן ברור.

תשובות לחלק ב:

ב-1)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-2)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-3)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-4)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)
ב-5)	(א)	(ב)	(ג)	(ד)	(ה)

ב-1) נתון תהליך קפיצה מרקובי בעל מרחב מצבים ומטריצת גנראטור $S=\{1,2,3,4,5,6\}$.

$$Q=\begin{pmatrix} -3 & 1 & ? & ? & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ ? & ? & -1 & 1 & ? & ? \\ ? & ? & 1 & -1 & ? & ? \\ ? & ? & 2 & ? & -3 & 1 \\ ? & ? & ? & ? & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

מה הן מחלקות הקשירות?

א) $\{1,2,5,6\}$, $\{3,4\}$

ב) $\{1,2,3,4,5,6\}$

ג) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$

ד) $\{1,2\},\{3,4\},\{5,6\}$

ה) $\{1,2\},\{3,4,5,6\}$

ב-2) נתונה שרשרת מרקוב $\{X_n, n \ge 0\}$ בעלת מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4\}$ ומטריצת מעבר

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

א) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 3 שווה לפרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 1.

ב) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 2 שווה לפרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 1.

ג) פרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 3 שווה לפרופורציית הזמן שהשרשרת שוהה במצב 4.

ד) פרופורציית הזמן שהשרשרת נמצאת בכל מצב היא שווה.

ה) לא ניתן לחשב התפלגות סטציונרית בגלל ש $\{X_n, n \ge 0\}$ היא מחזורית.

ב-3) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t \ge 0\}$ בעל מרחב מצבים $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

נסמן ב- $\pi=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 & \pi_5 & \pi_6\end{pmatrix}$ את ההתפלגות הסטציונרית.

א) אם $P(X_0=i)=\pi_i$ אז $P(X_{14.3}=2)=\frac{1}{6}$.

ב) $P(X_{14.3}=2)=\frac{1}{6}$.

ג) תשובות א' ו – ב' נכונות.

ד) אם $P(X_0=i)=\pi_i$ אז $P(X_{14.3}=2)=\frac{1}{14.3}$.

ה) אף אחת מהטענות אינה נכונה.

ב-4) שרת הורדות תוכנה מאפשר למשתמשים להוריד קבצים. ברגע נתון השרת יכול לטפל בהורדה אחת בלבד. בקשות הורדה אשר מגיעות כאשר השרת עסוק נכנסות לתור (ללא הגבלת מקום). בקשות הורדה מגיעות על פי תהליך פואסון. תוחלת הזמן בין בקשה לבקשה היא 10 שניות. קצב ההורדה הוא קבוע (לא אקראי) – 2 מגה בייט (MB) בשנייה. גדלי הקבצים אשר מורדים הינם משתנים מקריים בלתי תלויים בעלי פילוג אקספוננציאלי ותוחלת 4 מגה בייט (MB). הנח שהמערכת במצב יציב.

נסמן: $\widetilde{W}$ - משך הזמן (בשניות) מרגע הגעת בקשת הורדה אל השרת עד סיום ההורדה.

א) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-10}$

ב) $P(\widetilde{W}>10)=e^{80}$

ג) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-80}$

ד) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-4}$

ה) $P(\widetilde{W}>10)=e^{-1/4}$

ב-5) נתון תהליך קפיצה מרקובי $\{X_t, t\ge 0\}$ בעל מרחב מצבים $S=\{1,2\}$ ומטריצת גנראטור

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}$$

א) ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix}\lambda & \mu\end{pmatrix}$.

ב) ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix}\frac{\lambda}{\lambda+\mu} & \frac{\mu}{\lambda+\mu}\end{pmatrix}$.

ג) ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi=\begin{pmatrix}\frac{\mu}{\lambda+\mu} & \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\end{pmatrix}$.

ד) ההתפלגות הסטציונרית היא פתרון מערכת המשוואות

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}Q=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{pmatrix}$$
$$\pi_1+\pi_2=1$$

ה) תשובות ג' ו – ד' נכונות.

חלק ג – שאלות פתוחות:

צרכנים מגיעים לדוכן מפעל פיס על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. בדוכן יש שרת יחיד ואין הגבלה על מספר הצרכנים בתור. משך הזמן בשרות של כל צרכן הוא משתנה מקרי $\exp(\mu)$. נניח שכל המשתנים המקריים המתוארים הינם בלתי תלויים ושהמערכת במצב יציב.

א) מה הסיכוי שצרכן אשר מגיע לא ימתין בתור בכלל?

ב) מהי תוחלת זמן ההמתנה בתור של צרכן?

ג) מה הסיכוי שצרכן ישהה במערכת (תור + שרות) למשך יותר מ 20 יחידות זמן?

נניח כעת מערכת קצת שונה: כאשר יש הרבה צרכנים במערכת אז צרכנים פוטנציאלים פחות מעוניינים להיכנס. לצורך כך נשתמש בתהליך לידה מוות עם קצבי לידה $k=0,1,2,...$ $\lambda_k=\dfrac{\lambda}{1+k}$ וקצבי שרות קבועים $\mu_k=\mu$.

ד) מצא את ההתפלגות הסטציונרית של המערכת. (הביטוי צריך להיות פשוט ככל שניתן).

ה) השתמש בנוסחת ליטל בשביל לקבל ביטוי לתוחלת זמן השהייה במערכת.

ללא קשר לסעיפים הקודמים:

הוכח את הטענות הבאות באופן מדויק ותמציתי:

ו) יהי $\{N_t,t\ge 0\}$ תהליך ספירה המקיים:

1) $P(N_h=1)=\lambda h+o(h)$.

2) $P(N_h\ge 2)=o(h)$.

3) לתהליך אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

אז $P(N_t=0)=e^{-\lambda t}$.

תזכורת לסימון $o(h)$: $\lim_{h\to 0}\dfrac{o(h)}{h}=0$.

ז) תהי $\{X_n,n\ge 0\}$, שרשרת מרקוב בעלת מרחב מצבים $S=\{1,...,N\}$ ומטריצת מעבר P. נתון שמצבים i ו- j מתקשרים ומצבים j ו- k מתקשרים.
אז מצבים i ו- k מתקשרים.

ענה על כל הסעיפים של עמוד זה בעמודים הבאים <u>באופן מסודר</u>.

תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

המשך תשובות לחלק ג:

<u>המשך תשובות לחלק ג:</u>