חוברת עזר להרצאה

מבוא לתהליכים סטוכסטיים
207.2250

החוג לסטטיסטיקה,
אוניברסיטת חיפה

חובר ע"י יוני נצרתי

תוקן ושופר ע"י
אולגה פרידליאנד, דרור קלודה ומרק שוחט

אוקטובר 2006

חוברת זו מכילה את מרבית החומר המוצג בהרצאות בקורס מבוא לתהליכים סטוכסטיים.

קורסי קדם לקורס זה הינם מבוא להסתברות, תורת ההתפלגויות וחדו"א ב'.

מחבר החוברת אינו מתחייב לנכונות תוכן החוברת, היא נועדה כעזר להרצאה בלבד ועלולה להכיל שגיאות.

הקורס מורכב משישה חלקים (א' – ו'), בכל חלק מספר פרקים. משך ההרצאה של כל פרק בכיתה הוא כשעה. להלן תוכן הקורס.

הערה: פרקים אשר מסומנים ב-* הינם אופציונאליים, רק חלק מפרקים אלו יועברו בהרצאה ויכללו בתוכן הקורס. רצף החומר אינו מסתמך על פרקים אלו.

תיאור חלק א:

חלק זה מהווה מבוא לקורס. מטרתו היא להציג ולהגדיר תהליכים סטוכסטיים כמודלים מתמטים יישומיים המאפשרים לנתח בעיות יישומיות ותיאורטיות שונות. בנוסף מטרתו היא לחזור על מושגים מהסתברות אשר נלמדו בקורס מבוא להסתברות א' ותורת ההתפלגויות בכדי לחזק את ההבנה בנושאים אלו ולהכיר מספר דוגמאות מורכבות יותר אשר ניתוחם דומה לניתוח של בעיות אשר יופיעו בהמשך הקורס. החלק מסתיים עם הנושא של תהליכי ברנולי. לימוד של תהליכים אלו יעזור לפתח הבנה של מושגי יסוד אשר יופיעו בפרקים בהמשך.

פרק א-1: הגדרת תהליך סטוכסטי, זמן בדיד/רציף, מרחב מצבים, דוגמאות, שימושים וסקירת הקורס.

הגדרת תהליך סטוכטסטי:

בקורס מבוא להסתברות ותורת ההתפלגויות הגדרנו מרחבי הסברות ע"י השלשה (Ω,Σ,P).
כאשר Ω, מרחב המדגם, הוא אוסף התוצאות האפשריות.
Σ, אוסף המאורעות, הוא אוסף של תתי קבוצות של Ω. ($\Sigma\subseteq 2^{\Omega}$).
ו P היא פונקציה: $P:\Sigma\to[0,1]$.

לאחר מכן הגדרנו משתנים מקרים, אלו הם פונקציות הממפות תוצאות ב - Ω למרחב אחר (המספרים הממשיים, או המספרים השלמים או הוקטורים הממשיים וכו').
ז"א משתנה מקרי X הוא בעצם $X(\omega)$ כאשר $\omega\in\Omega$. ז"א $X:\Omega\to D$ כאשר D הוא $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{R}$ או $\mathbb{R}^n$ וכו'.

בקורס זה נדון במרחבי הסתברות ובמשתנים מקריים יותר מעניינים: תהליכים סטוכסטיים.

תהליך סטוכסטי הוא משתנה מקרי כפי שמוגדר לעיל אבל D הוא מרחב של פונקציות. ז"א תהליך סטוכסטי הוא פונקציה אקראית.

במקום שעבור כל $\omega\in\Omega$, $X(\omega)$ ימופה לערך מספרי, מתקיים כי $X(\omega)$ ממופה לפונקציה. ניתן לרשום פו' זו כ $X(\omega,t)$, כאשר $t\in T$.

דרך אחרת לחשוב על תהליך סטוכסטי היא כעל אוסף של משתנים מקריים אשר מאופיינים ע"י הפרמטר $t\in T$. כאשר לרוב קיימת תלות סטטיסטית מסוימת בין המשתנים המקריים הללו.

את T נכנה **מרחב הפרמטר** של הפונקציה האקראית. לרוב T מסמל זמן (ומכאן השם *תהליך* סטוכסטי).
בקורס זה T יהיה לרוב $\mathbb{R}^+=[0,\infty)$ או $\mathbb{N}$. כאשר T הוא $\mathbb{R}^+$ נאמר כי התהליך הוא תהליך בזמן רציף, וכאשר T הוא $\mathbb{N}$, נאמר כי התהליך הוא תהליך בזמן בדיד.

הערה: בחלק מהמקומות בקורס נתייחס לטבעיים כמכילים את 0, ובחלק לא, זאת בהתאם לנוחות.

קבוצת הערכים אשר $X(\omega,t)$ מקבלת (הטווח של הפונקציה האקראית) נקראים **מרחב המצבים** של התהליך. לפעמים נסמל את מרחב המצבים ב S. מרחב מצבים אפשרי ונוח לשימוש בהרבה מקרים הוא $\mathbb{N}$. מרחב מצבים אחר הוא $\{0,1,\ldots,N\}$. ניתן גם לבחור את מרחב המצבים להיות רציף ($\mathbb{R}$), אבל כמעט ולא נפגוש תהליכים סטוכסטיים כאלו בקורס.

לסיכום: תהליך סטוכסטי הוא משתנה מקרי $X:\Omega\to D$ כאשר D הוא אוסף הפונקציות המקבלות ערכים ב T (מרחב הפרמטר) וממופות לS (מרחב המצבים). או לחלופין תהליך סטוכסטי הוא אוסף של משתנים מקריים אשר מאופיינים ע"י פרמטר $t\in T$.

עבור תוצאה נתונה מתוך מרחב המדגם Ω, $\omega_0 \in \Omega$, נקראה לפונקציה $X(\omega_0, t)$ (של t) המתקבלת **ריאליזציה** של התהליך הסטוכסטי.

תהליכים סטוכסטיים כמודלים מתמטים:

את רוב התהליכים אשר נפגוש בקורס זה ניתן ליישם לבניית מודלים מתמטים עבור תופעות שכיחות. תופעות כגון גודלי אוכלוסיה, הכנסות/הוצאות של בתי עסק, מלאי של בנק דם, שיחות טלפון אשר מגיעות למרכזייה ועוד. בכל הדוגמאות לעיל קיים **המרכיב התהליכי והמרכיב הסטוכסטי** (אקראי).
המרכיב התהליכי: שינוי מצב מערכת על פני זמן.
המרכיב הסטוכסטי: אקראיות בשינוי המערכת.

דוגמא א-1:

נתחיל בתיאור של תהליך דטרמיניסטי (ללא אקראיות) ולאחר מכן "נשדרג" אותו לתהליך סטוכסטי.

הסיפור: חשבון הבנק שלנו.
נבנה תהליך אשר מתאר את כמות הכסף אשר יש לנו בחשבון הבנק. נניח כי אנחנו חיים בזמן בדיד n=1,2,…. (כאשר n=1 הוא יום פתיחת חשבון הבנק שלנו). מרחב המצבים של התהליך יהיה רציף (נמדל אותו כרציף) שקלים (ייתכן גם חיובי וגם שלילי).

המודל הדטרמיניסטי:
- S(n) – ערך חשבון הבנק שלנו בזמן n.
- S(1) – הערך ההתחלתי של חשבון הבנק – נניח 200.
- נניח כי כל שלושים ימים (בדיוק) אנחנו מקבלים משכורת, ערך המשכורת הוא 2000 במשכורת הראשונה ובכל משכורת ישנה עלייה של 1% בשכר. נסמן ב P(n) את המשכורת אשר אנו מקבלים ביום ה – n. ז"א $P(n) = 2000(1.01)^{n/30}$ עבור n=30k $k \in \mathbb{N}$, אחרת P(n)=0.
- נניח בנוסף כי בכל יום יש לנו הוצאה של 70 שקלים באופן קבוע לאורך החיים.
  נסמן הוצאה זו ב E(n). 70=E(n) לכל n.

כעת ניתן לרשום את המשוואה עבור תהליך הערך של חשבון הבנק שלנו:

$$S(n) = S(0) + \sum_{k=1}^{n} P(k) - \sum_{k=1}^{n} E(n)$$

את התפתחות התהליך הדטרמיניסטי S(n) ניתן בקלות לחשב (לדוגמא ב Excel). ערך התהליך עבור כל $n \in \{1,...,1095\}$ (שלוש שנים) מוצג באיור בהמשך. ברור כי "שיני המסור" אשר מופיעים באיור הינם תוצאה של ההוצאה היומית האחידה וקפיצות בהכנסה בכל 30 יום עקב קבלת משכורת. רואים כי בחודשים הראשונים, בערך עד חצי התקופה (שנה וחצי בערך) ערך חשבון הבנק לעיתים שלילי ולאחר מכן הוא רק חיובי (המשכורת עולה כל חודש).

שדרוג למודל הסטוכסטי:
כעת נוסיף מימד אקראי למודל שלנו. את המודל נרשום באופן הבא:

$\widetilde{S}(n) = S(0) + \sum_{k=1}^{n} \widetilde{P}(k) - \sum_{k=1}^{n} \widetilde{E}(n)$ (בדיוק כמו המודל הדטרמיניסטי אבל גדלים אקראיים נסמן עם טילדה(~) מעליהם).

להלן הפרטים:

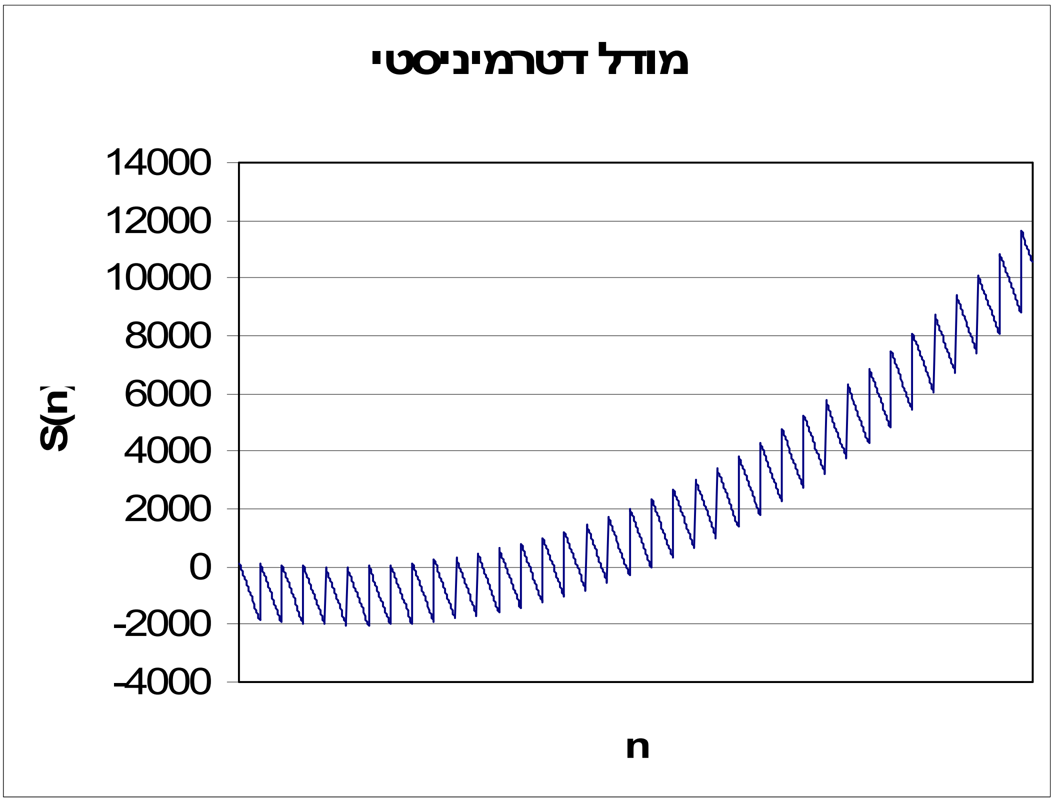
- S(0) נשאר ללא שינוי (מהמודל הדטרמיניסטי).
- למשכורת נכניס מימד של גידול אקראי. נאמר שאם המשכורת בחודש n היא P אזי המשכורת בחודש n+1 היא $P(1+U)$ כאשר $U \sim Uniform(0,0.02)$. מידול זה משקף כי בכל חודש הגידול במשכורת הוא בממוצע כמו במודל הדטרמיניסטי אבל בעל השתנות. כעת ניתן לרשום את ההכנסה היומית כתוצאה ממשכורת $(\widetilde{P}(n))$ כך:

  $P(n)=2000\prod_{k=1}^{n/30}(1+U_j)$ עבור n=30k $k\in\mathbb{N}$, אחרת $\widetilde{P}(n)=0$.

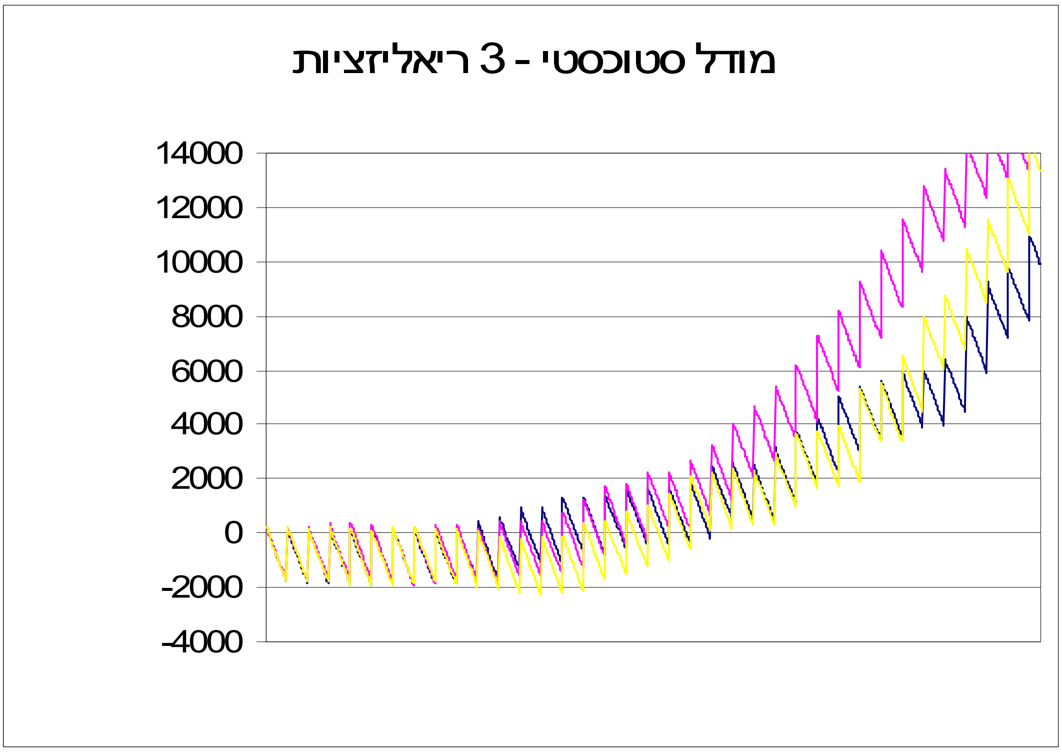
  כאשר $\{U_j, j\in\mathbb{N}\}$ היא סדרה של משתנים מקריים אחידים i.i.d. על הקטע $[0,0.02]$.
- נכניס גם מימד של אקראיות להוצאה היומית: $\widetilde{E}(n) \sim Uniform(50,90)$

נשים לב כי בנינו את המודל הסטוכסטי כך שכל הרכיבים האקראיים שלו הינם בעלי תוחלת הזהה לרכיבים המקבילים במודל הדטרמיניסטי.

להלן הריאליזציה של המודל הדטרמיניסטי בExcel.



להלן 3 ריאליזציות של המודל הסטוכסטי (גם Excel ע"י שימוש בפו' ()random).



שאלות מעניינות לגבי תכונות של תהליכים סטוכסטיים:

בהינתן מודל של תהליך סטוכסטי מה ניתן לעשות איתו? לרוב שאלה זו תלויה במודל. למרות זאת ישנם מספר מאפיינים של תהליכים סטוכסטיים אשר מעניינים אותנו ביותר:

1. חוק ההסתברות (התפלגות) של ערכי התהליך בזמן מסוים $t \in T$.
2. התוחלת, שונות, מומנטים של ערכי התהליך בזמן מסוים $t \in T$.
3. הקשר הסטוכסטי בין ערך התהליך בשני זמנים מסוימים.
4. ההסתברות כי התהליך יכנס למצב מסוים או אוסף מצבים ולעולם לא יצא ממצב זה.
5. התפלגות הזמן עד הגעה למצב מסוים או אוסף מצבים.
6. התוחלת, שונות, מומנטים של הסעיף הקודם.
7. חוק ההסתברות (התפלגות) מס' החזרות למצב מסוים ביחידת זמן.
8. קיום התפלגות גבולית.
9. ארגודיות.
10. תכונות נוספות.

דוגמאות/משפחות של תהליכים סטוכסטיים:

להלן רשימה של משפחות של תהליכים סטוכסטיים .

1. סדרה של משתנים מקריים בלתי תלויים.
2. סדרת משתני ברנולי.
3. מהלך מקרי פשוט

4. מהלך מקרי כללי
5. תהליכים גאוסים.
6. תהליכי ספירה.
7. תהליכי חידוש.
8. תהליכי פואסון.
9. שרשראות מרקוב.
10. תהליכי קפיצה מרקובים.
11. תהליכי לידה – מוות.
12. תהליכי הסתעפות.
13. תנועת בראון.

יישומים:

1. מידול אותות בתקשורת רדיו.
2. מידול עומס ברשתות תקשורת חוטיות.
3. מידול מצב תעסוקתי במודלים של פנסיה.
4. מידול טביעות לחברת ביטוח.
5. מידול תהליכי יצור.
6. מידול עומסים על מערכת מחשב מרובת משאבים.
7. מידול של גדלי אוכלוסיות.
8. יישומים רבים נוספים.

סימולציה ע"י מחשב:

בקורס זה, נכיר מספר מודלים בסיסיים של תהליכים סטוכסטיים ונלמד כיצד לענות על שאלות לגבי התהליכים: התפלגות התהליך בזמן מסוים וכו'. הדרך ובה נעבוד היא הדרך האנליטית: נגדיר בכל פעם את התהליך, נגדיר את ההנחות ההסתברותיות ולאחר מכן נשתמש בתכונות מיוחדות של התהליך לצורך חישוב הגדלים אשר מעניינים אותנו.

דרך חלופית להתמודדות עם בעיות מסוג זה היא באמצעות **סימולציה ע"י מחשב**. כאשר חוקרים תכונות של תהליכים סטוכסטיים ע"י סימולציה ממוחשבת פשוט נותנים למחשב להריץ ריאליזציה אחת ארוכה, או אוסף רב של ריאליזציות ובוחנים את ההתנהגות התהליך המתואר ע"י המחשב.

סקירת חלקי הקורס:

הקורס מחולק לחמישה חלקים (א'-ה') ובכל חלק בין חמישה לעשרה פרקים (סה"כ כ- 35 פרקים), משך ההרצה של כל פרק הוא בערך כשעה. בתחילת הקורס נבצע חזרה מקיפה על הסתברות, זהו חלק (א').
לאחר מכן נעבור לחלק (ב') ובו נשתעשע בשרשראות מרקוב, מודל שימושי זה נפוץ כמעט בכל תחומי המדע ובפרקטיקה. המושג המרכזי אשר נפגוש בפרק של שרשראות מרקוב הוא מושג הארגודיות.
בחלק הבא (ג') נרחיב את תחום העניין שלנו לתהליכים בעלי מרחב מצבים רציף מהסוג הפשוט והפופולארי ביותר, אלו הם תהליכים פואסון. תהליך פואסון הינו מושג בסיסי וחשוב בתורת ההסתברות ובאמצעותו ניתן

למדל תופעות רבות בטבע. בחלק לאחר מכן (ד') נפגוש בתהליכי קפיצה מרקובים. תהליכים אלו הינם הרחבה של תהליכי פואסון לשרשראות מרקוב בזמן רציף.
בחלק הבא (ה') ננתח תהליכי קפיצה מרקובים בעלי מבנה מסוים, פשוט אך שימושי, אלו הם תהליכי לידה-מוות. ניישם תהליכי לידה ומוות שונים למודלים של תורת התורים. בנוסף נדון בתורת התורים באופן כללי. ניתן להתייחס לפרק זה כמבוא לתורת התורים.
לבסוף בחלק ו' נסכם בקצרה ונציין נושאים אלמנטאריים נוספים בתהליכים סטוכסטיים אשר לא נלמדו בקורס זה.

פרק א-2: חזרה על הסתברות, ותוצאות מתמטיות נוספות שימושיות.

תוצאות מתמטיות שימושיות:

1. הבינום של ניוטון.

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

2. טור גיאומטרי.

$$\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$|a|<1, \sum_{k=0}^{\infty}a^k=\frac{1}{1-a}$$

3. טור טלסקופי.

$$\sum_{k=0}^{N}(A_k-A_{k+1})=A_0-A_{N+1}$$

4. ייצוג exp(x) ע"י טור טילור.

$$e^x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$$

5. נוסחת פסקל:

$$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$$

6. 4 מקרים קומבינאטורים פשוטים – פיזור k כדורים ל n תאים.

a. n^k

b. $n(n-1)...(n-k+1)=\binom{n}{k}k!$

c. $\binom{n}{k}$

d. המקרה היותר קשה הוא כדורים זהים ללא הגבלה של מקום בכל תא: $\binom{k+n-1}{k}$

דוגמא א-2:
כמה פתרונות במספרים שלמים אי-שליליים יש למשוואה $a_1 + a_2 + ... + a_n = k$?
שאלת ספירה זו זהה לשאלה בכמה דרכים ניתן לפזר k כדורים לn תאים כאשר אין הגבלה על מספר הכדורים אשר ניתן להכניס לתא והכדורים זהים. (שזו גם בדיוק השאלה, בכמה דרכים ניתן לדגום k פריטים מאוכלוסיה בעלת n, פריטים אם החזרות (יותר מכדור אחד בתא) וסדר הדגימה לא משנה (הכדורים זהים).

7. נוסחת המשולש
המקרה הבדיד:

$$\sum_{k=0}^{N} kf(k) = \sum_{k=1}^{N} kf(k) =$$
$$f(1) +$$
$$f(2) + f(2) +$$
$$f(3) + f(3) + f(3) +$$
$$....$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j=k}^{N} f(j)$$

המקרה הרציף:

$$\int_0^\infty xf(x)dx = \int_0^\infty \int_0^x 1dt f(x)dx =$$
$$\int_{x=0}^\infty \int_{t=0}^x f(x)dtdx = \int_{t=0}^\infty \int_{x=t}^\infty f(x)dxdt$$

8. קירוב Stirling ל – n!.

$$n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$$

הערה: הסימון $f_n \sim g_n$ מסמל כי $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{g_n} = 1$.

חזרה כללית על הסתברות:

כנאמר בפרק הקודם, משתנה מקרי הוא פונקציה ממרחב המדגם אל מרחב של מספרים כלשהו. לרוב נקטלג את המשתנים המקריים אשר אנחנו מכירים למשתנים מקריים רציפים ולמשתנים מקריים בדידים אבל לפעמים ישנם גם משתנים מקריים מעורבים.

אנו מתעניינים בחוק ההסתברות של משתנים מקריים. ניתן לתאר את חוק ההסתברות במספר דרכים. הדרך המקובלת ביותר היא **פונקציות ההתפלגות המצטברת** וזאת בגלל שתיאור זה מתאים גם למשתנים מקריים בדידים וגם לרציפים (וגם למעורבים).

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(\{w : X(w) \le x\})$$

כזכור זוהי פונקציה לא יורדת ומתקיים כי

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$$
$$\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$

לפעמים נוח יותר לעבוד אם המשלים של פונקצית ההתפלגות המצטברת, זוהי **פונקצית השרידות**:
$$\overline{F}_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x)$$

עבור משתנים מקריים בדידים קיימת **פונקצית מסת הסתברות**:
$$P_X(x) = P(X = x).$$

ואז מתקיים:
$$F_X(x) = \sum_{k=-\infty}^{x} P_X(k).$$

עבור משתנים מקריים רציפים קיימת **פונקצית צפיפות** $f_X(x)$. לערך פונקציה זו אין משמעות הסתברותית בשל עצמו אבל מתקיים:
$$\Delta x f_X(x) \cong P(x \le X < x + \Delta x)$$
ואז מתקיים:
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$$

התוחלת של משתנה מקרי היא:
$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$
$$EX = \sum_{x=-\infty}^{\infty} x P_X(x)$$

עבור המקרה הרציף והבדיד בהתאמה.

עבור משתנה מקרי X ניתן להגדיר משתנה מקרי חדש Y=g(X) כאשר g(.) היא פונקציה כלשהי.
את חוק ההסתברות של המתנה המקרי החדש (Y) ניתן לחשב בדרכים אשר נלמדו בקורס תורת ההתפלגויות (לדוגמה אם $Z \sim N(0,1)$ אז $Y = Z^2 \sim Gamma(1/2,1/2) \equiv \chi^2(1)$).

את התוחלת של Y ניתן לחשב עלפי הנוסחאות לעיל (ע"י שימוש בצפיפות או פונקצית מסת ההסתברות אשר חושבה עבור Y). דרך אלטרנטיבית (ולרוב יותר קלה) היא להשתמש בתכונה הבא של התוחלת:
$$EY = Eg(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx$$
ובאופן דומה עבור המקרה הבדיד.

המומנט ה – k (k=1,2,3,…) של משתנה מקרי X הוא EX^k. (ניתן לחשב עפ"י הנוסחה לעיל כאשר $g(x) = x^k$).

השונות של משתנה מקרי היא $Var(X)=E\left\{(X-EX)^2\right\}=E\left\{X^2\right\}-(EX)^2$.

מה יודעים על תוחלות/שונויות של סכומים/מכפלות?

- תוחלת של סכום היא סכום התוחלות (לא משנה אם תלויים או לא).
- תוחלת של מכפלה היא מכפלת התוחלת כאשר המשתנים המקריים בלתי תלויים.
- שונות של סכום של משתנים מקריים **בלתי מתואמים** (יותר חלש מבלתי תלויים) הוא סכום השונויות.

עבור משתנה מקרי חיובי מתקיים השוויון הבא:

$$EX=\int_0^{\infty}\overline{F}_X(x)dx$$

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}_X(k)$$

עבור המקרה הרציף והבדיד בהתאמה.

הוכחה עבור המקרה הבדיד:
נשתמש בנוסחת המשולש (הוצגה בסעיף הקודם):

$$EX=\sum_{k=0}^{\infty}kP_X(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}P_X(j)=$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k'=0}^{\infty}P(X\geq k'+1)=$$

$$\sum_{k'=0}^{\infty}P(X>k')=\sum_{k'=0}^{\infty}\overline{F}_X(k')$$

הוכחה עבור המקרה הרציף:

$$EX=\int_0^{\infty}xf_X(x)dx=$$

$$\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=t}^{\infty}f(x)dxdt=\int_{t=0}^{\infty}\overline{F}_X(t)dt$$

פונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי X היא $M_X(t)=Ee^{tX}$.

זוהי פונקציה של t. היא מעניינת בגלל מספר סיבות.

א) פונקצית יוצרת מומנטים מגדירה באופן חד ערכי את חוק ההסתברות של המשתנה המקרי. זאת אומרת שבמידה וזיהינו את הפונקציה יוצרת מומנטים של משתנה מקרי אז גילינו את התפלגותו!!!
הערה 1: במקרים חריגים בהם הפו' אינה מוגדרת בסביבה של t=0 אז זה לא מתקיים אבל לא נתעסק במקרים כאלו בקורס זה.
הערה 2: המעבר מצפיפות/מסת הסתברות לפו' יוצרת מומנטים הוא לרוב קל (חישוב תוחלת), המעבר בחזרה הוא קשה (דורש אינטגרציה במישור מרוכב – "קשה") לכן הדרך הנוחה לעשות זאת היא בעזרת טבלה.

ב) ע"י גזירה k פעמים והצבה t=0 ניתן לקבל את המומנט ה k.
ג) הפונקציה של סכום של שתי מ"מ בלתי תלויים. היא מכפלת הפונקציות. נראה בהמשך.

(וריאציות אחרות הן **התמרת לפלס** $L_X(s)=Ee^{-sX}$ **ופונקציה אופיינית** $\Phi_X(t)=Ee^{itX}$, אבל אנו נשתמש לרוב בפו' יוצרת מומנטים בקורס זה).

עבור משתנים מקריים בדידים אי-שליליים מוגדרת **פונקציה יוצרת הסתברות** (לפעמים נקראת פשוט פונקציה יוצרת): $G_X(t)=Et^X$.

קיים קשר פשוט בין פונקציה יוצרת הסתברות לפונקציה יוצרת מומנטים.

הערה: פו' יוצרת קיימת גם לסדרות באופן כללי (הסדרה לא חייבת להיות פו' מסת הסתברות).

משתנים מקריים ממשפחות מוכרות:

בקורס מבוא להסתברות ותורת ההתפלגויות הכרנו משפחות רבות של משתנים מקריים, בדידים ורציפים. לכל משפחה יש פרמטר אחד או יותר ולפעמים גם ישנו "סיפור" (בעיקר עבור הבדידים). לא נחזור כאן על הפירוט של המשתנים המקריים (ניתן לראות אותם בטבלת התפלגויות) אבל נציין את החשובים והרלוונטיים לקורס זה:

1. ברנולי.
2. בינומי.
3. היפר-גיאומטרי.
4. גיאומטרי – סופר כישלונות.
5. גיאומטרי – סופר ניסיונות.
6. בינומי שלילי – סופר כישלונות.
7. בינומי שלילי – סופר ניסיונות.
8. פואסון.
9. אחיד בדיד.
10. אקספוננציאלי.
11. גאמא.
12. ארלנג (מקרה פרטי של גאמא).
13. נורמאלי.
14. אחיד (רציף).

משתנים מקריים החיים יחדיו במרחבי הסתברות:

עבור שני משתנים מקריים X,Y, כך מוגדרת פונקצית ההתפלגות המשותפת:
$F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$ (כאשר פסיק בין "מאורעות" מסמל חיתוך מאורעות).
מכאן: $F_X(x)=P(X\le x,Y\le\infty)=\lim_{y\to\infty}F_{X,Y}(x,y)$ (וכנ"ל עבור Y).

עבור שני משתנים מקריים בדידים, פונקצית מסת ההסתברות המשותפת מוגדרת כך:
$P_{X,Y}(x,y)=P(X=x,Y=y)$.

כאשר 2 משתנים מקריים (X_1, X_2) הינם i.i.d. (Independent and identically distributed) אזי $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$. או באופן כללי עבור וקטור $\overrightarrow{X}$ של משתנים מקריים i.i.d. באורך n (בעל n משתנים מקריים) מתקיים $F_{\overline{X}}(x_1,...,x_n) = \prod_{i=1}^{n} F_X(x_i)$. אותה תוצאה נכונה עבור פו' מסת הסתברות משותפת של אוסף i.i.d. ועבור הצפיפות המשותפת של אוסף i.i.d.

סכומים של משתנים מקריים:

סכימה של משתנים מקריים הינה תופעה שכיכה ביותר במודלים הסתברותיים ובתהליכים סטוכסטיים.
בעקרון כל תהליך סטוכסטי בזמן בדיד S_n ניתן להגדיר כסכום של משתנים מקריים (לא בהכרח בלתי תלויים). נגדיר:

$$X_0 = S_0$$
$$X_n = S_n - S_{n-1}$$

ואז:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} X_k .$$

במידה והמשתנים המקריים X_n הינם בלתי תלויים אזי $\{S_n, n \geq 0\}$ נקרא מהלך מקרי.

ניתן לחשב את חוק ההסתברות המשותף של סכום של משתנים מקריים בלתי תלויים במספר דרכים.
הדרך ה"ישירה" היא באמצעות פעולת הקונבולוציה, דרך אחרת (ולרוב יותר פשוטה) היא ע"י הכפלה של פונקציות יוצרות מומנטים או פונקציות יוצרות הסתברות, לבסוף כאשר הסכום הוא של אוסף רב של משתנים מקריים אז ניתן להשתמש במשפטי גבול.

קונבולוציה:

עבור המקרה הבדיד, קונבולוציה היא פעולה הפועלת על שתי סדרות של מספרים ופולטת סדרה שלישית.
עבור המקרה הרציף, קונבולוציה היא פעולה אשר פעולת על שתי פונקציות ופולטת פונקציה שלישית.

בהינתן סדרה של מספרים $a = \{a_n, n \geq 0\}$ וסדרה נוספת $b = \{b_n, n \geq 0\}$, נגדיר את הקונבולוציה של a ו b כך:

$$c_n = (a \otimes b)_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n-i} .$$

נוצרה כאן סדרה חדשה של מספרים c_n, כאשר הערך של הסדרה ב $n = n_0$ כלשהו הוא: $\sum_{i=0}^{\infty} a_i b_{n_0 - i}$.

לפעולת הקונבולוציה שימושים רבים בניתוח מערכות ליניאריות ובעיבוד אותות, אבל השימושים אשר מעניינים אותנו הם בהסתברות:
נראה כי עבור שתי משתנים מקריים בדידים,חיוביים בלתי תלויים X,Y מתקיים כי פונקצית מסת ההסתברות של Z=X+Y היא הקונבולוציה של פונקציות המסה של X ושל Y.

נסתכל על המאורע: $[X+Y=n]$, מאורע זה ניתן לכתיבה כאיחוד זר של מאורעות אשר מתארים את הערכים הספציפיים אשר X ו Yמקבלים:

$$[X+Y=n]=\bigcup_{i=0}^{\infty}[X=i,Y=n-i].$$

ולכן:

$$P_Z(n)=P_{X+Y}(n)=P(X+Y=n)=$$
$$P(\bigcup_{i=0}^{\infty}[X=i,Y=n-i])=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i,Y=n-i)=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}P(X=i)P(Y=n-i)=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}P_X(i)P_Y(n-i)=(P_X\otimes P_Y)(n)$$

ניתן להגדיר קונבולוציה באופן דומה עבור פונקציות (פו' צפיפות של משתנים מקריים רציפים) ואין הכרחי כי הפונקציות/סדרות יהיו בעלי תומך חיובי בלבד – לא נעשה זאת כאן.

<u>דוגמא א-3:</u>

$X_1,X_2\sim Bernulli(p)$ בלתי תלויים.

נגדיר $N_2=X_1+X_2$.

אזי $P(N_2=k)=(P_{X_1}\otimes P_{X_2})(k)$.

$$(P_{X_1}\otimes P_{X_2})(k)=\sum_{i=0}^{\infty}P_{X_1}(i)P_{X_2}(k-i)$$

ראשית נבחין כי עבור k>2 ועבור k<0 הסכום לעיל אינו מכיל איברים חיוביים.
נותר עם כך לחשב עבור k=0,1,2.

עבור k=0 הסכום מכיל איבר חיובי יחיד (כאשר i=0): q^2.
עבור k=1 הסכום מכיל 2 איברים חיוביים (כאשר i=0): qp (כאשר i=1): pq. ולכן סה"כ: $2pq$.
עבור k=2 הסכום מכיל איבר חיובי יחיד (כאשר i=1): p^2

קבלנו אם כך כמצופה כי $N_2\sim Bin(p,2)$.

<u>דוגמא א-4:</u>

$X_1\sim Poisson(\lambda_1)$
$X_2\sim Poisson(\lambda_2)$ והם בלתי תלויים.

כיצד מתפלג $Z=X_1+X_2$?

$$P(Z=k)=(P_{X_1}\otimes P_{X_2})(k)=$$
$$\sum_{i=0}^{\infty}P_{X_1}(i)P_{X_2}(k-i)=$$
$$\sum_{i=0}^{k}P_{X_1}(i)P_{X_2}(k-i)=$$
$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1{}^{i}\lambda_2{}^{k-i}}{i!(k-i)!}=$$
$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}k!\frac{\lambda_1{}^{i}\lambda_2{}^{k-i}}{i!(k-i)!}=$$
$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda_1{}^{i}\lambda_2{}^{k-i}=$$
$$e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}\frac{1}{k!}(\lambda_1+\lambda_2)^{k}$$

קבלנו שסכום של שתי מ"מ פואסונים מתפלג פואסונית עם סכום העוצמות (הפרמטרים).

שימוש בפונקציה יוצרת מומנטים:

פעולת הקונבולוציה היא לפעמים מסובכת (הן אנליטית והן נומרית). מדוע אנליטית? כי ככה יוצא. ומדוע נומרית? נניח כי ברצונו לבצע קונבולוציה של שתי פונקציות מסת הסתברות, כל אחת בעלת תומך המכיל כ – 1000 ערכים, אז מספר ההכפלות אשר עלינו לבצע הוא מסדר גודל של כמיליון.

ייצוג חוק ההסתברות ע"י פונקציה יוצרת מומנטים (או גם פונקציה יוצרת הסתברות) יכול להקל על המלאכה (לזכור כי X ו Y בלתי תלויים):

$$M_{X+Y}(t)=Ee^{(X+Y)t}=Ee^{Xt}e^{Yt}=Ee^{Xt}Ee^{Yt}=M_X(t)M_Y(t)$$

החישוב דומה עבור פונקציה יוצרת הסתברות.

זאת אומרת שלאחר המרה של חוקי ההסתברות למרחב t, הפעולה המסובכת של סכום משתנים מקריים (ולכן קונבולוציה פו' מסת הסתברות) מתפשטת לפעולה של מכפלה של פונקציות יוצרות מומנטים/הסתברות.

<u>דוגמא א-5:</u>

$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$, $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$ בלתי תלויים.

כיצד מתפלג $Z=X_1+X_2$?

ידוע כי $M_{X_i}(t)=e^{\mu_i t+\frac{\sigma_i^2t^2}{2}}$ (לא קשה לחשב זאת על פי הגדרה).

$$M_Z(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)=e^{\mu_1 t+\frac{\sigma_1^2 t^2}{2}}e^{\mu_2 t+\frac{\sigma_2^2 t^2}{2}}=e^{(\mu_1+\mu_2)t+\frac{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2}{2}}$$

וזוהי פו' יוצרת מומנטים של משתנה מקרי $N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

משפטי גבול:

כאשר הסכום המקרי S_n הוא בעל הרבה מחוברים (X_n) (n גדול). והמחוברים הינם .i.i.d. בעלי תוחלת ושונות סופית אזי ניתן ליישם משפטי גבול.

החוק החלש של המספרים הגדולים:

משפט:

$\lim_{n\to\infty}P(|\frac{S_n}{n}-EX|>\varepsilon)=0$ לכל $\varepsilon>0$.

הערה: קל להוכיח משפט זה באמצעות אי שוויון צבישב/מרקוב.

החוק החזק של המספרים הגדולים:

משפט:

$P(\lim_{n\to\infty}|\frac{S_n}{n}-EX|>\varepsilon)=0$ לכל $\varepsilon>0$.

ניתן גם לומר זאת כך:

לכל $\omega\in\Omega$ בעלת הסתברות חיוביות $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=EX$

הערה: לזכור כי S_n הוא פונקציה של ω.

הערה: החוק החזק והחוק החלש נראים דומים. למרות זאת החוק החזק אומר הרבה יותר (ולכן נקרא חזק). הוא אומר שעבור כל ריאליזציה אפשרית של אוסף משתנים .i.i.d, הממוצע שואף לתוחלת (אין ריאליזציות בעלות הסתברות חיוביות אשר עבורן הממוצע אינו שואף לתוחלת). החוק החלש, בסך הכול טוען כי ככל שמגדילים את n (את המדגם) אז ההסתברות כי הממוצע יהיה שונה מהתוחלת הולכת וקטנה.
במילים אחרות, החוק החזק מסתכל על כל התהליך לעומת החוק החלש אשר מסתכל על הפילוג השולי עבור n נתון.

משפט הגבול המרכזי:

משפט:

$$\lim_{n\to\infty}F_{\frac{S_n-nEX}{\sqrt{nVar(X)}}}(x)=F_Z(x)$$

כאשר Z משתנה מקרי נורמאלי סטנדרטי.

<u>דוגמא:</u>

את נוסחת סטירלינג ($n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$). ניתן להוכיח במדויק ע"י קירוב של אינטגרל של log.
כאן נראה הסבר אלטרנטיבי לנכונותה של הנוסחה.

יהיו $\{X_n, n\geq 1\}$ אוסף משתנים מקריים .i.i.d המתפלגים Poisson(1).
ז"א $EX_i=1$ וגם $Var(X_i)=1$.
נסכל על הסכום $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_i$.
אזי $ES_n=n$. וגם $Var(S_n)=n$.
בנוסף ידוע כי S_n מתפלג Poisson(n).

עכשיו עבור n גדול $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ מתפלג בקירוב נורמאלית סטנדרטית
ולכן ניתן לכתוב:

$$P(S_n=n)=P(n-1<S_n\leq n)=P(-1<S_n-n\leq 0)=$$

$$P(-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\leq 0)\approx\int_{-1/\sqrt{n}}^{0}(2\pi)^{-1/2}e^{-x^2/2}dx$$

ערך זה שווה בקירוב ל $\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ (קירוב של האינטגרל באזור הנקודה 0).

אבל בנוסף מתקיים $P(S_n=n)=\frac{e^{-n}n^n}{n!}$.
ולכן

$$\frac{e^{-n}n^n}{n!}\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

ומכאן מייד נובעת נוסחת סטרלינג.

<u>סטטיסטי סדר:</u>

ניקח אוסף משתנים מקריים .i.i.d $X_1,....,X_n$ (לפעמים נקרא לאוסף שכזה מדגם מקרי).

נניח כאן לצורך הדיון כי כל ערכי המדגם שונים זה מזה (זה קורה בהסתברות 1 במידה ו X מ"מ רציפים).

סטטיסטי הסדר ה - k של המדגם המקרי הוא הערך של המשתנה המקרי מתוך המדגם כך ש k-1 מהמשתנים במדגם קטנים ממנו ו n-k משתנים במדגם גדולים ממנו. (כך שסטטיסטי הסדר ה – 1 הוא המינימום וסטטיסטי הסדר ה n הוא המקסימום).

ניתן להגדיר זאת במדויק כך:

$$X_{(1)} = \min_{1\le i\le n} X_i$$
$$\langle 1\rangle = \arg\min_{1\le i\le n} X_i$$

$$X_{(2)} = \min_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne\langle 1\rangle}} X_i$$
$$\langle 2\rangle = \arg\min_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne\langle 1\rangle}} X_i$$

....

....

$$X_{(k)} = \min_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne\langle 1\rangle,\dots,\langle k-1\rangle}} X_i$$
$$\langle k\rangle = \arg\min_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne\langle 1\rangle,\dots,\langle k-1\rangle}} X_i$$

...

...

$$X_{(n)} = \min_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne\langle 1\rangle,\dots,\langle n-1\rangle}} X_i = \max_{1\le i\le n} X_i$$
$$\langle n\rangle = \arg\min_{\substack{1\le i\le n\\ i\ne\langle 1\rangle,\dots,\langle n-1\rangle}} X_i = \arg\max_{1\le i\le n} X_i$$

אזי $X_{(k)}$ הוא סטטיסטי הסדר ה – k ו $\langle k\rangle$ הוא האינדקס של המשתנה המקרי אשר הוא סטטיסטי הסדר הk. (ז"א מתקיים $X_{(k)} = X_{\langle k\rangle}$).

נשאל מספר שאלות לגבי חוק ההסתברות של סטטיסטי הסדר ה k ושל כל הוקטור $(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$.

נתחיל לצורך חימום עם מציאת חוק ההסתברות של המינימום:

$$\overline{F}_{X_{(1)}}(x) = P(X_{(1)} > x) = P(X_1 > x,\dots,X_n > x) = P(X_1 > x)\dots P(X_n > x)$$
$$= (P(X > x))^n = (\overline{F}_X(x))^n$$

באופן דומה, חוק ההסתברות של המקסימום:

$$F_{X_{(n)}}(x) = P(X_{(n)} \le x) = P(X_1 \le x,\dots,X_n \le x) = (F_X(x))^n.$$

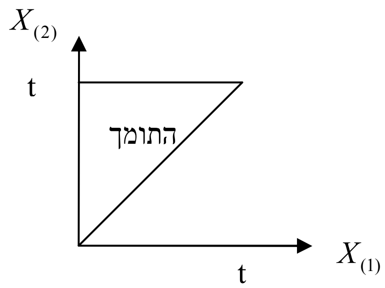
הצפיפות המשותפת של $X_{(1)},\dots,X_{(n)}$ (של הוקטור $(X_{(1)},\dots,X_{(n)})$) היא:

$$f_{(X_{(1)},\dots,X_{(n)})}(x_1,\dots,x_n) = n!\prod_{j=1}^{n} f_X(x_i) I_C^{(x_1,\dots,x_n)}$$

כאשר הקבוצה C (התומך של הצפיפות המשותפת) מוגדרת כך:
$C = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < ... < x_n\}$.

<u>דוגמא:</u>

$X_i \sim Uniform(0,t)$ עבור i=1,2 והם בלתי תלויים.
אזי ההתפלגות המשותפת של $(X_{(1)}, X_{(2)})$ היא "אחידה" על התומך:



שטח התומך הוא $\frac{t^2}{2}$ וגובה הצפיפות או $\frac{2}{t^2}$ (על פי הנוסחה לעיל).

<u>הוכחה של נוסחת הצפיפות המשותפת של סטטיסטי הסדר:</u>
תהי A תת קבוצה של המרחב: $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
תהי σ פרמוטציה (תמורה) על $\{1,...,n\}$.
תהי Σ קבוצת כל $n!$ הפרמוטציות על $\{1,...,n\}$.
יהי X' הוקטור הסדור $(X_{(1)},...,X_{(n)})$ כאשר $<1>,<2>,...,<n>$ נתונים ע"י σ.
יהי $C = \{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 < x_2 < ... < x_n\}$.
אז:

$$P(X' \in A) = P(X' \in A \cap C) = P(X_\sigma \in A \cap C) =$$
$$\sum_{\sigma_0 \in \Sigma} (X_\sigma \in A \cap C, \sigma = \sigma_0)$$

נשים לב שאם $X_{\sigma_0} \in A \cap C$ אזי $\sigma_0 = \sigma$ ואז

$$P(X_{\sigma_0} \in A \cap C) = P(X \in A \cap C)$$

ולכן

$$P(X' \in A) = \sum_{\sigma_0 \in \Sigma} (X \in A \cap C) = n! P(X \in A \cap C) = n! \int_{A \cap C} f_X(x)dx = n! \int_A f_X(x) I_C^{(x)} dx$$

מ.ש.ל.

פרק א-3: הסתברות מותנית, התפלגות מותנית, תוחלת מותנית.

הסתברות מותנית מהווה מרכיב מרכזי בניתוחים של הרבה מהתהליכים הסטוכסטיים אשר נלמד בקורס זה.
כנלמד במבוא להסתברות ההגדרה של **ההסתברות המותנית** של מאורע A בהינתן מאורע B (אשר הסתברותו חיובית ממש) היא:

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}.$$

הגדרה זו משקפת את השינוי של חלוקת ההסתברויות של התוצאות לאור האינפורמציה אשר קיבלנו.

שני מאורעות הינם **בלתי תלויים** אם P(AB)=P(A)P(B). מושג האי-תלות מאפשר לנו לקבץ יחדיו 2 (או יותר) מרחבי הסתברות.
במידה ו A ו B בלתי תלויים אז P(A|B)=P(A).

<u>דוגמא:</u>
האם ייתכנו שתי מאורעות זרים A,B בעלי הסתברות חיוביות ממש בלתי תלויים?
לא, נניח בשלילה כי A ו B בלתי תלויים אז $P(AB)=P(A)P(B)>0$. אבל אם A ו B זרים אז $AB=\varnothing$ ולכן P(AB)=0. סתירה.

בהינתן אוסף מאורעות $\{B_\gamma,\gamma\in\Gamma\}$ זרים בזוגות, מתקיימת **נוסחת ההסתברות השלמה:**
$P(A)=\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ P(B_\gamma)>0}}P(A\mid B_\gamma)P(B_\gamma)$ כאשר ניתן להתייחס לסכום כאינטגרל במידה והקבוצה של המאורעות Γ אינה בת-מנייה.

נוסחת בייס היא דרך לחשב את $P(B_\gamma\mid A)$ (כאשר ידוע לנו $P(A\mid B_\gamma)$ ו $P(B_\gamma)$ עבור כל γ).

$$P(B_\gamma\mid A)=\frac{P(B_\gamma A)}{P(A)}=\frac{P(A\mid B_\gamma)P(B_\gamma)}{\sum_{\substack{\gamma\in\Gamma\\ P(B_\gamma)>0}}P(A\mid B_\gamma)P(B_\gamma)}$$

<u>דוגמא א-15:</u>
מערכת תקשורת מכילה משדר המשדר אחד משתי האותות '0' או '1' ומקלט הנמצא במרחק רב מהמשדר ומנסה לפענח את האות אשר המשדר שידר. אותות '0' משודרים בהסתברות 1-p ואותות '1' משודרים בהסברות p. בגלל המרחק הרב בין המשדר למקלט, מתווסף רעש משמעותי לאות הנקלט וישנה הסתברות של α כי המקלט החליט כי קלט '1' למרות שבעצם שודר '0' או החליט כי קלט '0' למרות שבעצם שודר '1'.
נתון כי המקלט קלט '1' , מה ההסתברות שמהשדר באמת שידר '1'?

נסמן T_i - שידור של i.
נסמן R_i - קליטה של i.
אז לפי בייס:

$$P(T_1\mid R_1)=\frac{P(R_1\mid T_1)P(T_1)}{P(R_1\mid T_1)P(T_1)+P(R_1\mid T_0)P(T_0)}=\frac{(1-\alpha)p}{(1-\alpha)p+\alpha(1-p)}$$

דוגמא:
במשחק טלוויזיה משתתף צריך לבחור 1 מ-3 דלתות (מאחורי 2 דלתות אין כלום ומאחורי דלת אחת יש מיליון דולר). המשתתף בחר את דלת מס' 1 ולאחר מכן המארח של המשחק פתח את דלת מס' 2 והראה למשתתף שאין כלום מאחורי דלת זו.
בשלב זה המשתתף נשאל האם ברצונו לדבוק בדלת מס' 1 או לשנות את בחירתו לדלת מס' 3.

א) מהי ההסתברות לזכייה במידה ויישאר עם דלת מס' 1.
ב) מהי ההסתברות לזכייה במידה וישנה את בחירתו לדלת מס' 3.

נסמן ב A_i את המאורע שהמיליון נמצא מאחורי דלת i.
נסמן ב – E את המאורע שהמנחה פתח את דלת מס' 2 לאחר שהמשתתף בחר את דלת מס' 1.
ידוע ש $P(A_i)=\frac{1}{3}$ ולכן גם $P(\overline{A_i})=\frac{2}{3}$.
בנוסף:

$$P(E\mid A_1)=\frac{1}{2}$$

$$P(E\mid A_2)=0$$

$$P(E\mid A_3)=1$$

בנוסף ידוע כי

$$P(E)=P(E\mid A_1)P(A_1)+P(E\mid A_2)P(A_2)+P(E\mid A_3)P(A_3)=\frac{1}{2}*\frac{1}{3}+0*\frac{1}{3}+1*\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

ולכן:

א) $$P(A_1\mid E)=\frac{P(E\mid A_1)P(A_1)}{P(E)}=\frac{\frac{1}{2}*\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$$

ב) $$P(A_3\mid E)=\frac{P(E\mid A_3)P(A_3)}{P(E)}=\frac{1*\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

העובדה כי חיתוך של מאורעות ניתן לביטוי כמפלה של הסתברות בהסתברות מותניית ($P(AB)=P(A\mid B)P(B)$) באה לידי ביטוי גם **בנוסחת השרשרת**:

$$\begin{aligned}&P(B_1...B_n)=\\&P(B_n\mid B_1...B_{n-1})P(B_1...B_{n-1})=\\&P(B_n\mid B_1...B_{n-1})P(B_{n-1}\mid B_1...B_{n-2})P(B_1...B_{n-2})=\\&...=\\&P(B_n\mid B_1...B_{n-1})P(B_{n-1}\mid B_1...B_{n-2})...P(B_2\mid B_1)P(B_1)\end{aligned}$$

חוק ההסתברות המותנה של משתנים מקריים:

להלן פונקצית מסת ההסתברות המותניית עבור משתנים מקריים בדידים:

$$P_{X|Y}(x\mid y)=P(X=x\mid Y=y)=\frac{P_{X,Y}(x,y)}{P_Y(y)}.$$

עבור משתנים מקריים בלתי תלויים מתקיים: $P_{X,Y}(x,y)=P_X(x)P_Y(y)$.

ולכן במקרה זה $P_{X|Y}(x\mid y)=P_X(x)$

להלן פונקצית הצפיפות המותניית עבור משתנים מקריים רציפים:

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

כאשר נכפיל את צד שמאל ב Δx ואת צד ימין ב $\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta y}$ נקבל.

$f_{X|Y}(x\mid y)\Delta x=\frac{f_{X,Y}(x,y)\Delta x\Delta y}{f_Y(y)\Delta y}$ ולשוויון זה יש משמעות הסתברותית:

$$P(x<X\le x+\Delta x\mid y<Y\le y+\Delta y)\cong\frac{P(x<X\le x+\Delta x,y<Y\le y+\Delta y)}{P(x<Y\le x+\Delta x)}$$

כמו במקרה הבדיד, במקרה הרציף מתקיים כי עבור משתנים מקריים בלתי תלויים:

$$f_{X|Y}(x\mid y)=f_X(x)$$

<u>דוגמא א-8:</u>

$X_1\sim Poisson(\lambda_1)$
$X_2\sim Poisson(\lambda_2)$ והם בלתי תלויים.

ידוע כי $X_1+X_2=n$, כיצד מתפלג X_1.

צריך למצוא את ההתפלגות המותניית של X_1 בהינתן $X_1+X_2=n$.

ברור שיש לדון בערכים $k=0,...,n$ (ההסתברות היא אפס עבור ערכים שונים מאלו).

$$P(X_1=k\,|\,X_1+X_2=n)=$$
$$\frac{P(X_1=k,X_1+X_2=n)}{P(X_1+X_2=n)}=$$
$$\frac{P(X_1=k,X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=$$
$$\frac{P(X_1=k)P(X_2=n-k)}{P(X_1+X_2=n)}=$$
$$\frac{e^{-\lambda_1}\frac{\lambda_1^{\,k}}{k!}e^{-\lambda_2}\frac{\lambda_2^{\,n-k}}{(n-k)!}}{\frac{e^{-\lambda_1+\lambda_2}(\lambda_1+\lambda_2)^n}{n!}}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n-k}$$

קבלנו אם כך כי $X_1\,|\,X_1+X_2=n\sim Bin(n,\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2})$

<u>דוגמא:</u>

$X_1\sim Bin(n_1,p)$
$X_2\sim Bin(n_2,p)$ והם בלתי תלויים.

ידוע כי $X_1+X_2=r$, כיצד מתפלג X_1 .

$$P(X_1=k\,|\,X_1+X_2=r)=$$
$$\frac{P(X_1=k,X_1+X_2=r)}{P(X_1+X_2=r)}=$$
$$\frac{P(X_1=k,X_2=r-k)}{P(X_1+X_2=r)}=$$
$$\frac{P(X_1=k)P(X_2=r-k)}{P(X_1+X_2=r)}=$$
$$\frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{r-k}p^k(1-p)^{n_1-k}p^{r-k}(1-p)^{n_2-(r-k)}}{\binom{n_1+n_2}{r}p^r(1-p)^{n_1+n_2-r}}=$$
$$\frac{\binom{n_1}{k}\binom{n_2}{r-k}}{\binom{n_1+n_2}{r}}$$

קבלנו אם כך כי $X_1\,|\,X_1+X_2=r\sim Hyperg(n_1+n_2,n_1,r)$

מקרה פרטי: אם ב – n ניסויים ישנם r הצלחות אז הסיכוי כי ההצלחה בניסוי ה i הוא:

$P(X_i=1|\sum_{j=1}^{n}X_j)=\frac{r}{n}$. (זאת ע"י התוצאה הקודמת כאשר $n_1=1, n_2=n-1$ ו k=1).

<u>דוגמא:</u>

יהיו X,Λ שני משתנים מקריים.
נניח כי פונקצית הצפיפות המשותפת שלהם היא:

$$f_{X,\Lambda}(x,\lambda)=\frac{1}{2}\lambda e^{-x\lambda}I_{\{[0,\infty)\}}(x)I_{\{[0,2]\}}(\lambda)$$

זהו "מודל תערובת" ובו X מתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר Λ שהוא בעצמו משתנה מקרי (יוניפורמי [0,2] במקרה זה). בו נראה:

נחשב $f_{X|\Lambda}(x|\lambda)=\frac{f_{X,\Lambda}(x,\lambda)}{f_\Lambda(\lambda)}$ עבור $\lambda\in[0,2]$.

ראשית:

$$f_\Lambda(\lambda)=I_{\{[0,2]\}}(\lambda)\int_0^\infty\frac{1}{2}\lambda e^{-x\lambda}dx=I_{\{[0,2]\}}(\lambda)\frac{1}{2}$$

אז אכן $\lambda\sim Uniform(0,2)$

ולכן אכן:

$$f_{X|\Lambda}(x|\lambda)=\frac{f_{X,\Lambda}(x,\lambda)}{f_\Lambda(\lambda)}=\lambda e^{-x\lambda}I_{\{[0,\infty)\}}(x)$$

<u>תוחלת ושונות מותניית:</u>

נגדיר את התוחלת המותניית להיות התוחלת המחושבת באמצעות חוק ההתפלגות המותנה:

$E[X|Y=y]=\sum_{x=-\infty}^{\infty}xP_{X|Y}(x|y)$ במקרה הבדיד.

או

$E[X|Y=y]=\int_{-\infty}^{\infty}xf_{X|Y}(x|y)dx$ במקרה הרציף.

חשוב לשים לב ש E[X|Y] היא פו' של המשתנה המקרי Y. ולכן E[X|Y] הוא משתנה מקרי בעצמו.

<u>דוגמא:</u>

נתונה סדרה $X_1,...,X_n$ i.i.d. של משתנים ברנולי (בעלי הסתברות הצלחה p). נתון כי מספר ההצלחות בסדרה הוא k ($0\le k\le n$), מה תוחלת מספר ההצלחות ב m הניסיונות הראשונים ($m\le n$)?

ברצוננו לחשב את $E[\sum_{i=1}^{m}X_i|\sum_{j=1}^{n}X_j=k]$.

מתקיים:

$$E[\sum_{i=1}^{m} X_i \mid \sum_{j=1}^{n} X_j = k] = \sum_{i=1}^{m} E[X_i \mid \sum_{j=1}^{n} X_j = k]$$

ובנוסף מתקיים $E[X_i \mid \sum_{j=1}^{n} X_j = k] = P(X_i = 1 \mid \sum_{j=1}^{i-1} X_j + X_i + \sum_{j=i+1}^{n} X_j = k) = \frac{k}{n}$

ולכן $E[\sum_{i=1}^{m} X_i \mid \sum_{j=1}^{n} X_j = k] = m\frac{k}{n}$

<u>**משפט התוחלת המותנית**</u>: $E[E[X \mid Y]] = E[X]$.

כנאמר קודם, E[X|Y] הוא משתנה מקרי ולכן המשמעות של התוחלת החיצונית במשפט היא תוחלת על המשתנה המקרי הנ"ל (זאתי תוחלת המחשבים לפי חוק ההסברות של Y).
הוכחה (למקרה הרציף):

$$E[E[X \mid Y]] = E[\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X|Y}(x \mid y)dx] = E[\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx] =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)} dx f_Y(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f_{X,Y}(x,y) dx dy = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = EX$$

ההוכחה למקרה הבדיד דומה.

<u>דוגמא:</u>

$$Var(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = EE[[X^2 \mid Y]] - (E[E[X \mid Y]])^2$$

פרק א-4: דוגמאות לשימוש בהתניה.

חישובי תוחלת של משתנים מקריים בעזרת תוחלת מותניית:

כזכור משתנה מקרי גיאומטרי – סופר ניסיונות הוא בעל תוחלת $\frac{1}{p}$ להלן החישוב הישיר:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} k(1-p)^{k-1}p &= p\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}(1-p)^{j-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j'=0}^{\infty}(1-p)^{j'+k-1} \\
&= p\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}\sum_{j'=0}^{\infty}(1-p)^{j'} \\
&= \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k}\sum_{j'=0}^{\infty}(1-p)^{j'} \\
&= \frac{p}{1-p}\frac{1-p}{1-(1-p)}\frac{1}{1-(1-p)} \\
&= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

חישוב זה אינו ארוך מדי, אבל למרות זאת נראה כיצד ניתן להגיע לתוצאה בצורה אלגנטית באמצעות תוחלת מותניית:

יהיה T המשתנה המקרי הגיאומטרי סופר הניסיונות. נגדיר משתנה מקרי חדש Y כך ש Y מקבל 1 אם בניסיון הראשון מצליחים, אחרת Y הוא 0.

על פי משפט התוחלת המותניית:

$$ET = E[E[T \mid Y]] = E[T \mid Y=0]P(Y=0) + E[T \mid Y=1]P(Y=1) = (E[T]+1)q + 1p \; .$$

כעת נפתור עבור ET:

$$\begin{aligned}
ET - qET &= q + p \\
ET(1-q) &= q + p \\
ET &= \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

סכום אקראי:

יהיו $X_1, X_2, \ldots.$ סדרה של משתנים מקריים .i.i.d.

כבר דנו בפילוג של סכום של n משתנים מקריים כאלו, אבל מה אם מספר המשתנים המקריים אשר אנו מחברים הוא אקראי, נסמנו N.

זהו מודל מתאים לתביעות אשר מגיעות לחברת ביטוח בפרק זמן נתון (ידוע מה ההתפלגות של גודל כל תביעה, וידועה ההתפלגות של מספר התביעות). מעוניינים בחוק ההסתברות (או לפעמים רק בתוחלת) של סכום התביעות:

$S=\sum_{n=1}^{N}X_n$.

נחשב את E[S]:

$$E[S]=E[\sum_{k=1}^{N}X_k]=E[E[\sum_{k=1}^{N}X_k\mid N=n]]$$

אבל $E[\sum_{k=1}^{N}X_k\mid N=n]=E[\sum_{k=1}^{n}X_k]=\sum_{k=1}^{n}EX_k=nEX$

ולכן $E[S]=E[N(EX)]=(EX)(EN)$

ז"א כמצופה, התוחלת של סכום אקראי היא תוחלת מספר האיברים בסכום כפול תוחלת גודל האיברים.

נחשב את Var(S):

כמובן שמתקיים

$$Var(S)=E[S^2]-E[S]^2=E[S^2]-E[N]^2E[X]^2$$

אם כך ראשית נחשב את המומנט השני של S ($E[S^2]$):

$$E[S^2]=E[(\sum_{k=1}^{N}X_k)^2]=E[E[(\sum_{k=1}^{N}X_k)^2\mid N=n]]$$

אבל

$$E[(\sum_{k=1}^{N}X_k)^2\mid N=n]=E[(\sum_{k=1}^{n}X_k)^2]=E[(X_1+\ldots+X_n)(X_1+\ldots+X_n)]=$$
$$E[X_1{}^2+X_1X_2+X_1X_3+\ldots+X_1X_n+$$
$$X_2X_1+X_2{}^2+X_2X_3+\ldots+X_2X_n+$$
$$+$$
$$\ldots$$
$$+$$
$$X_nX_1+X_nX_2+\ldots+X_n{}^2]$$

בגלל האי-תלות של הסדרה $X_1,X_2,\ldots.$ אז גורמים מהסוג $E[X_iX_j]$ כאשר $i\neq j$ הם $E[X_i]E[X_j]$

ולכן סכום זה שווה ל –

$$E[X_1{}^2]+\ldots+E[X_n{}^2]+\sum_{i\neq j}E[X_i]E[X_j]$$

n המחוברים הראשונים בביטוי לעיל כולם שווים ל $E[X^2]$. שאר המחוברים גם הם שווים וכולם שווים ל $E[X]^2$. כמה כאלו יש? $\binom{n}{2}2=n(n-1)$.

אם כך קיבלנו:

$$E[(\sum_{k=1}^{N}X_k)^2\mid N=n]=nE[X^2]+n(n-1)E[X]^2=nE[X^2]+n^2E[X]^2-nE[X]^2$$

ולכן

$$E[S^2]=E[E[(\sum_{k=1}^{N}X_k)^2\mid N=n]]=E[NE[X^2]+N^2E[X]^2-NE[X]^2]=$$
$$E[N]E[X^2]+E[N^2]E[X]^2-E[N]E[X]^2=E[N]Var(X)+E[N^2]E[X]^2$$

ולכן

$$Var(S)=E[S^2]-E[N]^2E[X]^2=E[N]Var(X)+E[N^2]E[X]^2-E[N]^2E[X]^2=$$
$$E[N]Var(X)+Var(N)E[X]^2$$

נחשב את חוק ההתפלגות של סכום אקראי:

נניח שוב כי $S=X_1+...+X_N$ כאשר פונקציות יוצרות המומנטים של X ושל N נתונות: $M_X(.),M_N(.)$.

נחשב את הפונקציה יוצרת מומנטים של S:

$$M_S(t)=Ee^{t\sum_{k=1}^{N}X_k}=E[E[e^{t\sum_{k=1}^{N}X_k}\mid N=n]]$$

אבל $E[e^{t\sum_{k=1}^{N}X_k}\mid N=n]=Ee^{t\sum_{k=1}^{n}X_k}=\prod_{k=1}^{n}Ee^{tX_k}=(M_X(t))^n$

ולכן $M_S(t)=E[(M_X(t))^N]=E[e^{N\log(M_X(t))}]=M_N(\log(M_X(t))$

ניתוח זמן הריצה הממוצע של אלגוריתם quick sort:

אלגוריתם מיון הוא אלגוריתם אשר מקבל מדגם מקרי $x_1,...,x_n$ ופולט את סטטיסטי הסדר $x_{(1)},...,x_{(n)}$.

במילים אחרות האלגוריתם ממין את הסדרה $x_1,...,x_n$.

ישנם אלגוריתמים רבים אשר יכולים לבצע פעולה זאת (ייתכן ובקורס שפת C או מבוא למדעי המחשב פגשתם מספר אלגוריתמים כאלו). אחד האלגוריתמים הפופולאריים והשימושיים ביותר הוא quick sort.

האלגוריתם מוגדר באופן הבא (נניח כאן כי ערכי המדגם הינם שונים זה מזה):

כאשר n=1 אין מה למיין.

כאשר n=2 האלגוריתם ממין את שתי הערכים באופן טריוויאלי (ממקם את הקטן לפני הגדול).

כאשר n>2 האלגוריתם פועל כך: באקראי (אחיד בדיד) האלגוריתם בוחר אחד מ – n הערכים (נאמר x_i).

ומשווה את כל אחד מה n-1 ערכים ל x_i. נסמן ב S_i את קבוצת הערכים הקטנים מ - x_i וב $\overline{S_i}$ את קבוצת הערכים הגדולים מ x_i. לאחר מכן האלגוריתם חוזר באופן רקורסיבי על הפעולה אשר תוארה לעיל על S_i ועל $\overline{S_i}$ כאילו ואלו היו הקלטים.

הרצת דוגמא:

$X=(10,5,8,2,1,4,7)$

תחילה נבחר אחד מערכים אלו באקראי (לכל ערך יש הסתברות של 1/7 להיבחר).

נניח כי נבחר 4.

עכשיו האלגוריתם משווה את 4 לכל אחד מהערכים האחרים ומקבלים.

$S_i = (2,1)$

$\overline{S}_i = (10,5,8,7)$

כעת יש לחזור על האלגוריתם על S_i ועל $\overline{S}_i$.

על S_i: בגלל ש n=2 המיון הוא פשוט ומקבלים (1,2).

על $\overline{S}_i$: נבחר באקראי ערך, נאמר כי נבחר 7, אזי מקבלים

$S'_i = (5)$

$\overline{S'}_i = (8,10)$

כעת יש לחזור על האלגוריתם על S'_i ועל $\overline{S'}_i$.

על S'_i אין מה למיין.

על $\overline{S'}_i$ המיון הוא שוב טריוויאלי (n=2) וגם כאן הערכים כבר ממוינים.

סך הכול קבלנו:

$$(\tilde{S}_i, 4, (\tilde{S}'_i, 7, \tilde{\overline{S}}'_i)) =$$

$$((1,2), 4, ((5), 7, (8,10)))$$

(כאשר הסימון ~ מתאר קבוצה בגודל 2 או 1 אשר מוינה באופן טריוויאלי).
הסוגריים מתארים את הקריאות הרקורסיביות אשר האלגוריתם ביצע. וכאשר מורידים את הסוגריים אז מקבלים את הסדרה הממוינת.

כאשר דנים ביעילות של אלגוריתמי מיון אז נהוג לדון במספר ההשוואות אשר האלגוריתם נדרש לבצע. לרוב נהוג לתאר מספר זה כפונקציה של גודל המדגם (n) (ומחפשים אלגוריתמים אשר בהם מספר ההשוואות לא גדל יותר מדי מהר כאשר n גדל).

כאן ננתח את תוחלת מספר ההשוואות אשר quick sort מבצע. נסמן את ערך זה ב M_n.
נגדיר את $M_{n|j}$ להיות תוחלת מספר ההשוואות על קלט בגודל n כאשר נתון כי הערך אשר נבחר הוא ה j הכי קטן. (j=1,…,n).
ברור כי $M_{n|j} = (n-1+M_{j-1}+M_{n-j})$ (כאשר $M_0 = 0$) וזאת כי יש לבצע n-1 השוואת בין הערך הנבחר לשאר הערכים ולאחר מכן לחזור על הפעולה על הקבוצה S_i ובה j-1 ערכים ועל הקבוצה $\overline{S}_i$ ובה n-j ערכים.
עכשיו, בגלל שהערכים נבחרים על פי התפלגות אחידה בדידה אזי בהנחה שהקלט הוא אקראי לחלוטין, קל לראות כי ההסתברות שהערך הנבחר הוא ה j הכי קטן היא $\frac{1}{n}$. מכאן:

$$M_n = \sum_{j=1}^{n} M_{n|j}\frac{1}{n} = \sum_{j=1}^{n}(n-1+M_{j-1}+M_{n-j})\frac{1}{n} =$$

$$n-1+\frac{1}{n}((M_0+M_{n-1})+(M_1+M_{n-2})+\ldots+(M_{n-2}+M_1)+(M_{n-1}+M_0)) =$$

$$n-1+\frac{1}{n}2\sum_{k=1}^{n-1}M_k$$

מכאן:

$$nM_n = n(n-1) + 2\sum_{k=1}^{n-1} M_k$$

או עבור n+1:

$$(n+1)M_{n+1} = (n+1)n + 2\sum_{k=1}^{n} M_k$$

נחסיר את שתי המשוואות לקבל:

$$(n+1)M_{n+1} - nM_n = 2n + 2M_n$$

או:

$$(n+1)M_{n+1} = 2n + (2+n)M_n$$

ולכן:

$$\frac{M_{n+1}}{n+2} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)} + \frac{M_n}{n+1}$$

עכשיו קבלנו ביטוי עבור $\frac{M_{n+1}}{n+2}$ אשר מורכב מאותו ערך עבור n יותר קטן ב-1 ותוספת ולכן ניתן לבצע הצבות חוזרות:

$$\frac{M_{n+1}}{n+2} = \frac{2n}{(n+2)(n+1)} + \frac{M_n}{n+1} =$$

$$\frac{2n}{(n+2)(n+1)} + \frac{2(n-1)}{(n-1+2)(n-1+1)} + \frac{M_{n-1}}{n-1+1} =$$

$$\ldots$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2(n-k)}{(n+2-k)(n+1-k)} + \frac{M_1}{1}$$

ולכן (ע"י ארגון מחדש והעובדה ש $M_1 = 0$):

$$M_{n+1} = 2(n+2)\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(i+1)(i+2)}$$

ניתן להראות כי גודל זה שווה בקירוב ל $2(n+2)\log_2(n+2)$.

(ולכן אומרים כי מספר ההשוואות של quick sort על קלט בגודל n הוא בממוצע מסדר גודל של $n\log n$).

פרק א-5: תהליכי ברנולי – I.

נחשוב על ניסוי ובו $\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, ...), \omega_i = 1,0\}$. ז"א מרחב המדגם הוא אוסף כל הסדרות הבינאריות האינסופיות (ניתן גם לחשוב על 1 כהצלחה ו על 0 ככישלון ואז מרחב המדגם שקול לאוסף כל סדרות התלות המטבע האינסופיות). נאמר שמידת ההסתברות P, היא כזאת הנותנת הסתברות $p \in [0,1]$ לכל מאורע $A_i \in \Sigma$ מהסוג $A_i = \{\omega_i = 1\}$ ו-q=1-p עבור המאורע המשלים.

נגדיר משתנים מקריים .... $X_1, X_2, ...$ כך ש $X_i(\omega) = I_{A_i}(\omega)$. ז"א $P(X_i = 1) = EX_i = p$. אלו הם כמובן משתנים מקריים ברנולי .i.i.d.

משלב זה והלאה כבר לא נדון ב Ω, Σ אלה רק נדון בתהליך ברנולי .i.i.d ובתהליכים אשר יגזרו ממנו.

<u>הגדרה:</u>
תהליך ברנולי .i.i.d: הוא אוסף משתנים מקריים .i.i.d ברנולי אם פרמטר p. נסמן ב $\{X_n, n = 1,2,...\}$ או ב $\{X_n, n \geq 1\}$.

באמצעות תהליך זה ניתן למדל תופעות רבות לדוגמא סיביות (bits) אשר מגיעות ממקור לא ידוע (דיסק, אינטרנט, תקשורת סלולארית) וזאת במידה וערך כל סיבית אינו תלוי בסיבית הקודמת או ההבאה.

ברור כי:
$$EX_n = p$$

קל לראות גם כי:
$$Var(X_n) = pq$$

בנוסף קל לראות כי השונות של X_n היא מקסימאלית עבור פרמטר $p = \frac{1}{2}$

$$\frac{d}{dp} p(1-p) = \frac{d}{dp}(p - p^2) = 1 - 2p = 0$$
$$p^* = \frac{1}{2}$$
$$\frac{d^2}{dp^2}(p - p^2) = \frac{d}{dp}(1 - 2p) = -2 < 0$$

תהליך זה אינו כל כך מעניין בשל עצמו, הרי הוא בסך הכול סדרת .i.i.d אבל כעת נבנה ממנו תהליכים נוספים בעלי מבנה וקשרים בין הערכים של התהליך קצת יותר מורכב.

<u>תהליך ספירה ברנולי (תהליך בינומי):</u>

נבנה כעת את התהליך הבא:

$$N_n = \begin{cases} 0 & n=0 \\ X_1+...+X_n & n=1,2,.. \end{cases}$$

או:

$$N_0 = 0$$
$$N_n = N_{n-1} + X_n, n \ge 1$$

זהו **תהליך ספירה ברנולי** (נקרא גם תהליך בינומי). הוא סופר את מספר ההצלחות אשר אירעו עד הזמן n.

מהו EN_n?

$EN_n = E[X_1+...+X_n] = EX_1+...+EX_n = np$.

מהו $Var(N_n)$?

$Var(N_n) = Var(X_1+...+X_n) = Var(X_1)+...+Var(X_n) = npq$.

הערה: עבור כל $\omega \in \Omega$ קיימת ריאליזציה של X ולכן קיימת ריאליזציה של N. התוחלת והשונות של תהליכים אלו (ושל כל תהליך סטוכסטי) הם כבר פונקציות דטרמיניסטיות של n. רואים כי שתיהן עולות ליניארית ב-n.

אז עכשיו כשידוע לנו התוחלת והשונות של N_n. נעבור לחישוב ההתפלגות של N_n עבור כל n.

ממבוא להסתברות אנו בעצם יודעים כי זוהי התפלגות בינומית עם פרמטרים n ו p:

$P_{N_n}(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ (עבור k=0,1,…,n).

ההסבר הפשוט ביותר לנוסחה זו הוא: עבור המאורע אשר מתאר כי היו k הצלחות מתוך n ניסויים $\{N_n = k\}$, דרוש איחוד של $\binom{n}{k}$ מאורעות זרים, A_i (כל אחד מהם מתאר בחירה שונה של המאורעות המצליחים). וההסתברות של כל אחד מהמאורעות הזרים הללו (A_i) הינה $p^k q^{n-k}$ וזה בגלל אי תלות של המאורעות הבסיסיים יותר (הברנוליים $\{X_j = 1\}$ או $\{X_j = 0\}$) המרכיבים כל מאורע כזה.

הערה: קיבלנו כאן את ההתפלגות של ערך התהליך עבור כל $n \in \mathbb{N}$ נתון. לעיתים התפלגות זאת נקראת **ההתפלגות השולית של** התהליך בזמן n. בהמשך הקורס, זה יהיה הגודל אשר לרוב יעניין אותנו עבר רוב התהליכים הסטוכסטיים אשר ננתח. ז"א, נציג תהליך סטוכסטי כלשהו וננסה להגיע להתפלגות השולית שלו עבור כל זמן (n או t) נתון. לפעמים גם נתעניין בהתפלגות זו כאשר $n \to \infty$, אבל לא כך המצב עם תהליך ספירה ברנולי כי כאן $P(\lim_{n\to\infty} N_n = \infty) = 1$ ולכן אין משמעות להתפלגות של N_n כאשר n הוא ∞.

כעת נגיע לתוצאה זו (התפלגות הבינומית) בדרך קצת שונה מהרגיל. ראשית נבחין כי:

א) $P_{N_{n+1}}(k) = pP_{N_n}(k-1) + qP_{N_n}(k)$ כי הרי:

$$P(N_{n+1}=k \mid X_{n+1}=0)=P(N_n=k)=P_{N_n}(k)$$
$$P(N_{n+1}=k \mid X_{n+1}=1)=P(N_n=k-1)=P_{N_n}(k-1)$$

ולכן:

$$P_{N_{n+1}}(k)=P(N_{n+1}=k)=$$
$$P(N_{n+1}=k \mid X_{n+1}=1)P(X_{n+1}=1)+P(N_{n+1}=k \mid X_{n+1}=0)P(X_{n+1}=0)=$$
$$P_{N_n}(k-1)p+P_{N_n}(k)q$$

ב) $P_{N_0}(0)=1$ - על פי הגדרה.

א' ו ב' מהווים יוצרים נוסחה רקורסיבית לחישוב $P_{N_n}(k)$:

$$P_{N_1}(0)=pP_{N_0}(-1)+qP_{N_0}(0)=q$$
$$P_{N_1}(1)=pP_{N_0}(0)+qP_{N_0}(1)=p$$

ז"א $P_{N_1}(k)=\binom{1}{k}p^k q^{1-k}$

ובהמשך לזאת:

$$P_{N_2}(0)=pP_{N_1}(-1)+qP_{N_1}(0)=q^2$$
$$P_{N_2}(1)=pP_{N_1}(0)+qP_{N_1}(1)=2pq$$
$$P_{N_2}(2)=pP_{N_1}(1)+qP_{N_1}(2)=p^2$$

ז"א $P_{N_2}(k)=\binom{2}{k}p^k q^{2-k}$

ובהמשך לזאת:

$$P_{N_3}(0)=pP_{N_2}(-1)+qP_{N_2}(0)=q^3$$
$$P_{N_3}(1)=pP_{N_2}(0)+qP_{N_2}(1)=3pq^2$$
$$P_{N_3}(2)=pP_{N_2}(1)+qP_{N_2}(2)=3pq^2$$
$$P_{N_3}(3)=pP_{N_2}(2)+qP_{N_2}(3)=p^3$$

ז"א $P_{N_3}(k)=\binom{3}{k}p^3 q^{3-k}$

מסתמן כאן חישוב הדומה לחישוב משולש פסקל רק שחישוב זה לא רק מכיל את המקדמים הבינומיים (כמו במשולש פסקל) אלה בנוסף גורר איתו את ההסתברויות p,q.

הסבר:

נזכר במשולש פסקל:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\cdots$
$n=0$	1	0	0	0	0	$\cdots$
$n=1$	1	1	0	0	0	$\cdots$
$n=2$	1	2	1	0	0	$\cdots$
$n=3$	1	3	3	1	0	$\cdots$
$n=4$	1	4	6	4	1	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

האיברים בטבלה הם $\binom{n}{k}$.

הטבלה מאותחלת עם
$$\binom{0}{0}=1$$
$$\binom{0}{k}=0, k\neq 0$$

לאחר מכן הערכים מחושבים באופן רקורסיבי ע"י $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$ וכך כל איבר הוא הסכום של האיבר שמעליו והאיבר שמעליו ומשמאלו (מניחים עוד עמודת אפסים עבור $k=-1$).

באופן דומה הנוסחה הרקורסיבית אשר כתבנו עבור $P_{N_n}(k)$ נותנת את הטבלה הבאה:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$\cdots$
$n=0$	1	0	0	0	0	$\cdots$
$n=1$	$1q$	$1p$	0	0	0	$\cdots$
$n=2$	$1q^2$	$2pq$	$1p^2$	0	0	$\cdots$
$n=3$	$1q^3$	$3pq^2$	$3p^2q$	$1p^3$	0	$\cdots$
$n=4$	$1q^3$	$4pq^3$	$6p^2q^2$	$4p^3q$	$1p^4$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

כאן, כל איבר הוא q כפול האיבר שמעליו ו-p כפול האיבר שמעליו ומשמאל.

קל כך להוכיח באינדוקציה את הנוסחה עבור $P_{N_n}(k)$.

<u>אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים:</u>

נסתכל עכשיו על ההפרש $N_{n+m}-N_n$ נכנה משתנה מקרי זה **האינקרימנט** (תוספת) של התהליך. משתנה מקרי זה הוא למעשה הסכום $X_{n+1}+X_{n+2}+...+X_{n+m}$ ברור כי הסכום הנ"ל זהה בהתפלגותו לסכום $X_1+X_2+...+X_m$ שזהו בעצם N_m. ולכן $N_{n+m}-N_n \sim Bin(m,p)$.

אם כך, אנו רואים כי התפלגות האינקרימנט $N_{n+m}-N_n$ אינה תלויה ב n, (היא זהה לדוגמא להתפלגות $N_{l+m}-N_m$ עבור $l \neq n$). תכונה זו של התפלגות האינקרימנטים של התהליך נקראת **אינקרימנטים סטציונרים**. פילוג האינקרימנט הוא סטציונרי (אינו משתנה) בזמן (ב – n). להלן ההגדרה המדויקת.

הגדרה:
תהליך $\{Z_n, n \geq 0\}$ הוא בעל **אינקרימנטים סטציונרים** אם:
$Z_{k+m}-Z_k \sim Z_{l+m}-Z_l$ לכל $k,l,m \in \mathbb{N}$.

נסתכל עכשיו על תכונה נוספת של תהליך ספירה ברנולי:
עבור כל סדרה של זמנים, $n_0=0<n_1<n_2<...<n_j$ המשתנים המקריים (האינקרימנטים):

$$N_{n_1}-N_{n_0},$$
$$N_{n_2}-N_{n_1},$$
$$...$$
$$N_{n_j}-N_{n_{j-1}}$$

הינם בלתי תלויים. הרי כל אינקרימנט הוא על פרק זמן זר ולכן כל אינקרימנט הוא סכום של משתנים מקריים ברנוליים שונים ובלתי תלויים זה בזה. תכונה זו של התהליך נקראת תכונת **אינקרימנטים בלתי תלויים**. להלן ההגדרה המפורטת:

הגדרה:
תהליך $\{Z_n, n \geq 0\}$ הוא בעל **אינקרימנטים בלתי תלויים** אם:
עבור כל סדרת זמנים $n_0=0<n_1<n_2<...$ מתקיים $Z_{n_i}-Z_{n_{i-1}}$ בלתי תלוי ב $Z_{n_j}-Z_{n_{j-1}}$ עבור כל $i,j \in \mathbb{N}, i \neq j$.

קבלנו אם כך כי האינקרימנטים של תהליך ספירה ברנולי הינם **אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים**.
תכונה זו היא חשובה ביותר והיא תופיע במספר תהליכים נוספים אשר נחקור, בעיקר בתהליכי פואסון.

באמצעות תכונת האינקרימנטים הבלתי תלויים ניתן לחשב
חישוב הסתברות משותפת של $N_{n_1}, N_{n_2}, ...$:

דוגמא:
מהי $P(N_5=3, N_9=6, N_{13}=7)$?

$$P(N_5=3, N_9=6, N_{13}=7)=P(N_5=3, N_9-N_5=3, N_{13}-N_9=1)$$

ולפי אינקרימנטים בלתי תלויים:

$$=P(N_5=3)P(N_9-N_5=3)P(N_{13}-N_9=1)=$$

ולפי אינקרימנטים סטציונרים:

$$= P(N_5=3)P(N_{4+5}-N_5=3)P(N_{9+4}-N_9=1)$$
$$= P(N_5=3)P(N_4-N_0=3)P(N_4-N_0=1)$$
$$= P(N_5=3)P(N_4=3)P(N_4=1)$$
$$= \binom{5}{3}p^3q^2\binom{4}{3}p^3q^1\binom{4}{1}p^1q^3$$

ניתן להשתמש גם בתכונות של אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים לחישוב תוחלות של מכפלות (כזכור תוחלת של מכפלה של שתי משתנים מקריים אינה תמיד שווה מכפלת התוחלות, (תנאי מספיק לכך הוא אי-תלות בין המשתנים המקריים).

דוגמא:

נרצה לחשב את $E[N_3N_5]$, לצערנו N_3 אינו בלתי תלוי ב N_5 ולכן **<u>לא</u>** ניתן להסיק כי:

$$E[N_3N_5]=EN_3EN_5=3p5p=15p^2 \text{ !!!}$$

אבל ע"י ייצוג של N_5 כסכום של N_3 והאינקרימנט, נצליח לחשב את תוחלת המכפלה:

$$E[N_3N_5]=E[N_3(N_5-N_3+N_3)]=E[(N_3(N_5-N_3)+N_3{}^2]=EN_3(N_5-N_3)+EN_3{}^2$$

עכשיו נשתמש באינקרימנטים בלתי תלויים:

$$=EN_3E(N_5-N_3)+EN_3{}^2$$

ועכשיו נשתמש באינקרימנטים סטציונרים:

$$=EN_3EN_2+EN_3{}^2$$

מכאן הכול קל, רק צריך להיזכר כי המומנט השני הוא השונות בתוספת המומנט הראשון בריבוע:

$$=3p2p+(3pq+(3p)^2)=15p^2+3pq$$

<u>תכונות נוספות של תהליך ספירה ברנולי:</u>

נסתכל על הסתברויות מותנות בין ערכים של התהליך בזמנים שונים. נתחיל מדוגמא. נניח כי ידוע כי בזמן 10 ערך התהליך היה 6, מעניין מהי ההסתברות שערך התהליך בזמן 15 יהיה 8. ננסח בעיה זו באמצעות הסתברות מותנית ונשתמש בתכונת אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים:

$$P(N_{15}=8\mid N_{10}=6)=\frac{P(N_{15}=8,N_{10}=6)}{P(N_{10}=6)}=\frac{P(N_{10}=6,N_{15}-N_{10}=2)}{P(N_{10}=6)}=\frac{P(N_{10}=6)P(N_{15}-N_{10}=2)}{P(N_{10}=6)}=$$
$$P(N_{15}-N_{10}=2)=P(N_5=2)$$

באופן כללי חזרה על אותו חישוב תיתן:

$P(N_m=l\mid N_n=k)=\begin{cases}P_{m-n}(l-k) & k\le l\\ 0 & l<k\end{cases}$ עבור $n\le m$.

כעת נהפוך את היחס בין m ל n. נניח כי ידוע כי שבזמן 15 ערך התהליך הוא 8. ז"א ידוע ששמונה מתוך המשתנים המקריים $X_1,\ldots,X_{15}$ הם 1 (והשאר 0). לאור ידיעה זו נתעניין בהסתברות שבזמן 10 ערך התהליך הוא 6. זו בעצם השאלה: מה ההסתברות שמתוך ה -8 הצלחות, 6 נפלו במשתנים $X_1,\ldots,X_{10}$ ושתיים נפלו במשתנים $X_{11},\ldots,X_{15}$:

$$P(N_{10}=6\mid N_{15}=8)=\frac{P(N_{15}=8,N_{10}=6)}{P(N_{15}=8)}=\frac{P(N_{10}=6,N_{15}-N_{10}=2)}{P(N_{15}=8)}=\frac{P(N_{10}=6)P(N_{15}-N_{10}=2)}{P(N_{15}=8)}=$$

$$\frac{P(N_{10}=6)P(N_5=2)}{P(N_{15}=8)}=\frac{\binom{10}{6}p^6q^{10-6}\binom{5}{2}p^2q^{5-2}}{\binom{15}{8}p^8q^{15-8}}=\frac{\binom{10}{6}\binom{5}{2}}{\binom{15}{8}}$$

נראה מוכר? אכן כן, זהו ערך מתוך ההתפלגות ההיפר-גיאומטרית: דגימה של 8 דגמים ללא החזרה מתוך אוכלוסיה בגודל 15, כאשר 10 מתוך ה – 15 הם מסוג מסוים (ו 5 הם מהסוג השני) ומחושבת ההסתברות שבדיוק 6 (מתוך 8) הדגימות יהיו מהסוג המסוים.

ניתן באופן כללי לרשום את $P(N_m=l\mid N_n=k)$ עבור $m<n$ כהסתברות מתוך התפלגות היפר-גיאומטרית אבל לא נעשה זאת כאן.

פרק א-5: תהליכי ברנולי – II.

בפרק הקודם הכרנו את התהליך $\{X_n, n \geq 1\}$, תהליך הברנולי .i.i.d ואת התהליך הנבנה ממנו $\{N_n, n \geq 0\}$, תהליך הספירה הבינומי. בפרק זה נגדיר תהליך נוסף הנבנה מ $\{X_n, n \geq 1\}$ והוא $\{T_k, k \geq 0\}$ והוא תהליך זמני ההצלחה (יקרא גם תהליך בינומי שלילי).

נניח כי נתונה ריאליזציה של תהליך ברנולי .i.i.d. להלן דוגמא לתחילת סדרה כזאת:
$\{X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, X_7, X_8, X_9, ...\} = \{1, 0, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1, ...\}$.
נסמן ב T_k את זמן ההצלחה ה- k. אם כך:

$$T_1 = 1,$$
$$T_2 = 4,$$
$$T_3 = 5,$$
$$T_4 = 7,$$
$$T_5 = 9, ...$$

בנוסף, ולמען הנוחות בהמשך נסמן $T_0 = 0$.

הערה: זוהי סדרת משתנים מקריים עולה ממש.

לתהליך זה נקרה **תהליך זמני ההצלחה ברנולי**, נסמנו $\{T_k, k \geq 0\}$.

הערה: עבור רוב התהליכים הסטוכסטיים אשר נפגוש בקורס זה, מרחב הפרמטר הוא בעל משמעות של זמן. לעומת זאת, בתהליך זה מרחב הפרמטר אינו מסמל זמן במובן הישיר אלה מסמן את האינדקס של ההצלחה.

ראינו בדוגמא כיצד $\{T_k, k \geq 0\}$ נבנה מ $\{X_n, n \geq 1\}$. כעת נכתוב זאת במפורש:
$T_k = \min\{n \in \mathbb{N} \mid k \leq X_1 + ... + X_n\}$ עבור $1 \leq k$ ו $T_0 = 0$. ז"א עבור k נתון (מספר הצלחה נתון), ערך התהליך הוא מספר הניסיונות הדרוש לצורך קבלת k הצלחות.

לדוגמא, עבור הריאליזציה אשר צוינה לעיל נסתכל על T_3:
$T_3 = \min\{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq X_1 + ... + X_n\}$. עכשיו, הקבוצה $\{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq X_1 + ... + X_n\}$ היא תת קבוצה של המספרים הטבעיים המקיימת את התנאי: $3 \leq X_1 + ... + X_n$ עבור כל איבר n בקבוצה. מהי אם כך הקבוצה הזאת עבור הריאליזציה הנתונה לעיל?
$\{n \in \mathbb{N} \mid 3 \leq X_1 + ... + X_n\} = \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, ...\}$ והערך המינימאלי של קבוצה זו הוא 5 ולכן
$T_3 = 5$.

מהו חוק ההסתברות של T_k? בהמשך נפתח חוק זה בדרך אלטרנטיבית אבל ראשית ניזכר בסיפורים אשר הובילו לבניית ההתפלגות הבינומית השלילית (בקורס מבוא להסתברות):

נתונה סדרה של ניסויי ברנולי .i.i.d, כמה ניסיונות דרושים לצורך קבלת k הצלחות? ערך זה הוא הרי בדיוק T_k. ז"א $T_k \sim NB(k,p)$. ניזכר כעת בפונקצית מסת ההסתברות של משתנים מקריים בינומיים שליליים.
נסתכל על המאורע $\{T_k = n\}$, ברור שעבור $n < k$ ההסתברות של מאורע זה היא 0, הרי לא ניתן לקבל k הצלחות ע"י פחות מ-k ניסיונות. אזי נניח כי $k \le n$. מאחורי מאורע זה, מסתתרת סדרת ברנולי .i.i.d המקיימת $X_n = 1$. והערכים של $X_1,...,X_{n-1}$ הינם או 0 או 1 כך ש n-1 מהערכים הינם אחדים. כי הרי הניסוי האחרון (הניסוי ה-n) חייב להיות הצלחה בשביל שהמאורע $\{T_k = n\}$ יתקיים והניסויים שקדמו לו יכולים להיות או הצלחה או כשלון כל עוד ישנם k-1 הצלחות ביניהם. אם כך ישנן $\binom{n-1}{k-1}$ אפשרויות לבחירת הניסויים המצליחים והנכשלים. עבור כל אפשרות כזאת, הסיכוי שבאמת יהיו הצלחות וכישלונות בהתאמה הוא $p^{k-1}(1-p)^{n-1-(k-1)} = p^{k-1}(1-p)^{n-k}$. ואת כל זה עלינו להכפיל בסיכוי שהניסוי האחרון הוא הצלחה (p) ולכן מקבלים:

$$P(T_k = n) = p(\binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}.$$

כזכור, משתנה מקרי גיאומטרי הוא מקרה פרטי של בינומי שלילי $Geom(p) = NB(1,p)$ ואם כך אנו יודעים כי $T_1 \sim Geom(p)$.

הקשר בין תהליך ברנולי .i.i.d, ספירה ברנולי ותהליך זמני ההצלחה ברנולי:

עד כה פגשנו שלושה תהליכים סטוכסטיים אשר מתבססים על אותו מרחב הסתברות: $\{X_n, n \ge 1\}$, $\{N_n, n \ge 0\}$, $\{T_k, k \ge 0\}$. ראינו בפרק הקודם כיצד לבנות את $\{N_n, n \ge 0\}$ בהינתן $\{X_n, n \ge 1\}$ וראינו בפרק זה כיצד לבנות את $\{T_k, k \ge 0\}$ בהינתן $\{X_n, n \ge 1\}$.
קל לראות כי הבניות הנ"ל הינן דו-כיווניות, ז"א ניתן לשחזר את תהליך הברנולי .i.i.d ($\{X_n, n \ge 1\}$) מתוך $\{N_n, n \ge 0\}$ או מתוך $\{T_k, k \ge 0\}$.
שחזור $\{X_n, n \ge 1\}$ מתוך $\{N_n, n \ge 0\}$: $X_n = N_n - N_{n-1}$.
שחזור $\{X_n, n \ge 1\}$ מתוך $\{T_k, k \ge 0\}$: $X_n = 1_{\{T_k, k \ge 1\}}(n)$. כי הרי אם $n \in \{T_k, k \ge 0\}$ אזי בזמן n ישנה הצלחה ברנולית ולכן n משתייכת לתהליך זמני ההצלחה ופו' האינדיקאטור תיתן 1. ואם $n \notin \{T_k, k \ge 0\}$ אז בזמן n אין אף הצלחה (לא הראשונה, ולא השנייה ולא השלישית,....) ופו' האינדיקאטור תיתן 0.

אם כך בהינתן כל אחת משלושת הסדרות, ניתן לקבל את השתיים האחרות.

ניתן גם לקשר ישירות בין מאורעות המתוארים על פי התהליך $\{N_n, n \ge 0\}$ למאורעות המתוארים על פי התהליך $\{T_k, k \ge 0\}$, להלן הקשר:
נניח כי מתקיים $k \le N_n$, ז"א עד זמן n היו לפחות k הצלחות ברנולי (מאורע זה כמובן יכול להתקיים אך ורק אם $k \le n$). אם כך יתקיים כי ההצלחה ה-k הייתה לכל היותר בזמן n: $T_k \le n$. קבלנו אם כך את יחס הגרירה הבאה, בין מאורעות: $\{k \le N_n\} \Rightarrow \{T_k \le n\}$.
באופן דומה אם מתקיים $T_k \le n$, ז"א ההצלחה ה-k הייתה לכל היותר בזמן n, אזי יתקיים כי בזמן n היו לפחות k הצלחות: $k \le N_n$. אם כך קבלנו: $\{T_k \le n\} \Rightarrow \{k \le N_n\}$.
יש כאן אם כך גרירה דו-כיוונית ולכן שקילות בין המאורעות: $\{T_k \le n\} \Leftrightarrow \{k \le N_n\}$.

קשר זה בין מאורעות מקנה להתפלגות הבינומית השלילית את שמה:

$$F_{T_k}(n) = P(T_k \le n) = P(k \le N_n) = \sum_{i=k}^{n} P(N_n = i) = \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} = \overline{F}_{N_n}(k+1)$$

אם כך פו' ההתפלגות המצטברת של משתנה מקרי בינומי שלילי עם פרמטרים p,k בנקודה n היא פו' השרידות של משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים n,p בנקודה k+1 ומכאן ה"שליליות".

קשר נוסף בין מאורעות הוא הקשר הבא: $\{T_k = n\} = \{N_{n-1} = k-1, X_n = 1\}$. הרי במידה וזמן ההצלחה ה – k היה בדיוק n אזי עד זמן n-1 היו k-1 הצלחות ובזמן n הייתה הצלחה וכנ"ל בכוון ההפוך.

ברור כי X_n בלתי תלוי ב N_{n-1} ולכן:

$$P(T_k = n) = P(N_{n-1} = k-1, X_n = 1) = P(N_{n-1} = k-1)P(X_n = 1) =$$
$$= \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} q^{n-1-(k-1)} p = \binom{n-1}{k-1} p^k q^{n-k}$$

כפי שקבלנו קודם בדרך הישירה.

<u>אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים של תהליך זמני ההצלחה ברנולי:</u>

כעת נרצה לראות שגם התהליך $\{T_k, k \ge 0\}$ הוא בעל אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים. במקום להוכיח זאת באופן פרטני נראה תוצאה קצת יותר כללית:

<u>טענה:</u>

תהי $\{Y_n, 0 \le n\}$ סדרת משתנים מקריים .i.i.d ו- $\{Z_n, 0 \le n\}$ תהליך סטוכסטי כך ש:

$$Z_n = \begin{cases} 0 & n = 0 \\ Y_1 + ... + Y_n & n = 1,2,.. \end{cases}$$

אזי $\{Z_n, 0 \le n\}$ הוא בעל אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

הוכחת הטענה פשוטה וזהה להוכחת אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים של התהליך $\{N_n, 0 \le n\}$ כפי שהוכחנו בפרק הקודם.

אם כך, כל תהליך סטוכסטי אשר ניתן לרישום כסכום של משתנים .i.i.d. (תהליך כזה נקרא **הילוך אקראי כללי**) הוא בעל אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים. בנוסף דרוש כי $Z_1 = Y_1$ ולכן פילוג אינקרימנט על צעד בגודל 1 (Y_i) צריך להיות שווה לערך התהליך בזמן 1 (Z_1).

בכדי להראות כי התהליך $\{T_k, 0 \le k\}$ הוא בעל אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים, עלינו להראות כי T_k ניתן לכתיבה כסכום של k משתנים מקריים .i.i.d. קל לראות כי פילוג כל משתנה כזה יהיה Geom(p).

ברור גם כי סכום של k משתנים מקריים בעלי התפלגות Geom(p) מתפלג NB(k,p). בנוסף סכום של שתי משתנים מקריים בעלי התפלגות $NB(k_1, p)$ והתפלגות $NB(k_2, p)$ מתפלגים $NB(k_1 + k_2, p)$.

אז כעת אנו יודעים כי $T_{k+1} - T_k \sim Geom(p)$ ועכשיו קל לחשב את התוחלת והשונות של התהליך $\{T_k, 0 \le k\}$. (שוב הכוונה לתוחלת או שונות של תהליך היא הפו' הדטרמיניסטית המראה את התוחלת והשונות של ההתפלגויות השוליות של התהליך).

$$ET_k = E[T_0 + (T_1 - T_0) + ... + (T_k - T_{k-1})] = ET_0 + E[T_1 - T_0] + ... + E[T_k - T_{k-1}] =$$
$$= 0 + kE[T_1] = 0 + k\frac{1}{p} = \frac{k}{p}$$

לאחר שניזכר כי השונות של משתנה מקרי גיאומטרי היא $\frac{q}{p^2}$ באופן דומה נקבל כי $Var(T_k) = k\frac{q}{p^2}$

<u>דוגמא א-22:</u>
נניח כי עבור סדרת ניסויי ברנולי אנו משלמים מחיר c עבור כל הצלחה. (לדוגמא: אנו רוכבים על אופניים כל יום ובכל פעם שיש פנצ'ר החלפת פנימית עולה כ 20 ₪ ואנו קוראים לפנצ'ר הצלחה). אם כך, אנו יודעים כי לאחר n ניסיונות תוחלת העלות היא $EcN_n = cEN_n = cnp$.

מדד מעניין יותר לעלות היא העלות **הערך הנוכחי** של העלויות אשר נגררות מהצלחותינו. כלל ידוע בכלכלה הוא ששקל שיש לנו היום שווה מחר קצת יותר (צריך להכפיל ב 1 ועוד הריבית שאנו יכולים להרוויח על השקל). באופן דומה ניתן לומר כי $0 < \alpha < 1$ שקלים אשר בידינו היום שווים לשקל 1 מחר (כאשר $\alpha = 1/(1+r)$). אם כך α הוא מקדם ההיוון. ולכן מחיר של c אשר נידרש לשלם מחר הוא בעצם אינו כל כך גרוע היום הוא בסך הכול αc היום. ואם נידרש לשלם c בעוד 150 ימים אזי במונחי היום המחיר הוא $\alpha^{150}c$. כי אם היום יש לנו $\alpha^{150}c$ שקלים ואנו שומרים את אלו בבנק ומכפילים את הוננו בכל יום ב (1+r) אזי כעבור 150 ימים בידינו: $(1+r)^{150}\alpha^{150}c = (1+r)^{150}(\frac{1}{1+r})^{150}c = c$.

אם כך, תוחלת הערך הנוכחי מהעלויות הנגררות מהצלחותינו היא $E\sum_{k=1}^{\infty} c\alpha^{T_k}$ או $cE\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^{T_k}$ או $c\sum_{k=1}^{\infty}E\alpha^{T_k}$.

נבחין כי $E\alpha^{T_k}$ היא הפו' יוצרת ההסתברות של משתנה מקרי $NB(k,p)$, בנקודה α.
אם כך נחשב את $G_{T_k}(\alpha) = E\alpha^{T_k}$.

$$G_{T_k}(\alpha) = E\alpha^{T_k} = E\alpha^{T_0 + (T_1 - T_0) + (T_2 - T_1) + ... + (T_k - T_{k-1})} = E\alpha^{T_0}\alpha^{T_1 - T_0}\cdot ... \cdot \alpha^{T_k - T_{k-1}} =$$
$$= E\alpha^{T_0}E\alpha^{T_1 - T_0}\cdot ... \cdot E\alpha^{T_k - T_{k-1}} = E1\underbrace{E\alpha^{T_1}E\alpha^{T_1}\cdot ... \cdot E\alpha^{T_1}}_{k} = (E\alpha^{T_1})^k$$

עכשיו ידוע לנו כי $T_1 \sim Geom(p)$. ואם כך:

$$G_{T_1}(\alpha) = E\alpha^{T_1} = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i q^{i-1}p = p\alpha\sum_{i=1}^{\infty}(\alpha q)^{i-1} = p\alpha\sum_{i=0}^{\infty}(\alpha q)^i = p\alpha\frac{1}{1-\alpha q}$$

וזאת עבור $\alpha q < 1$ או $\alpha < \frac{1}{1-p}$.

ולכן $G_{T_k}(\alpha) = (\frac{p\alpha}{1-\alpha q})^k$

נותר כעת לחשב את $c\sum_{k=1}^{\infty}E\alpha^{T_k}$:

$$c\sum_{k=1}^{\infty}E\alpha^{T_k}=c\sum_{k=1}^{\infty}G_{T_k}(\alpha)=c\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p\alpha}{1-\alpha q}\right)^k=c\frac{\frac{p\alpha}{1-\alpha q}}{1-\frac{p\alpha}{1-\alpha q}}=c\frac{p\alpha}{1-\alpha q}\frac{1}{\frac{1-\alpha q-p\alpha}{1-\alpha q}}=c\frac{p\alpha}{1-\alpha(p+q)}=cp\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

נבחין כי כאשר $\alpha=1/(1+r)$ אז $\frac{1}{r}=\frac{\alpha}{1-\alpha}$

ואז תוחלת העלות המהוונת היא: $cp\frac{1}{r}$.

תיאור חלק ב:

חלק זה מציג שרשראות מרקוב בזמן בדיד. תחילה משפחה זו של תהליכים סטוכסטיים מוצגת ע"י הגדרה ולאחר מכן ע"י אוסף דוגמאות יישומיות. לאחר מכן מתבצעת אנליזה של תהליכים אלו, תחילה עבור ההתנהגות לטווח הזמן הקצר ע"י משוואות צ'פמן קולמוגורוב ומיון מצבים וחישובים נלווים, ולאחר מכן ע"י חישובים של הסתברויות גבוליות עבור שרשראות ארוגודיות. בחלק זה המונח של ארוגודיות של תהליך סטוכסטי מוגדר עבור שרשראות מרקוב ובנוסף משמש כמבוא למונח ארוגודיות עבור תהליכים סטוכסטיים כללים. לאחר מכן מוצג אופן החישוב של הסתברויות גבולות ומוצג המשמעות של ההתפלגות הגבולית ע"י מספר דוגמאות.

פרק ב-1: הגדרת שרשרת מרקוב (זמן בדיד).

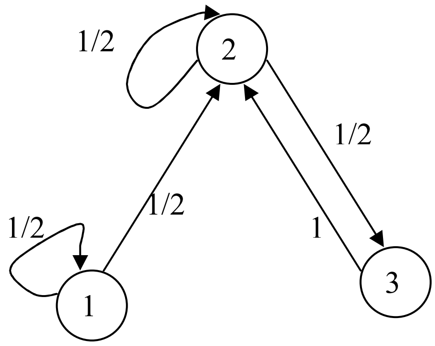
הגדרות עזר כלליות ודוגמא:

לפני שנגדיר במפורש מהי שרשרת מרקוב, נזכיר ונגדיר מספר מונחים חשובים לפרק זה:

1. קבוצה היא **סופית** אם קיים מספר $N \in \mathbb{N}$, כך שקיימת התאמה חד-חד ערכית בין הקבוצה לבין .{1,2,…,N}
2. קבוצה היא **בת-מנייה** אם קיימת התאמה חד-חד ערכית בין הקבוצה לבין המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$.
   להלן דוגמאות של מספר קבוצות בנות מנייה:
   a. $\mathbb{N}$
   b. $\mathbb{Z}$
   c. $\mathbb{Q}$
   d. הזוגיים.

   הערה: בהקשרים רבים נהוג להגדיר קבוצה בת-מנייה קבוצה שהיא או סופית או בת-מנייה כמוגדר לעיל.
3. **גרף מכוון ממושקל** הוא אוסף **צמתים** V (סופי או בן-מניה), אוסף **קשתות** E שהם זוגות סדורים מעל V (קבוצה חלקית ל VxV) ופונקצית משקל $P : E \to \mathbb{R}$.
   הערה: ביישומים שלנו ניתן להסתפק בטווח של הפונקציה להיות [0,1). ולכן כאן נגדיר גרף מכוון ממושקל להיות כזה שבו פונקצית המשקל היא מהסוג $P : E \to (0,1]$

   <u>דוגמא ב-0:</u>
   נסתכל על הגרף:
   V={1,2,3}
   E={(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(3,2)}
   P((1,1))=1/2
   P((1,2))=1/2
   P((2,3))=1/2
   P((2,2))=1/2
   P((3,2))=1
   ניתן לייצג גרפים מכוונים ממושקלים מהסוג המעניין אותנו בשלושה דרכים:
   a. ע"י איור של הצמתים והקשתות כולל המשקלות.
      עבור הדוגמא לעיל זה הייצוג:



b. ע"י מטריצה P סופית בעלת מימד $|V|\times|V|$ או אינסופית כאשר האיבר $P_{i,j}$ של המטריצה (בשורה ה i ובעמודה ה j) הוא P((i,j)) (המשקל של הקשת (i,j)) במידה ו $(i,j)\in E$ או 0 אחרת (במידה והקשת אינה קיימת ב E).
עבור הדוגמא לעיל זה הייצוג:

$$P=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c. פשוט ע"י פירוט של הפונקציה $P:E\to(0,1]$, כפי שמתבצע בדוגמא לעיל.

4. נקרא למטריצה P ממימד NxN, בעלת איברים $P_{i,j}$ (בשורה ה i ובעמודה ה j) **מטריצה סטוכסטית** אם סכום כל שורה הוא 1 (ז.א $\sum_{k=1}^{N} P_{i,k}=1$).
מטריצה זו למעשה מגדירה N התפלגויות בדידות (התפלגות עבור כל שורה).
5. באותו אופן כאשר המטריצה P היא אינסופית (אינסוף שורות ואינסוף עמודות), נאמר כי היא **מטריצה סטוכסטית** אם הטור של כל שורה הוא 1: (ז.א $\sum_{k=1}^{\infty} P_{i,k}=1$).

תיאור לא פורמאלי ומוטיבציה:

מהי שרשרת מרקוב?
נסתכל על הגרף בדוגמא לעיל, שרשרת מרקוב הוא תהליך סטוכסטי בזמן בדיד בעל מרחב מצבים V. ז"א שבכל נקודת זמן n=0,1,2..., התהליך נמצא בצומת מסוים בגרף. נסמן את התהליך ב $\{X_n, n\ge 0\}$. בכל נקודת זמן, n, ערך התהליך בזמן n+1 מוגרל מתוך קבוצת הצמתים שמהם ניתן לעבור מצומת X_n על פי פונקצית המשקל $P:E\to(0,1]$. נשים לב שהפו' אשר הגדרנו בדוגמא היא פונקצית מסת הסתברות.

ז"א, כאשר נמצאים בצומת 1, אז יש סיכוי של ½ להישאר בצומת זו גם בנקודת הזמן הבאה וסיכוי של ½ לעבור לצומת 2 (במקרה זה כבר לעולם לא נחזור לצומת 1). כאשר נמצאים בצומת 2, אז יש סיכוי של ½ להישאר בצומת 2 וסיכוי של ½ לעבור לצומת 3. וכאשר נמצאים בצומת 3 אז תמיד נעבור לצומת 2.

בנוסף דרוש גם להגדיר מהו ערך התהליך בזמן 0 (על איזה צומת נמצאים בזמן 0). ניתן להגדיר זאת גם ע"י התפלגות התחלתית כפי שנראה בהמשך.

הערה: לא כל גרף מגדיר שרשרת מרקוב, רק כזה אשר מקיים את התנאי הנ"ל עבור כל צומת: סכום כל המשקלות של הקשתות היוצאות מהצומת הוא 1. ז"א רק גרף אשר ייצוגו כמטריצה הוא מטריצה סטוכסטית. מעכשיו והלאה נהייה מעוניינים רק בגרפים כאלו.

קבלנו אם כך כי ריאליזציה של התהליך שקולה לטיול אקראי בגרף על פי פונקצית המשקל P.

מודל מהסוג שמוצג בדוגמא ב-0 יכול לדוגמא להתאים לסיפור הבא:

שלושה בחורים, נמספרם (1,2,3), משחקים את המשחק הבא עם כדורסל וסל:
כל אחד זורק כדורים לסל כל עוד לא החטיא, לאחר החטאה מוותר על תורו.

בחור מס' 1 – מקבל הזדמנות יחידה, ז"א לאחר שהחטיא נותן את הכדור לבחור 2 ולא משחק יותר. סיכוי הקליעה שלו הוא ½.
בחור מס' 2 – מעביר את הכדור לבחור מס' 3 לאחר שהחטיא, גם סיכויי הקליעה שלו הם ½.
בחור מס' 3 – מעביר את הכדור לבחור מס' 2 לאחר שהחטיא, אבל סיכויי הקליעה שלו הם 0, ז"א הוא תמיד זורק ומייד מעביר את הכדור.

במידה ובחור מס' 1 הוא זה אשר מתחיל לזרוק, אז הוא יזרוק מספר של זריקות המתפלג Geom(1/2) (בממוצע 2). לאחר מכן הכדור יהיה או אצל מס' 2 או אצל מס' 3 כך שכל פעם שהכדור מגיע למס' 2 אז הוא מבצע מספר Geom(1/2) של קליעות וכל פעם שהכדור אצל מס' 3 אז הוא מבצע קליטה בודדת.

בחלק זה של הקורס ננתח מודלים מסוג זה ונלמד כיצד ניתן לענות על שאלות מעניינות לגבי מודלים מהסוג שהוצג לעיל (גם כאלו בעלי מרחב מצבים (צמתים) רב יותר וסבוך יותר).

<u>הגדרה מדויקת והמשך דיון:</u>

<u>הגדרה:</u>
התהליך $\{X_n, n\geq 0\}$ הוא **שרשרת מרקוב** בעל **התפלגות התחלתית** P_{X_0} **ומטריצת מעבר סטוכסטית** P (סופית או אינסופית) אם מתקיים:

1. $P_{X_0}(i) = P(X_0 = i)$
2. $P_{i_n,i_{n+1}} = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0,\dots,X_n = i_n) = P(X_1 = i_{n+1} \mid X_0 = i_n)$

ראשית כפי שאמרנו מדובר בתהליך בזמן בדיד ובעל מרחב מצבים שהוא או סופי או בן-מניה. את מרחב המצבים הספציפי ניתן להגדיר לכל מקרה פרטי (התפלגות התחלתית ומטריצת מעבר) אבל חשוב להבין כי קיימת התאמה בין כל מרחב מצבים סופי שנגדיר לבין קבוצה סופית מהצורה $\{1,2,\dots,N\}$, ולכל מרחב מצבים בן-מנייה שנגדיר קיימת התאמה ל $\mathbb{N}$. ולכן מעכשיו הלאה נדון רק ב-2 מרחבי המצבים הללו. זאת אומרת שאם ברצוננו לדוגמה לעבוד עם מרחב המצבים שהוא כל המספרים השלמים ($\mathbb{Z}$) עדיין נסתפק בלדון בשרשראות אשר מרחב מצבם הוא $\mathbb{N}$.

שנית ההגדרה אומרת כי קיימת התפלגות התחלתית אשר קובעת את חוק ההסתברות של המשתנה X_0.
בהרבה מהדוגמאות והתכונות של שרשראות מרקוב אשר נדון בהם אין משמעות רבה להתפלגות ההתחלתית ולכן לא נדון בה. הרבה פעמים נניח כי התפלגות ההתחלתית היא מנוונת ע"י כך שנותנת מסת הסתברות 1 לערך כלשהו.

ועכשיו למהות ההגדרה (הדרישה השנייה): דרישה זו דורשת מההתפלגות של המשתנה של התהליך בזמן (n+1) להיות תלויה אך ורק במצב התהליך בזמן n. היא:
א) לא תלויה בערכי התהליך פרט לערך בזמן n – זוהי **התכונה המרקובית.** בכך המשמעות היא שעתיד התהליך אינו תלוי בעבר אלה רק בהווה.
ב) חוק ההסתברות אינו משתנה לאורך הזמן (**הומוגניות בזמן**).

ההגדרה של שרשרת מרקוב מסבירה מייד כיצד ניתן לסמל שרשרת מרקוב (ליצור ריאליזציה של שרשרת מרקוב). בשביל זה דרושה בסך הכול היכולת להגריל משתנים מקריים מההתפלגות P_{X_0} ומההתפלגויות המוגדרות בכל שורה במטריצת השרשרת.

פרק ב-2: דוגמאות.

פרק זה מכיל אוסף דוגמאות רב של שרשראות מרקוב. עבור כל דוגמא הסיפור של הדוגמא תחילה מתואר בקצרה, ולאחר מכן מרחב המצבים והסתברות המעבר מפורטות. בנוסף עבור כל דוגמא, שאלות הסתברותיות מוצגות. הרבה מדוגמאות אלה יהיו בשימוש בפרקים בהמשך.

ניתן לראות שמטריצה המעבר היא סטוכסטית (סכום/טור כל שורה הוא 1) עבור כל דוגמא.

דוגמא ב-1 – מזג אוויר:

סיפור: נניח כי באביב בישראל מזג האוויר מתנהג בצורה מרקובות וישנם שלושה מצבים:
1 – מעונן כבד.
2 – מעונן חלקי.
3 – שמיים נקיים.

כמובן שבהיבט של מזג האוויר על פי מרחב המצבים הדל אשר תואר לעיל, ההנחה המרקובית כנראה ואינה תואמת את המציאות. הרי סביר להניח כי מזג האוויר מחר אינו רק תלוי במזג האוויר היום אלה תלוי גם בימים הקודמים (תלות יחסית חזקה לפחות בשבוע האחרון).

מרחב המצבים: $\{1,2,3\}$, מתאר את מצב מזג האוויר.

הסתברות מעבר:

$$P=\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית 1: בהינתן שנמצאים במצב 1, מה ההסברות להיות במצב 3 בעוד 5 ימים?
שאלה הסתברותית 2: לאחר הרבה ימים, מה ההסתברות שהמצב היה 3?

הערה: ניתן ליצור מודל יותר מציאותי באופן הבא: נגדיר את מרחב המצבים להיות:

$$\{(1,1),(1,2),(1,3),$$
$$(2,1),(2,2),(2,3),$$
$$(3,1),(3,2),(3,3)\}$$

לקחנו את מרחב המצבים המקורי V ויצרנו מרחב מצבים חדש שהוא $V\times V$ (במידה ולא ברור כעת אז נדון בהמשך במשמעות המכפלה הקרטזית $\times$). עכשיו נגיד שכל מצב מהסוג (a,b) אומר כי היום מזג האוויר הוא b ואתמול היה a. מטריצת המעבר תהייה כמובן ממימד $3^2=9$.
נבחין כי בכל שורה, לכל היותר שלושה ערכים מתוך התשעה יהיו חיוביים ממש. זאת בגלל שמעבר ממצב (a,b) חייב להיות למעבר (b,c) כאשר $c\in\{1,2,3\}$.
עקרונית באופן שכזה ניתן להכניס "יותר היסטוריה" לתוך המודל ע"י הוספת יותר ויותר ימים אחורה.

דוגמא ב-2– *אוסף משתנים בדידים* .i.i.d:

סיפור: נניח כי $\{X_n, n \geq 0\}$ הינם משתנים מקריים בדידים .i.i.d.
ברור כי אוסף המשתנים המקריים הוא שרשרת מרקוב.
מרחב המצבים: $\{z \in \mathbb{Z} : P_X(z) > 0\}$ (התומך של המשתנה המקרי).
הסתברות מעבר: $p_{ij} = P_X(j)$ (זהה כמובן לכל i).

הערה: תהליך ברנולי .i.i.d הוא מקרה פרטי כמובן.

דוגמא ב-3– *שרשרת דו-מצבית:*

סיפור: מערכת מסוימת יכולה להימצא באחד משני מצבים, מצב 0 ומצב 1. כאשר ההסתברות לעזוב את מצב 0 (למצב 1) היא a. וההסתברות לעזוב את מצב 1 (למצב 0) היא b.
הערה: זהו לא תהליך ברנולי .i.i.d.
מרחב המצבים: $\{0,1\}$
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: בהינתן שהשרשת במצב 1, מה תוחלת הזמן עד שתעבור למצב 0?

דוגמא ב-4– *שרשרת מרקוב דטרמיניסטית מחזורית:*

סיפור: גם תהליכים דטרמיניסטים ניתן לתאר כשרשראות מרקוב. נניח שקיימת מערכת דטרמיניסטית בעלת מרחב מצבים סופי אשר מדלגת בין מצב למצב באופן דטרמיניסטי. לדוגמא: תוכנית מחשב אשר מריצה לולאה והתנהגות הלולאה אינה תלויה בקלט.
מרחב המצבים: $\{0,...,N-1\}$.
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: ניתן תמיד לבצע סידור המצבים מחדש בסדר שנוח לנו.

דוגמא ב-5– *תהליך ספירה ברנולי:*

סיפור: כפי שנלמד בפרק של תהליכי ספירה ברנולי, מס, ההצלחות עד זמן n.
מרחב המצבים: $\mathbb{N}$. מתאר כמה הצלחות היו עד כה (כאן $\mathbb{N}$ כולל את 0).
הסתברות מעבר:

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & p & 0 & \dots \\ 0 & 0 & q & p & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא ב-6– מהלך מקרי פשוט:

סיפור: אדם יושב על ספסל מול כביש דו-כווני ומסתכל על המכוניות החולפות. האדם שומר מונה (בראש או על דף נייר). כאשר מכונית חולפת לכיוון אחד הוא מעלה את ערך המונה באחד, כאשר מכונית חולפת לכוון השני הוא מוריד את ערך המונה באחד. כך לדוגמא, עם ערך המונה היה 0, וחלפו 20 מכוניות עוקבות לכוון אחד אז ערך המונה יהיה 20. ההסתברות שמכונית תעבור לכוון אחד היא p (וההסתברות שתעבור לכוון השני היא $q=1-p$). סדרת הכוונים של המכוניות הינה i.i.d..

מרחב המצבים: $\mathbb{Z}$.

הסתברות מעבר:

$$P=\begin{pmatrix} \ddots & p & \vdots & \vdots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & \dots \\ \vdots & \vdots & q & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: בהינתן שערך המונה הוא 0. מה תוחלת פילוג הזמן עד שערך המונה יהיה 0 שוב?

דוגמא ב-7– מודל המהמר:

סיפור: מהמר משחק את המשחק הבא: בכל שלב הוא יכול להרוויח שקל בהסתברות p ולהפסיד בהסתברות q=1-p. הוא מפסיק לשחק באחד משני מקרים: כספו נגמר (מסיים בהפסד) או שיש ברשותו N שקלים (מסיים ברווח). המצבים בשרשרת מרקוב זו יתארו את הכסף שברשות המהמר.

מרחב המצבים: $\{0,\dots,N\}$, מתאר את כמות הכסף ברשות המהמר.

הסתברות מעבר בצורה אלגברית:

$P_{j-1,j}=p$
$P_{j+1,j}=q$ עבור $j\in\{1,\dots,N-1\}$, אחרת אפס.

$P_{ij}=I_{\{i\}}(j)$ עבור $j\in\{0,N\}$.

הסתברות מעבר בצורה מטריציונית:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: בהינתן ערך התחלתי כלשהו (של התהליך) מה הסיכוי שהמהמר יסיים ברווח, מה הסיכוי שיסיים בהפסד.

<u>דוגמא ב-8– *שרשרת* Ehrenfest:</u>

סיפור: ברשותנו שתי מיכלים (ימני ושמאלי) ו N כדורים ממוספרים {1,…,N} אשר נמצאים במיכלים (חלקם במיכל אחד וחלקם במיכל השני). בכל רגע אנו בוחרים מספר באקראי (על פי התפלגות אחידה בדידה על {1,…,N}). את הכדור ועליו המספר אשר בחרנו אנו מעבירים למיכל השני (במידה ונמצא בימני אז מעבירים לשמאלי ובמידה ונמצא בשמאלי אז מעבירים לימני). מצב התהליך מתאר את מספר הכדורים בתא הימיני.

מרחב המצבים: $\{0,...,N\}$

הסתברות מעבר:

להלן ערכי P_{ij}:

עבור i=0: $P_{01}=1$

עבור i=N: $P_{N,N-1}=1$

עבור $i\in\{1,...,N-1\}$

$$P_{ij}=\begin{cases}\dfrac{i}{N} & j=i-1\\ \dfrac{N-i}{N} & j=i+1\end{cases}$$

כך לדוגמא עבור N=5 נקבל:

$$P=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0\\ \frac{1}{5}&0&\frac{4}{5}&0&0&0\\ 0&\frac{2}{5}&0&\frac{3}{5}&0&0\\ 0&0&\frac{3}{5}&0&\frac{2}{5}&0\\ 0&0&0&\frac{4}{5}&0&\frac{1}{5}\\ 0&0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: לאחר שהתהליך הזה רץ להרבה זמן, מה פילוג הכדורים במיכל הראשון?

<u>דוגמא ב-9– *שרשרת מלאי:*</u>

סיפור: מלאי מנוהל בשיטת ה"מסור – (s,S)" בזמן בדיד. יהי Y כמות הפריטים במלאי לאחר הביקוש באותה יחידה זמן.

חוק המסור– (s,S) אומר:

א) במידה ו $Y\le s$ אז מובאים פריטים מבחוץ עד לרמה של S.

ב) אחרת לא מובאים פרטים.

נקרא לתחום {s+1,…,S} ה"תחום הסביר".

נאמר שהביקוש הוא אוסף משתנים מקריים בדידים אי-שלילים i.i.d. $\{D_n, n\geq 1\}$.

נתאר את שרשרת המרקוב X, המתארת את רמת המלאי.

מרחב המצבים: $\{0,1,...,s,...,S\}$

נגדיר את הסתברות מעבר:

ראשית נגדיר את הסימון/פעולה : $(a)^+ = \max(a,0)$. פעולה זאת על a פולטת את a במידה ו a אינו שלילי, אחרת היא פולטת אפס.

אז מה קורה כאן?

- במידה ורמת המלאי בזמן n, X_n , היא ב"תחום הסביר" אזי בזמן X_{n+1} לא יתקיים חידוש מלאי אלה רק ביקוש ולכן $X_{n+1} = (X_n - D_{n+1})^+$ עבור תחום זה.
- אבל במידה ורמת המלאי בזמן n, אינה ב"תחום הסביר" אזי בזמן X_{n+1} יתקיים חידוש מלאי ולאחר מכן ביקוש ולכן $X_{n+1} = (S - D_{n+1})^+$ עבור תחום זה.

אם כך מקבלים:

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & s < X_n \leq S \\ (S - D_{n+1})^+ & X_n \leq s \end{cases}$$

אז לדוגמא עבור $s=1, S=5$ ופילוג של D: $P_{D_n}(k) = p_k$ מתקבלת מטריצת המעבר הבאה:

$$P = \begin{pmatrix} \sum_{k=5}^{\infty} p_k & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ \sum_{k=5}^{\infty} p_k & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} p_k & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{k=3}^{\infty} p_k & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ \sum_{k=4}^{\infty} p_k & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ \sum_{k=5}^{\infty} p_k & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}$$

הערה: דוגמא זו (ועוד מספר דוגמאות נוספות) מתוארת ע"י סדרת משתנים מקריים i.i.d. (Z) ה"מזינה" את התהליך ויוצרת משוואה מהסוג $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ אשר מתארת את ערך התהליך המרקובי בזמן n+1 כפונקציה של ערך התהליך בזמן n והערך האקראי Z. (בדוגמא זו Z הוא הביקוש D).

<u>דוגמא ב-10– תהליכי הסתעפות (Branching):</u>

סיפור: נדמיין אוכלוסיה של פריטים אשר בה כל פריט מהדור ה n מוליד מספר אקראי של פריטים לדור ה n+1 ומת. כאשר המספר האקראי הזה הוא מפילוג i.i.d. כלשהו. מצב התהליך מתאר כמה פריטים חיים בדור ה n. ברור כי כאשר המצב מגיע ל 0 אז האוכלוסייה נכחדת. נניח כי פילוג מספר הפריטים אשר כל פריט מוליד הוא $P_Z(k) = p_k$.

מרחב המצבים: $\{0,1,2,3,...\}$

הסתברות מעבר:

$P_{ij} = P(Z_1 + ... + Z_i = j)$ עבור $i > 0$

$P_{0j} = I_{\{0\}}(j)$ (עבור i=0).

לדוגמא: נניח כי $Z \sim Bin(2,p)$ i.i.d. (ז"א כל פריט מוליד 0 או 1 או 2 פריטים נוספים). אזי ידוע כי $Z_1 + ... + Z_i \sim Bin(2i,p)$ ואז מטריצת המעבר נראית כך (כאשר נסמן $b_k{}^n = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0{}^2 & b_1{}^2 & b_2{}^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_0{}^4 & b_1{}^4 & b_2{}^4 & b_3{}^4 & b_4{}^4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: מה הסיכוי להיכחד (להגיע למצב 0)?

<u>דוגמא ב-11 - סכום מצטבר מודולו:</u>

יהיו $\{Y_n, n \ge 1\}$ משתנים מקריים בעלי תומך $\{0,1,2,3,4\}$ ופו' מסת הסתברות $P_Y(i)$. נסמן $P_Y(i) = p_i$

נגדיר $X_0 = 0$

$X_{n+1} = (X_n + Y_{n+1}) (\bmod 5)$ (כאשר הפעולה mod היא שארית החלוקה בחמש).

מרחב המצבים: $\{0,1,2,3,4\}$

הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_4 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_0 \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא: ב-12 Cinlar – שארית אורך החיים:</u>

סיפור: נדמיין רכיב כלשהו אשר בשימוש תמידי. כאשר הרכיב מתקלקל הוא מוחלף מיידית ע"י רכיב זהה. אורך החיים של הרכיב (הזמן מתחילת השימוש עד הקלקול) הוא משתנה מקרי בדיד מהתפלגות $P_Z(.)$.
התהליך X, מתאר את אורך החיים שנותר לרכיב הנוכחי לחיות. (נניח כי $1 \le Z$)
מרחב המצבים: התומך של $P_Z(.)$.
הסתברות מעבר:

ניתן לתאר את התהליך X באופן הבא:

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - 1 & X_n \ge 1 \\ Z_{n+1} - 1 & X_n = 0 \end{cases}$$

(כאשר $\{Z_n, n \ge 1\}$ היא סדרת אורכי החיים של הרכיבים אשר בשימוש.)
ומכן מתקבלת מטריצת מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

<u>דוגמא: ב-13</u>

סיפור: אין כאן סיפור, נתון פשוט המודל.
מרחב המצבים: $\{1,2,3,4,5\}$
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית 1: בהינתן שהשרשרת במצב 2, באיזה מצבים היא יכולה להימצא בעתיד?
שאלה הסתברותית 1: בהינתן שהשרשרת במצב 5, מה תוחלת הזמן שהיא תישאר במצב זה עד אשר תגיע למצב 1?

דוגמא: ב-14

סיפור: אין כאן סיפור, נתון פשוט המודל.
מרחב המצבים: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} .3 & 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 \\ .1 & .2 & .3 & .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ .6 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא: ב-15 הילוך אקראי מוחזר (Reflecting Random Walk):

סיפור: נדמיין רכיב אשר נא על מרחב המצבים $\{0,1,2,3,....\}$ על פי החוק הבא: הרכיב לוקח צעד לימין בהסתברות p ומנסה לקחת צעד שמאלה בהסתברות 1-p. במידה והרכיב במצב 0 אז כאשר מנסה לקחת צעד שמאלה הוא נשאר במקום (לא ניתן לזוז שמאלה לערך 1-).
מרחב המצבים: $\{0,1,2,3,....\}$
הסתברות מעבר:

$P_{i,i+1} = p$ *עבור* $i \geq 0$

$P_{i,i-1} = 1-p$ *עבור* $i \geq 1$

$P_{0,0} = 1-p$

או:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא: ב-16 שרשרת דטרמיניסטית למחצה:

סיפור: לפעמים השרשרת "יוצאת לטיול דטרמיניסטי" מהאפס לשליליים ולפעמים לחיובים.
מרחב המצבים: $\{-2,-1,0,1,2,3\}$
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פרק ב-3: נוסחאות צ'פמן קולמוגורוב.

אז עד כה הגדרנו מהי שרשרת מרקוב וראינו אוסף דוגמאות עשיר של שרשראות מרקוב. אבל עדיין לא חקרנו את התכונות של תהליכים אלו. אם כן נתחיל בחקר משעשע זה בפרק הזה.

ההסתברות של מסלול סופי של התהליך:

למה:

$$P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = P(X_0 = i_0) P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} ... P_{i_{n-1},i_n}$$

הוכחה:

נשתמש בנוסחת השרשת ובתכונה המרקובית:

$$\begin{aligned}
&P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\
&\quad P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) P(X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\
&\quad P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1}, ..., X_1 = i_1, X_0 = i_0) = \\
&\quad ... = \\
&\quad P(X_n = i_n \mid X_{n-1} = i_{n-1}) P(X_{n-1} = i_{n-1} \mid X_{n-2} = i_{n-2}) ... P(X_1 = i_1 \mid X_0 = i_0) P(X_0 = i_0) = \\
&\quad P(X_0 = i_0) P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} ... P_{i_{n-1},i_n}
\end{aligned}$$

מ.ש.ל.

נוסחה זו מגדירה את ההתפלגות המשותפת של $X_0, X_1, ..., X_n$.

לדוגמא עבור השרשרת הדו-מצבית (דוגמא ב-3) מתקבלת ההתפלגות המשותפת הבא (עבור שלושת הערכים הראשונים של התהליך):

x_0	x_1	x_2	$P(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2)$
0	0	0	$P_{X_0}(0)(1-a)^2$
0	0	1	$P_{X_0}(0)(1-a)a$
0	1	0	$P_{X_0}(0)ab$
0	1	1	$P_{X_0}(0)a(1-a)$
1	0	0	$P_{X_0}(1)b(1-a)$
1	0	1	$P_{X_0}(1)ba$
1	1	0	$P_{X_0}(1)(1-b)b$
1	1	1	$P_{X_0}(1)(1-b)^2$

נניח והיינו יודעים מהי $P_{X_m}(.)$ (ההתפלגות השולית של התהליך בזמן m) אז ניתן היה לחשב את ההתפלגות השולית של $X_m, X_{m+1}, ..., X_{m+n}$ באותו אופן:

$$P(X_{m+n} = i_n, X_{m+(n-1)} = i_{n-1}, ..., X_{m+1} = i_1, X_m = i_0) = P(X_m = i_0) P_{i_0,i_1} P_{i_1,i_2} ... P_{i_{n-1},i_n}$$

<u>הגדרה:</u>

הסתברות מעבר ב n צעדים עבור $n \geq 0$:

$P_{ij}^{\ n} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$. נסמן את מטריצת המעבר של הסתברויות אלו ב $P^{(n)}$.

הערה: נשים לב כי על פי ההגדרה $P_{ij}^{\ 0} = I_{\{j\}}(i)$ ולכן $P^{(0)} = I$ (מטריצת היחידה).

כעת נחשב את $P_{ij}^{\ 2}$ (אלו איברי המטריצה $P^{(2)}$)

$P_{ij}^{\ 2} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$.

$$P_{ij}^{\ 2} = \sum_{k \in S} P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i) =$$

$$\sum_{k \in S} \frac{P(X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

$$\sum_{k \in S} \frac{P(X_0 = i) P_{ik} P_{kj}}{P(X_0 = i)} =$$

$$\sum_{k \in S} P_{ik} P_{kj}$$

תזכורת: עבור מטריצות A,B שתיהן בעלות מימד NxN. האיבר ה i,j של מטריצת המכפלה AB הוא:

$\sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj}$.

קבלנו אם כך כי $P^{(2)} = PP = P^2$. ז"א הכפלה של מטריצה סטוכסטית בעצמה (או העלאה בריבוע של המטריצה).

כעת נוכיח באמצעות אינדוקציה כי $P^{(n)} = P^n$:

טענה: $P^{(n)} = P^n$.

הוכחה: ברור שמתקיים $P^{(1)} = P^1$. נניח ש- $P^{(n)} = P^n$ ונוכיח שמתקיים $P^{(n+1)} = P^{n+1}$:

$$P^{(n+1)} = P^n P = P^{(n)} P = \sum_{k \in S} P_{ik}^{(n)} P_{kj} = \sum_{k \in S} P(X_n = k \mid X_0 = i) P(X_1 = j \mid X_0 = k) =$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_n = k \mid X_0 = i) P(X_{n+1} = j \mid X_n = k) = *$$

$$P^{n+1} = P(X_{n+1} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(X_{n+1} = j, X_n = k \mid X_0 = i) =$$

$$= \frac{\sum_{k \in S} P(X_{n+1} = j, X_n = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} = \frac{\sum_{k \in S} P(X_{n+1} = j \mid X_n = k) P(X_n = k \mid X_0 = i) P(X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

$$= \sum_{k \in S} P(X_{n+1} = j \mid X_n = k) P(X_n = k \mid X_0 = i) = **$$

קל לראות כי *=** וכך הראנו כי $P^{(n+1)} = P^{n+1}$ ולכן לפי אינדוקציה מתקיים כי $P^{(n)} = P^n$.

נראה תוצאה קצת יותר כללית:

<u>משפט (נוסחאות צ'פמן קולמוגורוב Chapman-Kolmogorov):</u>

$P_{ij}^{\,n+m} = \sum_{k\in S} p_{ik}^{\;n}\, p_{kj}^{\;m}$ או בכתיבה מטריציונית $P^{(n+m)} = P^{(n)}P^{(m)}$.

ראשית, נשאל מדוע נוסחאות צ'פמן קולמוגורוב מוכיחות כי $P^{(n)} = P^n$? נוכיח באינדוקציה.
עבור n=1 הטענה מתקיימת. נניח כי מתקיימת עבור n>1. אזי לפי הנוסחאות $P^{(n+1)} = P^{(n)}P^{(1)} = P^{(n)}P$.
אבל לפי הנחת האינדוקציה זה שווה ל $P^nP = P^{n+1}$. מ.ש.ל.

הוכחת צ'פמן קולמוגורוב:

$$P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k\in S} P(X_{n+m} = j, X_m = k \mid X_0 = i)$$

מתקיים:

$$P(X_{n+m} = j, X_m = k \mid X_0 = i) = \frac{P(X_{n+m} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

$$\frac{P(X_{n+m} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \frac{P(X_m = k, X_0 = i)}{P(X_m = k, X_0 = i)} =$$

$$\frac{P(X_{n+m} = j, X_m = k, X_0 = i)}{P(X_m = k, X_0 = i)} \frac{P(X_m = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} =$$

$$P(X_{n+m} = j \mid X_m = k, X_0 = i)P(X_m = k \mid X_0 = i) =$$

$$P(X_{n+m} = j \mid X_m = k)P(X_m = k \mid X_0 = i) = P_{kj}^{\;n}P_{ik}^{\;m}$$

ולכן

$$P(X_{n+m} = j \mid X_0 = i) = \sum_{k\in S} P(X_{n+m} = j, X_m = k \mid X_0 = i) = \sum_{k\in S} P_{kj}^{\;n}P_{ik}^{\;m} = \sum_{k\in S} P_{ik}^{\;m}P_{kj}^{\;n}$$

מ.ש.ל

קבלנו אם כך דרך לחשב את $P(X_n = j)$ של התהליך. זוהי התפלגות ערכי התהליך בזמן n (ההתפלגות השולית של התהליך בזמן n).

$$P(X_n = j) = \sum_{k\in S} P(X_n = j \mid X_0 = k)P(X_0 = k) = \sum_{k\in S} P_{kj}^{\;n}P_{X_0}(k)$$

ניתן לכתוב זאת גם כך:

$P(X_n = j) = \sum_{i\in S} P_{X_0}(i)P_{ij}^{\;n}$. כך שאם נתייחס אל ההתפלגות ההתחלתית כאל וקטור שורה P_{X_0} ואל התפלגות X_n גם כאל וקטור שורה P_{X_n} אז קבלנו:

$P_{X_n} = P_{X_0}P^n$.

ועבור המקרה בו ההתפלגות ההתחלתית הינה מנוונת, ז"א עבור ערך l מסוים $P(X_0 = l) = 1$
אז P_{X_n} הוא השורה ה l ב P^n .

דוגמא:

בדוגמא ב-3 הוצגה השרשרת הדו-מצבית, בעלת מטריצת מעבר:

$$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$$

עבור דוגמא זו ניתן לקבל ביטוי פשוט עבור P^n (עבור הרבה דוגמאות אחרות אין דרך "נקייה" לייצג את P^n).

כמקובל נסמן ב $P_{X_n}(.)$ את הפילוג השולי של התהליך בזמן n. אם כך:

$$P_{X_{n+1}}(0)=P(X_{n+1}=0)=P(X_n=0,X_{n+1}=0)+P(X_n=1,X_{n+1}=0)$$
$$=P(X_n=0)P(X_{n+1}=0\mid X_n=0)+P(X_n=1)P(X_{n+1}0\mid X_n=1)$$
$$=P_{X_n}(0)(1-a)+P_{X_n}(1)b=$$
$$=P_{X_n}(0)(1-a)+(1-P_{X_n}(0))b=$$
$$=b+(1-a-b)P_{X_n}(0)$$

קיבלנו נוסחה עבור $P_{X_{n+1}}(0)$ במונחי $P_{X_n}(0)$. אם כך בהינתן תנאי ההתחלה $P_{X_0}(0)$ ניתן לחשב:

$P_{X_1}(0)=b+(1-a-b)P_{X_0}(0)$.

$$P_{X_2}(0)=b+(1-a-b)P_{X_1}(0)=b+(1-a-b)(b+(1-a-b)P_{X_0})=b+(1-a-b)b+(1-a-b)^2P_{X_0}(0)$$

כך עבור n כלשהו נקבל:

$$P_{X_n}(0)=b\sum_{j=0}^{n-1}(1-a-b)^j+(1-a-b)^nP_{X_0}(0)$$

ולכן:

$$P_{X_n}(0)=b\frac{1-(1-a-b)^{n-1+1}}{1-(1-a-b)}+(1-a-b)^nP_{X_0}(0)=$$
$$\frac{b}{a+b}(1-(1-a-b)^n)+(1-a-b)^nP_{X_0}(0)=$$
$$(1-a-b)^n(P_{X_0}(0)-\frac{b}{a+b})+\frac{b}{a+b}$$

אם כך:

$$P_{X_n}(1)=1-P_{X_n}(0)=1-((1-a-b)^n(P_{X_0}(0)-\frac{b}{a+b})+\frac{b}{a+b})$$
$$=\frac{a}{a+b}+(1-a-b)^n(\frac{b}{a+b}-P_{X_0}(0))=$$
$$\frac{a}{a+b}+(1-a-b)^n(\frac{b}{a+b}-1+P_{X_0}(1))=$$
$$\frac{a}{a+b}+(1-a-b)^n(P_{X_0}(1)-\frac{a}{a+b})$$

קבלנו אם כך את ההתפלגות הגבולית בזמן n כפונקציה של ההתפלגות ההתחלתית (הגבולית בזמן 0). מעניין לראות כי במידה ו a ו b אינם 0 או 1, אז $|1-a-b|<1$ ואז כאשר n שואף לאינסוף מקבלים:

$\lim_{n\to\infty} P_{X_n} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$. בפרקים הבאים נראה כי זאת נקראת ההתפלגות הגבולית של התהליך. בנוסף קל לראות כי אם בוחרים את P_{X_0} להיות ההתפלגות הגבולית של התהליך אזי $P_{X_n} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$ לכל n!!!

נחשב כעת את P^n.

נתחיל ב ${P_{00}}^n$ (ההסתברות לעבור ממצב 0 למצב 0 לאחר n צעדים). נניח כי $P_{X_0}(0)=1$, ז"א התהליך מתחיל במצב 0 בוודאות. אם כך:

$$P_{X_n}(0) = {P_{00}}^n P_{X_0}(0) = {P_{00}}^n$$

ולפי החישוב לעיל:

$${P_{00}}^n = (1-a-b)^n(1-\frac{b}{a+b}) + \frac{b}{a+b} = (1-a-b)^n \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$$

נמשיך ל ${P_{01}}^n$:

$${P_{01}}^n = 1-{P_{00}}^n = 1-((1-a-b)^n \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}) = \frac{a}{a+b} - (1-a-b)^n \frac{a}{a+b}$$

באופן סימטרי ניתן לקבל כי:

$${P_{11}}^n = (1-a-b)^n \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}$$

$${P_{10}}^n = \frac{b}{a+b} - (1-a-b)^n \frac{b}{a+b}$$

קבלנו אם כך את כל איברי P^n וניתן לסכם זאת באופן הבא:

$$P^n = \frac{1}{a+b}\left(\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}\right)$$

פרק ב-4: מיון מצבים, מצבים חולפים ומצבים מתמידים, מצב מתמיד אפס, מחזוריות.

הגדרות עזר כלליות-יחסי שקילות:

נתחיל בחזרה על מספר מושגים בסיסיים מתורת הקבוצות.

1. בהינתן קבוצה V, נסמן ב $V\times V$ את **המכפלה הקרטזית** של הקבוצה עם עצמה. זהו אוסף כל הזוגות הסדורים מהסוג $(a,b), a\in V, b\in V$.
   a. דוגמא 1: V={1,2,3} אז
   $$V\times V=\{(1,1),(1,2),(1,3),$$
   $$(2,1),(2,2),(2,3),$$
   $$(3,1),(3,2),(3,3)\}$$
   b. דוגמא 2: $\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^2$. זהו אוסף הוקטורים במישור.
   c. דוגמא 3: בהינתן V צמתים של גרף, אז אם ניקח את קשתות הגרף E להיות $E=V\times V$ אז נאמר כי הגרף **מלא** (ישנה קשת בין כל צומת לכל צומת).
2. **רלציה/יחס** R על קבוצה V היא קבוצה חלקית של $V\times V$. $R\subseteq V\times V$. ז"א זהו אוסף של זוגות סדורים מהסוג $(a,b), a\in V, b\in V$.
   a. דוגמא 1: אם $V=\mathbb{N}$ אזי היחס $R_{\le}$ (קטן שווה), הוא אוסף הזוגות הסדורים מהסוג $(a,b), a\in V, b\in V$, כך ש $a\le b$. כך למשל $(2,14)\in R_{\le}$ אבל $(5,4)\notin R_{\le}$.
   b. דוגמא 2: בגרף מכוון ממושקל (כפי שהוצג בפרק הקודם, E קבוצת הקשתות היא רלציה מעל V, קבוצת הצמתים.
3. **רלציה/יחס שקילות**, היא רלציה E על V אשר מקיימת את שלושת התנאים הבאים:
   i. **רפלקסיביות** – לכל $a\in V$ מתקיים כי $(a,a)\in E$
   ii. **סימטריות** - אם $(a,b)\in E$ אז $(b,a)\in E$.
   iii. **טרנזטיביות** – אם $(a,k)\in E$ וגם $(k,b)\in E$ אז $(a,b)\in E$.
   a. דוגמא 1: יחס השוויון בין מספרים הוא יחס שקילות.
   b. דוגמא 2: תהי V קבוצת הסטודנטים בכיתה. E תהייה אוסף כל הזוגות הסדורים של הסטודנטים בעלי אותו שם: $E=\{(a,b): a,b\in V, Name(a)=Name(b)\}$.
   c. דוגמא 3: יחס גדול/שווה ($\le$) בין מספרים אינו רלצית שקילות (אינו מקיים סימטריות).
4. בהינתן רלצית שקילות E מעל V, **מחלקת שקילות** של איבר a ב V (נסמן $[a]$). היא אוסף כל האיברים ב V, b, כך ש $(a,b)\in E$. ז"א $[a]=\{b\in V:(a,b)\in E\}$.

משפט: יחס שקילות E על V מתאר חלוקה של ערכי V. (כזכור חלוקה של קבוצה היא אוסף תת קבוצות, זרות, לא ריקות שאיחודן הוא הקבוצה V).
לדוגמא עבור הרלציה בדוגמא 2 (לעיל) יחס השקילות של השמות מהווה חלוקה של קבוצת הסטודנטים על פי שמותם.

יחס הקשירות הוא יחס שקילות ולכן יוצר מחלקות שקילות:

<u>הגדרה:</u>
נאמר כי מצב j **נגיש** ממצב i אם קיים $n \geq 0$ כך ש $P_{ij}^{n} > 0$. נסמן ב $i \to j$.

הערה: כל מצבי נגיש לעצמו כי $P_{i,i}^{0} = P(X_0 = i \mid X_0 = i) = 1$.

<u>הגדרה:</u>
נאמר כי מצבים i ו j **מתקשרים** אם $i \to j$ (j נגיש מ i), וגם $i \leftarrow j$ (i נגיש מ j). נסמן ב $i \leftrightarrow j$.

הערה: לפעמים (בעברית) מחליפים את הביטויים (**נגיש ומתקשר**) בביטויים (**מתקשר ומתקשר ההדדית**). ז"א אומרים שאם j נגיש ממצב i אז i **מתקשר** עם j. ואם i מתקשר עם j וגם j מתקשר עם i אז המצבים **מתקשרים הדדית**.

<u>הגדרה:</u>
יחס הקשירות על מרחב המצבים של שרשרת מרקוב הוא היחס R $(i,j) \in R$ אמ"מ $i \leftrightarrow j$.

<u>משפט:</u>
יחס הקשירות על מרחב המצבים הוא יחס שקילות.

<u>הוכחה:</u>

i. רפלקסיביות - כל מצב נגיש לעצמו.
ii. סימטריות - מיידי מההגדרה של מצבים מתקשרים (כי ההגדרה סימטרית).
iii. טרנזטיביות – צריך להוכיח כי אם $i \leftrightarrow l$ וגם $l \leftrightarrow j$ אזי $i \leftrightarrow j$.

$i \leftrightarrow l$ ולכן $i \to l$ אזי קיים $n \geq 0$ כך ש $P_{i,l}^{n} > 0$

$l \leftrightarrow j$ ולכן $l \to j$ אזי קיים $m \geq 0$ כך ש $P_{l,j}^{m} > 0$

לפי צ'פמן-קולמוגורוב $P_{i,j}^{n+m} = \sum_{k \in S} P_{i,k}^{n} P_{k,j}^{m}$

סכום זה גדול שווה לכל מחובריו (כי איברי הסכום חיוביים) ולכן:

$$P_{i,j}^{n+m} = \sum_{k \in S} P_{i,k}^{n} P_{k,j}^{m} \geq P_{i,l}^{n} P_{l,j}^{m} > 0$$

ולכן קבלנו כי $i \to j$.

באופן זהה לחלוטין ניתן להראות כי $i \leftarrow j$

ומכאן נובע כי $i \leftrightarrow j$.

מ.ש.ל

תוצאה מהמשפט והגדרה: יחס הקשירות על מרחב המצבים מגדיר **מחלקות שקילות** על מרחב המצבים.

<u>הגדרה:</u>
נסמן את מרחב המצבים של שרשרת מרקוב ב S.
מחלקת קשירות או פשוט **מחלקה** של מצבים היא הקבוצה A, $A \subseteq S$. כך שלכל $i,j \in A$ מתקיים $i \leftrightarrow j$
ואין מצב $k \in S \setminus A$ ומצב $i \in A$ כך ש $i \leftrightarrow k$.

<u>הגדרה:</u>
שרשרת מרקוב היא **אי-פריקה** במידה ויש בה מחלקה בודדת.

<u>דוגמאות:</u>
- בדוגמה ב-0 יש שתי מחלקות קשירות.
- בדוגמה ב-1 יש מחלקת קשירות בודדת ולכן השרשרת היא אי-פריקה.
- בדוגמא ב-3 אם $0 < a,b < 1$ אז השרשרת אי-פריקה. אם $a = b = 0$ אז השרשרת לא אי-פריקה (השרשרת פריקה) ויש בה שתי מחלקות קשירות. אם $a = 1, b = 0$ עדיין ישנם שתי מחלקות קשירות.
- בדוגמא ב-5 יש אינסוף מחלקות קשירות. כל מחלקה היא מצב בודד.
- בדוגמא ב-13, מחלקות הקשירות הן: $\{1,2\},\{3,4\},\{5\}$

<u>אלגוריתמים למציאת מחלקות הקשירות:</u>

לא נעסוק בקורס זה באלגוריתמים למציאת מחלקות הקשירות. רוב הדוגמאות אשר נעסוק יהיה מבנה סדור ביותר או שהדוגמאות יהיו די קטנות כך שניתן לחפש ידנית את כל מחלקות הקשירות.
למרות זאת, כל המעוניין, מוזמן לחפש את האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף בספר:

“Introduction to Algorithms", by T. H. Corman, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest (MIT Press and McGraw-Hill 1994)

רכיב קשיר היטב בגרף מכוון הוא רכיב אשר בו קיים מסלול בין כל זוג צמתים. כאשר מיישמים אלגוריתם שכזה על מרחב המצבים של שרשרת מרקוב, דרוש לבנות גרף מכוון ובו יש קשת מכל מצב למצבים הנגישים ממנו. וזה אומר גם קשת מכל מצב לעצמו (גם אם הסתברות המעבר ממצב לעצמו היא 0 לכל n).

להלן איור הנלקח מהספר המראה את פעולת האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף מכוון.

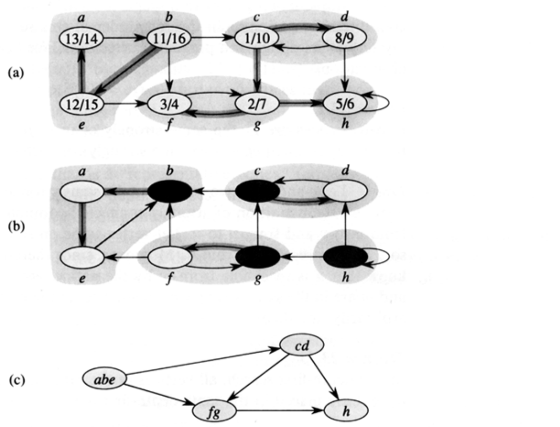


Figure 23.9 **(a)** A directed graph G. The strongly connected components of G are shown as shaded regions. Each vertex is labeled with its discovery and finishing times. Tree edges are shaded. **(b)** The graph G^T, the transpose of G. The depth-first tree computed in line 3 of STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS is shown, with tree edges shaded. Each strongly connected component corresponds to one depth-first tree. Vertices b, c, g, and h, which are heavily shaded, are forefathers of every vertex in their strongly connected component; these vertices are also the roots of the depth-first trees produced by the depth-first search of G^T. **(c)** The acyclic component graph G^{SCC} obtained by shrinking each strongly connected component of G to a single vertex.

אלגוריתם נוסף למציאת יחס קשירות בין מצבים הוא האלגוריתם הבא:

א) בהינתן מטריצת מעבר P, סמן 1 בתאים בהם יש ערך חיובי.

ב) סמן 1 באלכסון.

ג) בצע את החישוב הבא:

$$\widetilde{P}=\sum_{k=1}^{|S|}P^k$$

כאשר המשמעות של כפל היא And והמשמעות של חיבור היא Or (1+1=1,1+0=1,0+1=1,0+0=0).

ד) המטריצה אשר התקבלה ($\widetilde{P}$) מכילה 1 במקום ה i,j במידה וניתן להגיע ממצב i למצב j (אחרת היא מכילה 0 במקום זה).

ה) בדוק במטריצה $\widetilde{P}$ מהם צמדי המצבים אשר עבורם $\widetilde{P}_{ij}=1$ וגם $\widetilde{P}_{ji}=1$, כל הצמדים הללו הינם קשירים.

חלוקת מרחב המצבים בשרשרת למצבים חולפים ומתמידים:

הגדרה:

נגדיר את **הסתברות החזרה למצב** i $f_{i,i}$ להיות:

$$f_{i,i}=P(\exists m>n, X_m=i\mid X_n=i).$$

זו ההסתברות כי בהינתן כי התהליך במצב i אז הוא יחזור למצב i אי פעם בעתיד.

נסתכל על דוגמא ב-1 (מזג אוויר), נראה כי בדוגמה זו הסתברות החזרה למצב היא 1 עבור כל מצב. אבל בדוגמא ב-0, רואים כי עבור מצבים 2,3 הסתברות החזרה למצב היא 1 בעוד שבמצב מס' 1, ההסברות היא רק ½. אבחנות אינטואיטיביות אלו גוררות את ההגדרות הבאות.

הגדרה:

נאמר כי מצב i הוא **מתמיד** אם $f_{i,i}=1$

הגדרה:

נאמר כי מצב i הוא **חולף** אם $f_{i,i}<1$

הערה: לפעמים מסמנים f_i במקום $f_{i,i}$.

ז"א כל מצב הוא או מתמיד או חולף, במידה ומתמיד אז אם השרשרת נמצאת במצב זה היא תחזור אליו שוב ושוב. ובמידה וחולף אז אם נמצאת במצב זה, אז ישנה סבירות שתחזור אליו $f_{i,i}$, וישנה סבירות שלא תחזור אליו: $1-f_{i,i}$.

נבחין כי במידה והשרשרת חזרה למצב i, אז עקב תכונת המרקוביות "הכול מתחיל מהתחלה" והסבירות שתחזור שוב למצב i היא שוב $f_{i,i}$. כך ניתן להסתכל על הטיול אשר שרשרת מטיילת במצביה לאחר ביקור במצב i כטיול אשר בסופו נותן תוצאה של משתנה מקרי ברנולי, כאשר הצלחה (במונחי ניסויי הברנולי) מיוחסת לאי-חזרה אי פעם למצב i וכשלון מיוחס לחזרה – ואז מתחיל הניסוי הבא. מכן מספר הביקורים במצב i במידה והשרשרת נמצאת בזמן i מתפלג $Geometric(1-f_{i,i})$-סופר כישלונות (כולל הביקור הראשון בזמן 0).

מכאן תוחלת מספר הביקורים במצב i (בהינתן שמתחילים במצב i) היא $\frac{f_{i,i}}{1-f_{i,i}}$.

נבחין אם כך כי עבור מצב מתמיד $1-f_{i,i}=0$ ולכן תוחלת מספר הביקורים היא אינסוף. בעוד שעבור מצב חולף תוחלת מספר הביקורים היא סופית.

כעת נתאר משפט המסווג מצבים חולפים ומתמידים על פי סדרת הסתברויות המעבר ב n צעדים.

<u>משפט:</u>

התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{\ n}$ קובעת אם מצב i הוא מתמיד או חולף:

אם הטור מתבדר ($\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{\ n}=\infty$) אז מצב i הוא מתמיד.

אם הטור מתכנס ($\sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{\ n}<\infty$) אז מצב i הוא חולף.

<u>הוכחה:</u>

עבור מצב חולף, תוחלת מספר הביקורים במצב היא סופית.

עבור מצב מתמיד, תוחלת מספר הביקורים במצב היא אינסופית. נגדיר אם כך את המשתנה מקרי הבא:

$$N_i=\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{i\}}^{\ (X_n)}$$

משנה מקרי זה סופר את מספר הביקורים של השרשרת במצב i. אם כך:

$$E[N_i \mid X_0=i]=E[\sum_{n=0}^{\infty} I_{\{i\}}^{\ (X_n)} \mid X_0=i]=\sum_{n=0}^{\infty} E[I_{\{i\}}^{\ (X_n)} \mid X_0=i]=\sum_{n=0}^{\infty} P(X_n=i \mid X_0=i)=\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{\ n}$$

מ.ש.ל.

<u>משפט:</u>

עבור כל מחלקת שקילות, או שכל המצבים במחלקה מתמידים או שכל המצבים חולפים.

<u>הוכחה:</u>

ראשית נראה שאם i מתמיד וגם $i \leftrightarrow j$ אז j מתמיד.

קיימים $k,m \in \mathbb{N}$ כך ש $P_{ij}^{\ k}>0$ וגם $P_{ji}^{\ m}>0$.

אם כך עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $P_{jj}^{\ m+n+k} \geq P_{ji}^{\ m} P_{ii}^{\ n} P_{ij}^{\ k}$ וזאת בגלל שמאורע המעבר מ j ל j ב m+n+k צעדים מכיל את המאורה אשר עבורו מחושבת ההסתברות בצד ימין של אי השוויון (מעבר מ j ל i ב m צעדים, לאחר מכן מעבר מ i לעצמו ב n צעדים ולבסוף מעבר מ i ל j ב k צעדים).

אם כך אז ניתן לסכום על כל n ולקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{\ m+n+k} \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_{ji}^{\ m} P_{ii}^{\ n} P_{ij}^{\ k} = P_{ji}^{\ m} P_{ij}^{\ k} \sum_{n=1}^{\infty} P_{ii}^{\ n} = \infty$$

כאן עשינו שימוש בעובדה ש i מתמיד ולכן הטור עבורו מתבדר.

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P_{jj}^{\ n}$ מתבדר גם הוא ולכן j מצב מתמיד.

אם כך הראנו כי אם מצב הוא מתמיד אז כל המצבים במחלקה שלו (כל ה j כך ש $i \leftrightarrow j$) הם גם מתמידים.
מכאן נובע גם כי אם מצב i הוא חולף אז כל ה j כך ש $i \leftrightarrow j$ הם גם חולפים כי אם היה j כזה שהוא מתמיד אז גם i היה צריך להיות מתמיד.
מ.ש.ל.

הערה: כתוצאה ממשפט זה ניתן לומר כי **מחלקה היא מתמידה** או **מחלקה היא חולפת** בהתאם להתמדה/חליפות של המצבים במחלקה (המשפט מבטיח כי כל המצבים במחלקה יהיו מאותו סוג).

<u>משפט:</u>
בשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי לא כל המצבים יכולים להיות חולפים.

<u>הוכחה:</u>
נניח כי המצבים מסומנים $\{0,1,...,N\}$ ונניח בשלילה כי כל המצבים חולפים. אז לאחר זמן T_0 (סופי) השרשרת כבר לא תהייה במצב 0, ולאחר זמן סופי T_1 השרשרת כבר לא תהייה במצב 1 וכן הלאה. אם כך לאחר זמן $T = \max\{T_0, T_1, ..., T_N\}$ השרשרת לא תמצה באף מצב. אבל בזמן זה השרשרת חייבת להיות במצב כלשהו וכאן הסתירה.
מ.ש.ל.

הערה: בניגוד לכך, נראה דוגמאות בהן השרשרת היא אינסופית וכל המצבים חולפים.

<u>משפט:</u>
בשרשרת מרקוב אי פריקה עם מרחב מצבים סופי, כל המצבים הם מתמידים.
<u>הוכחה:</u>
על פי המשפט הקודם חייב להיות מצב מתמיד אחד ועל פי המשפט שלפניו כל המצבים במחלקת השקליות הבודדה (השרשרת היא אי-פריקה) צריכים להיות מאותו סוג. ולכן כולם מתמידים.

הערה: הרבה מהדוגמאות בהמשך יהיו על שרשראות מרקוב אי-פריקות בעלות מרחב מצבים סופי. נראה שבמידה ואין בעיות של מחזוריות אז שרשראות אלו הינן בעלות התפלגות סטציונרית (תוגדר בפרקים הבאים).

<u>דוגמא:</u>
נסתכל על דוגמא ב- 14 ובה מטריצת המעבר היא:

$$P = \begin{pmatrix} .3 & 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 \\ .1 & .2 & .3 & .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ .6 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לצייר את הגרף המתאים למרחב המצבים $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ולחלק למחלקות מתמידות וחולפות:
מחלקות מתמידות: $\{1,5\}$, $\{4,7,6\}$.
מחלקות חולפות: $\{3\}$, $\{2\}$.

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב-7, מודל המהמר על מרחב מצבים $\{0,...,N\}$ קל לראות כי המחלקות המתמידות הן: $\{0\},\{N\}$ והמחלקה החולפת היא $\{1,\ldots,N-1\}$.

הגדרה:
במחלקה מתמידה אשר מורכבת ממצב יחיד, המצב היחיד נקראה **מצב סופג**.

לדוגמא, בדוגמא לעיל המצבים 0,N הם סופגים.
הערה: מצב i הוא סופג אמ"מ מתקיים $P_{ii}=1$.

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב- 6 (הילוך אקראי).
ברור כי כל המצבים מתקשרים ($i \leftrightarrow j$ לכל $i,j\in\mathbb{Z}$) ולכן על פי המשפט לעיל או שכל המצבים מתמידים או שכולם חולפים.
אם כך נסתכל על המצב 0, וננסה לראות אם מצב זה הוא חולף או מתמיד (וזה יקבע התמדה/חליפה של כל המצבים).
נסתכל על התור $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}{}^{n}$, על פי המשפט לעיל התכנסות, התבדרות התור תקבע האם המצב 0 חולף או מתמיד בהתאמה.

ראשית נבחין כי לאחר מספר אי-זוגי של צעדים לא ניתן לחזור למצב 0 (זאת כי מספר הצעדים ימינה דרוש להשתוות למספר הצעדים שמאלה ולכן חייב להיות זוגי):
$$P_{00}{}^{2n+1}=0 \quad \text{עבור} \quad n=1,2,3,...$$
מצד שני, לאחר מספר זוגי של צעדים (2n), דרוש כי מספר הצעדים לצד אחד ישתווה למספר הצעדים לצד השני בשביל שתתבצע חזרה למצב 0, ולכן:
$$P_{00}{}^{2n}=\binom{2n}{n}p^n(1-p)^n=\frac{(2n)!}{n!n!}p^n(1-p)^n$$
ניתן לקרב ערך זה ע"י נוסחת סטירלינג ($n!\sim\sqrt{2\pi}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$):
$$P_{00}{}^{2n}=\frac{(2n)!}{n!n!}(p(1-p))^n\sim\frac{(2n)^{2n+1/2}e^{-2n}\sqrt{2\pi}}{((n)^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi})((n)^{n+1/2}e^{-n}\sqrt{2\pi})}(p(1-p))^n=\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$$

אם כך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} P_{00}{}^{n}$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$ יתכנס.

הערה: נשים לב ש $\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$ הוא קרוב של $P_{00}{}^{n}$ הנובע מהקרוב של נוסחת סטירלינג. אם כך, דרושה הוכחה לכך שהתכנסות הטור האחד מתקיימת אמ"מ הטור השני מתכנס. לא נציג הוכחה זאת כאן.

אם כך האם הטור מתכנס? התשובה תלויה בפרמטר p.
נבחין כי $4p(1-p)\le 1$ ומתקיים שוויון אמ"מ $p=1/2$. קל לראות זאת כי פתרונות המשוואה הריבועית $p-p^2$ הם 0 ו – 1. וזוהי פרבולה בעלת מקסימום (נפתחת כלפי מטה) ולכן נקודת המקסימום היא בין הפתרונות.

אז עבור $p=1/2$ מדובר בטור: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$.

ועבור $p \neq 1/2$ מדובר בטור: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n n^{-1/2}$ (כאשר $\alpha = 4p(1-p) \in [0,1/2)$.

אם כך עבור p=1/2 התור מתבדר ולכן מצב 0 הוא מתמיד ולכן כל המצבים מתמידים.
ועבור $p \neq 1/2$ התור מתכנס ולכן מצב 0 הוא חולף ולכן כל המצבים חולפים.

התמדה חיובית והתמדה אפס:

את הדיון הקודם לגבי מצבים מתמידים ומצבים חולפים היינו יכולים לנסח בעזרת המשתנים המקריים הבאים:
$T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$.
זהו הזמן הראשון ובו מצב השרשרת הוא i ונקרא **זמן הפגיעה** (hitting time) למצב i.
ערך המשתנה המקרי הזה יכול להיות גם ∞ ובכך מסומן המצב בו התהליך אינו חוזר למצב i.

הערה: הסימון קונסיסטנטי עם הסימון של תהליך בינומי שלילי (זמן הפגיעה במצב k ביחס לתהליך בינומי).

באמצעות משתנה מקרי זה, ניתן לייצג את הגודל $f_{i,i}$ כך:
$f_{i,i} = P(T_i < \infty \mid X_0 = i)$.
אם כך, עבור כל דוגמה בה מצאנו מצבים להיות מתמידים התקיים כי ערך המשתנה המקרי הוא סופי בהסתברות 1:
$f_{i,i} = P(T_i < \infty \mid X_0 = i) = 1$
עבור מצבים מתמידים, לפילוג משתנה מקרי זה ישנה חשיבות רבה, הוא מתאר כמה זמן עובר בין כניסות חוזרות למצב (בעצם קיימת סדרת משתנים מקריים i.i.d. – נובע מהתכונה המרקובית, עבור כל מצב).
גם עבור מצבים חולפים יש למשתנה זה משמעות, אבל עבור מצבים כאלו הפילוג הוא כזה אשר מאפשר למשתנה לקבל את הערך ∞.
כאשר אנו דנים בערכים אקראיים פעמים רבות אנו מעוניינים לדעת את תוחלת הערכים האקראיים הללו. כך גם נרצה לעשות עבור המשתנה המקרי T_i.
אם כך, עבור מצבים חולפים תוחלת T_i היא ∞ (זהו ערך התוחלת עבור כל משתנה מקרי אשר יכול לקבל ∞ כערך).
מה לגבי מצבים מתמידים?
עבור מצבים אלו לפעמים יתקיים כי תוחלת T_i סופית ולפעמים יתקיים כי היא אינסופית. (אנו הרי יודעים כי תוחלתם של משתנים מקריים מסוימים יכולה להיות ∞ וזאת כי טור התוחלת אינו מתכנס).

<u>הגדרה:</u>
יהי i מצב מתמיד בשרשרת מרקוב $\{X_n, n \geq 0\}$ ויהי $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$.
אם $E[T_i \mid X_0 = i] < \infty$ אזי מצב i נקרא **מתמיד חיובי** (positive recurrent).
אם $E[T_i \mid X_0 = i] = \infty$ אזי מצב i נקרא **מתמיד אפס** (positive recurrent).
הערה: אם כך אנו למדים כי ניתן לסווג מצבים ל-3 קטגוריות:
א) חולף.
ב) מתמיד אפס.

ג) מתמיד חיובי.
המשפט הבא מראה כי סיווג המצבים המתמידים (כמתמידים אפס או מתמידים חיובית) אינו רלוונטי לשרשראות מרקוב בעלי מרחב מצבים סופי.

משפט (ללא הוכחה):
בשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי, אף מצב אינו מתמיד אפס (כל המצבים מתמידים חיובית או חולפים).

מכאן, אנו רואים שההבחנה בין מצבים מתמידים אפס למתמידים חיוביות הינה רלוונטית אך ורק בשרשראות מרקוב בעלות מרחב מצבים אינסופי.

כעט נגדיר את משוואות שיווי המשקל. את משוואות אלו נפגוש בהרחבת יתר בהמשך הקורס.

הגדרה:
עבור שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר P ומרחב מצבים S. **משוואות שווי המשקל** הינם:

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} \quad \forall j \in S$$

$$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$$

פתרון למשוואות הנ"ל (π) נקראה **התפלגות סטציונרית** ולפעמים גם **התפלגות גבולית** (נבין משמעות שמות אלו בהמשך).

וקטור הנעלמים במשוואות אלו הוא הווקטור π (בעל $|S|$ איברים, יכול להיות אינסופי). יש כאן $|S|+1$ משוואות (במידה ו S סופי) או משוואה עבור כל איבר ב S ועוד משוואה $\sum_{j\in S} \pi_j = 1$.

הערה: ניתן לרשום את |S| המשוואות הראשונות בצורה מטריציונית: $\pi P = \pi$, כאן π הוא וקטור שורה.

אז מה עושים עם משוואות שווי המשקל? בפרקים הבאים נראה שעושים המון, כעת נשתמש במשוואות אלו והמשפט הבא:

משפט (ללא הוכחה):
עבור שרשרת מרקוב אי-פריקה ומשוואות שווי משקל. כל מצבי השרשרת הינם מתמידים חיובית אמ"מ למשוואות שווי המשקל קיים פתרון.
מעבר לכך, במידה וקיים פתרון אז הוא יחיד ובו $\pi_j > 0$ לכל מצב j.

על פי משפטים קודמים אנו יודעים כי בשרשרת מרקוב אי-פריקה סופית, כל המצבים הינם מתמידים חיובית. המשפט הנוכחי מתאר את התנאי הדרוש לכך שבשרשרת מרקוב אי-פריקה אין סופית, כל המצבים יהיו מתמידים: קיום פתרון למשוואות שווי המשקל.

לפני שנמשיך ונראה דוגמא, נציין משפט נוסף אשר ייתן משמעות לפתרון משוואות שווי המשקל (ההתפלגות הסטציונרית). בפרקים הבאים נראה משמעויות רבות נוספות.

משפט (ללא הוכחה):
עבור שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית מתקיים:

$E[T_j \mid X_0 = j] = \dfrac{1}{\pi_j}$.

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב-15 (הילוך אקראי מוחזר), זוהי דוגמא קלאסית לצורך סווג מצבים כחולפים, מתמידים אפס או מתמידים חיובית.

ניזכר בהסתברויות המעבר של שרשרת זו:

$P_{i,i+1} = p$ עבור $i \ge 0$

$P_{i,i-1} = 1-p$ עבור $i \ge 1$

$P_{0,0} = 1-p$

כיצד נראות משוואות שווי המשקל?

"משוואת הסכום לאחד": $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + ... = 1$

המשוואה עבור מצב j=0: $\pi_0 = \pi_0(1-p) + \pi_1(1-p) + (\pi_2 + \pi_3 + ...)\cdot 0$

המשוואה עבור מצב j=1: $\pi_1 = \pi_0 p + \pi_1 \cdot 0 + \pi_2(1-p) + (\pi_3 + \pi_4 + ...)\cdot 0$

המשוואה עבור מצב j=2: $\pi_2 = \pi_0 \cdot 0 + \pi_1 p + \pi_2 \cdot 0 + \pi_3(1-p) + (\pi_4 + \pi_5 + ...)\cdot 0$

...

המשוואה עבור מצב $k > 0$ כללי: $\pi_k = \pi_{k-1} p + \pi_{k+1}(1-p)$

...

ולהלן הפתרון של המשוואות:

נניח כי π_0 ידוע, אזי על פי המשוואה הראשונה (j=0):

$$\pi_1 = \frac{p}{1-p}\pi_0$$

הצבה במשוואה השנייה (j=1) תיתן:

$$\frac{p}{1-p}\pi_0 - p\pi_0 = \pi_2(1-p)$$

או

$$\pi_2 = \pi_0\left(\frac{p}{(1-p)^2} - \frac{p}{1-p}\right)$$

או

$$\pi_2 = \pi_0\left(\frac{p}{1-p}\right)^2$$

וכך אם נמשיך נקבל באופן כללי:

$$\pi_k = \pi_0\left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

כעת בשביל לקבל את π_0 נשתמש ב"משוואת הסכום לאחד".

$$1 = \pi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \pi_0\left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

או: $\pi_0 = \dfrac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{p}{1-p})^k}$

נשים לב שהטור הגיאומטרי במשוואה של π_0 מתכנס אמ"מ $\frac{p}{1-p} < 1$ או $p < 1/2$.

בנוסף נבחין כי המשוואות עבור π_k מתכנסות על פי אותו תנאי.

אם כך, המערכת הינה מתמידה חיוביות עבור $p < 1/2$. עבור $1/2 \le p$ המערכת אינה מתמידה חיובית.

לא נראה זאת כאן אבל ניתן להראות כי עבור $1/2 < p$ המערכת חולפת ועבור p=1/2 המערכת מתמידה אפס.

מחזוריות:

כאשר ניתחנו את דוגמא ב-6 (הילוך אקראי) נוכחנו לעובדה כי $P_{00}^{2n+1} = 0$ עבור $n = 1,2,3,...$, ז"א אם מתחילים את השרשרת במצב 0, אז ניתן להגיע למצב 0 רק בזמנים זוגיים. תופעה כזו היא מקרה של מחזוריות (השרשרת מאפשרת לבקר במצבים מסוימים רק בזמנים מסוימים).
כעת נגדיר מחזוריות באופן מדויק.

<u>הגדרה:</u>
המחזור של מצב i הוא המספר שהגדול ביותר אשר מחלק את כל ה n עבורם $P_{ii}^n > 0$. ז"א המחזור הוא המחלק המשותף הגדול ביותר (Greatest Common Divisor) של הקבוצה $I_i = \{n \ge 1 : P_{ii}^n > 0\}$.
שרשרת היא **מחזורית** עם קיים מצב אשר המחזור שלו גדול מ – 1, אחרת השרשרת היא **אי-מחזורית** (המחזור של כל המצבים הוא 1).

הערה: באופן כללי, כאשר שרשרת היא מחזורית, לא נוכל ליישם את רוב המשפטים של הפרקים הבאים לגבי השרשרת. נשאף לרוב "להתעסק" עם שרשראות אי-מחזוריות.

נחזור לדוגמא ב-6: כאן $I_0 = \{2,4,6,....\}$ ולכן המחלק המשותף הגדול ביותר של הקבוצה הוא 2 ולכן מצב 0 הוא מחזורי ולכן השרשרת היא מחזורית. המשמעות היא שניתן להיות במצב 0 רק בזמנים מסוימים (לא בכל הזמנים).

<u>דוגמא:</u>
נסתכל על דוגמא ב-8, מודל Ehrenfest עם N=5.

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי אם במצב התחלתי יש מספר אי-זוגי של כדורים בתא הימני (מצב המערכת), אז לאחר צעד תמיד יהיה מספר זוגי. אם כך לכל מצב i, $I_i=\{2,4,6,...\}$ ולכן השרשרת מחזורית.

תנאי מספיק לכך שמצב לא יהיה מחזורי ושהשרשרת תהיה אי-מחזורית ניתן בטענה הבאה:

<u>טענה:</u>
אם $P_{ii}>0$ אז מצב i אינו מחזורי. כך אם תנאי זה מתקיים לכל המצבים אז השרשרת היא אי-מחזורית.
הוכחה:
אם $P_{ii}>0$ אזי $1\in I_i$. אם כך המחלק המשותף הגדול ביותר של I_i הוא 1 והמצב אינו מחזורי.
מ.ש.ל.
זהו תנאי מספיק אבל אינו הכרחי:

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב-16 (שרשרת דטרמיניסטית למחצה). בשרשרת זו $P_{ii}=0$ לכל i ואולי באמת תחילה נראה כאילו ויש לה התנהגות מחזורית, אבל נבחין כי השרשרת אינה מחזורית:על מנת להוכיח כי השרשרת אינה מחזורית מספיק להראות שקיים לפחות מצב אחד לא מחזורי.נתבונן במצב "0" :
$I_0=\{3,4,6,8,...\}$, לכן ה-GCD(I_0)=1- המחלק המשותף הגדול ביותר ולכן "0" הוא מצב לא מחזורי ומכאן שגם השרשרת אינה מחזורית.

המשפט הבא, מבסס את המשמעות של מצב לא מחזורי (וכך של שרשרת אי-מחזורית):

<u>משפט (ללא הוכחה):</u>
אם למצב i יש מחזור בגודל 1 אזי קיים מספר n_0 כך שלכל $n\ge n_0$, $n\in I_i$.

המשמעות היא שמצבים אי-מחזוריים (או שרשראות אי-מחזוריות), מאבדים את ההתנהגות המובנית (כפי שהוצגה בדוגמא לעיל) לאחר מספר סופי של מצבים.

<u>משפט (ללא הוכחה):</u>
אם $i \leftrightarrow j$ אזי המחזור של מצב i שווה למחזור של מצב j .

כך בשרשרת אי-פריקה, כל המצבים מחזוריים או כולם לא מחזוריים והשרשרת אי-מחזורית.

נסיים אם משפט אשר מתאר כיצד נראית ריאליזציה של שרשרת מחזורית בשרשרת מרקוב אי-פריקה.

<u>משפט (ללא הוכחה):</u>
עבור שרשרת מרקוב אי-פריקה, ניתן למצוא חלוקה של מרחב המצבים S לקבוצות $C_0, C_1, ..., C_{d-1}$ כך שעבור כל קבוצה k, ועבור כל מצב $i \in C_k$ יתקיים:

$$\sum_{j \in C_{k+1}} P_{ij} = 1$$

וזאת כאשר אנו מסמנים $C_0 = C_d$ (סימון עבור הקבוצה האחרונה).

המשפט מראה כי בשרשרת מחזורית אי-פריקה, נעבור מקבוצת מצבים אחת להבאה וכן הלאה והאקראיות יכולה לקבוע רק לאיזה מצב בתוך הקבוצה הבאה נעבור (אבל לא לאיזה קבוצה נעבור כי כאן הסדר מוכתב מראש).

הערה: דוגמא נחמדה אשר ממחישה שרשראות מהסוג הזה היא דוגמת המשמרות:
קיימים 6 שומרים אשר עובדים ב – 3 משמרות ביום (בכל משמרת ישנו שומר אחד שעובד). שומרים 1,2 עובדים רק בראשונה, שומרים 3,4 רק בשנייה ושומרים 5,6 רק בשלישית. עם סיום כל משמרת, השומר שמסיים מזמן באקראי (משקים) את השומר הבא מתוך 2 השומרים אשר יכולים לשמור במשמרת הבאה.

פרק ב-5: חישובים הקשורים למיון מצבים – דוגמת מודל המהמר.

לאחר שחכרנו בפרק הקודם את נושא מיון המצבים לעומק, נרחיב בפרק זה ונציג ונחשב מספר גדלים הקשורים לנושא זה. כזכור $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$. להלן מספר גדלים מעניים הקשורים למשתנה מקרי זה:

- $f_{i,j}{}^{(n)} = P(T_j = n \mid X_0 = i)$ זהו הסיכוי להגיע ממצב i למצב j בפעם הראשונה לאחר n צעדים בדיוק.
- $f_{i,j} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i,j}{}^{(n)} = P(T_j < \infty | X_0 = i)$ הוא הסיכוי אי פעם להגיע ממצב i למצב j.

הערה: סימון זה תואם את הסימון $f_{i,i}$ אשר הוצג בפרק הקודם (כאשר קטן מאחד אז מצב i הוא חולף, כאשר שווה לאחד אז מצב i הוא מתמיד).

- $\mu_{i,j} = E[T_j \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{i,j}{}^{(n)}$ - -תוחלת מספר הצעדים הדרושים להגיע ממצב i מצב j.

חישוב $f_{i,i}$ עבור מצבים חולפים:

ראינו כי עבור מצב מתמיד $f_{i,i} = 1$ ועבור מצב חולף גודל זה קטן ממש מאחד (אלו היו ההגדרות).

ראינו גם את חשיבות $f_{i,i}$ בתיאור פילוג מספר הביקורים במצב חולף i, ($Geometric(1 - f_{i,i})$) סופר כישלונות) ולכן תוחלת מספר הביקורים היא $\frac{f_{i,i}}{1 - f_{i,i}}$.

אם כך לפעמים יהיה ברצוננו לחשב את $f_{i,i}$ עבור מצבים חולפים.

חישוב זה הוא פשוט עבור מקרים כמו המקרה המתואר בדוגמא ב- 0. אבל לפעמים הוא קצת יותר סבוך.
באופן כללי דרוש להיעזר בערכי $f_{i,j}$ לצורך חישוב $f_{i,i}$:

להלן **נוסחת צעד הראשון** עבור $f_{i,j}$:

$$f_{i,j} = P_{ij} + \sum_{k \in S \setminus \{j\}} P_{ik} f_{k,j}$$

הנוסחה אומרת שהסיכוי להגיע אי פעם ממצב I למצב j ($f_{i,j}$) הוא הסיכוי לעבור מ i ל j בצעד אחד (P_{ij}) ועוד הסיכוי לעבור דרך כל מצב אחר (k) ואז להגיעה למצב j. כך ניתן לחשב את $f_{i,i}$ ובדרך לחשב $f_{i,j}$ נוספים.
לא נרחיב נושא זה.

מודל המהמר – הסתברות הפגיעה במצב N:

כעת נסתכל על דוגמא ספציפית ובה נחשב את $f_{i,j}$ עבור j ספציפי.
נסתכל על דוגמא ב-7.
מרחב המצבים הוא $\{0,...,N\}$ ומטריצת המעבר היא:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ראשית אנו רואים כי מצבים 0 ו – N הינם סופגים ולכן הן מחלקות קשירות מתמידות. שאר המצבים: $\{1,...,N-1\}$ הינם חולפים ומהווים מחלקה חולפת.

נסמן ב f_{iN} את ההסתברות שהמהמר מסיים ברווח (נספג במצב N) במידה והוא מתחיל/נמצא במצב i.
$f_{iN}=P(\exists m>n,X_m=N\mid X_n=i)$. בגלל שמצב N הוא סופג ובגלל ההומוגניות בזמן של השרשרת ניתן לכתוב זאת גם כך: $f_{iN}=P(\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geq n_0 X_n=N\mid X_0=i)$.
וכמובן ניתן גם לציין זאת כפי שצוין בתחילת הפרק באמצעות המשתנה המקרי T_N.
נבחין כי $f_{0N}=0$ ו $f_{NN}=1$.
מהו f_{iN} עבור $i\notin\{0,N\}$?
$f_{i,N}=pf_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$. מדוע? ראשית קל לראות שזה מה שמקבלים כאשר מציבים בנוסחה הכללית עבור $f_{i,j}$ אשר הוצגה קודם. שנית ניתן לראות שהמאורה אשר מתואר ע"י $f_{i,N}$ (מעבר ממצב i למצב N – נסמן ב A) ניתן לחלוקה לשני המאורעות הבאים:

- הצעד הראשון היה למצב i+1 ולאחר מכן עוברים ממצב i+1 למצב N (נסמן ב A_{i+1}).
- הצעד הראשון היה למצב i-1 ולאחר מכן עוברים ממצב i-1 למצב N (נסמן ב A_{i-1}).

ולכן $f_{i,N}=P(A)=P(A_{i+1})+P(A_{i-1})=pf_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$.

אם כך,

$$(p+q)f_{i,N}=pf_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$$
או
$$pf_{i,N}+qf_{i,N}=pf_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$$
או
$$q(f_{i,N}-f_{i-1,N})=p(f_{i+1,N}-f_{i,N})$$
או
$$\frac{q}{p}(f_{i,N}-f_{i-1,N})=(f_{i+1,N}-f_{i,N})$$

$f_{i,N}$ היא פונקציה של i עבור הערכים $i=1,...,N$ ומקבלת 0 עבור i=1 ו 1 עבור i=N. כיצד היא מתנהגת בערכי הביניים? ראשית נטפל במקרה הפשוט יותר ובו p=q=1/2. אם כך המשוואה היא $f_{i,N}-f_{i-1,N}=f_{i+1,N}-f_{i,N}$ וזה אומר שהשינוי בערך הפונקציה הוא קבוע לכל הקטע ולכן הפונקציה חייבת להיות ליניארית ובגלל שבקצבות ערכיה נתונים (0 ו – 1) אזי הפונקציה היא:
$f_{i,N}=\frac{i}{N}$.

המשמעות היא כמובן שבמקרה בו p=q=1/2 (המשחק הוגן לחלוטין) אז הסיכוי לסיים ברווח עולה ליניארית ככל שמתחילים עם יותר כסף.

ניתן לראות תוצאה זו גם באופן אלגברי: אם $f_{i,N}-f_{i-1,N}=f_{i+1,N}-f_{i,N}$ אזי $f_{i,N}-f_{i-1,N}=c$ (קבוע לכל i). עכשיו:

$$1=f_{N,N}-f_{0,N}=\sum_{i=1}^{N}(f_{i,N}-f_{i-1,N})=Nc$$

(כאשר השוויון השמאלי הוא בגלל ערכי הפונקציה בקצוות, השוויון הבא הוא טור טלסקופי) והשוויון לאחר מכן נובע מכך ש $f_{i,N}-f_{i-1,N}=c$.

אז אם כך $f_{i,N}-f_{i-1,N}=\frac{1}{N}$ אז אם כך:

$$f_{i,N}=f_{i,N}-f_{0,N}=\sum_{j=1}^{i}(f_{j,N}-f_{j-1,N})=\frac{i}{N}$$

<u>דוגמא (עבור p=q=1/2), התאמת מטבעות:</u>
לאיציק יש 15 מטבעות ולמוחמד יש 10 מטבעות והם משחקים משחק: כל אחד מטיל מטבע, במידה והמטבעות זהים (אותו צד) אז איציק מקבל את שתי המטבעות, במידה והמטבעות שונים אז מוחמד מקבל את שתי המטבעות. הם מפסיקים את המשחק ברגע שאחד מהם קיבל את כל המטבעות. מה ההסתברות שמוחמד יצא מרווח?

תשובה: נמדל כמודל המהמר כאשר ערך התהליך מציין את הונו של מוחמד, וN=25. אם כך $f_{10,25}=\frac{10}{25}$ הוא הסיכוי שמוחמד יצא בעל הרווח.

נמשיך ונחשב כעת את $f_{i,N}$ עבור המקרה הכללי ($p\in(0,1)$).
ראינו כי מתקיים:

$$\frac{q}{p}(f_{i,N}-f_{i-1,N})=(f_{i+1,N}-f_{i,N})$$

נגדיר $d(i)=f_{i,N}-f_{i-1,N}$
אז

$$\frac{q}{p}d(i)=d(i+1)$$

מהו $d(1)$?

$$d(1)=f_{1,N}-f_{0,N}=f_{1,N}$$

אם כך $d(i)=\frac{q}{p}d(i-1)=\frac{q}{p}\frac{q}{p}d(i-2)=...=(\frac{q}{p})^{i-1}d(1)=(\frac{q}{p})^{i-1}f_{1,N}$

אם כך,

$$f_{i,N}-f_{i-1,N}=(\frac{q}{p})^{i-1}f_{1,N}$$

ולכן

$$1=f_{N,N}-f_{0,N}=\sum_{i=1}^{N}f_{i,N}-f_{i-1,N}=\sum_{i=1}^{N}(\frac{q}{p})^{i-1}f_{1,N}=f_{1,N}\sum_{i=1}^{N}(\frac{q}{p})^{i-1}=f_{1,N}\sum_{i=0}^{N-1}(\frac{q}{p})^{i}=f_{1,N}\frac{1-(\frac{q}{p})^N}{1-\frac{q}{p}}$$

ולכן

$$\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}=f_{1,N}$$

עכשיו,

$$f_{i,N}=f_{i,N}-f_{0,N}=\sum_{j=1}^{i}(f_{i,N}-f_{i-1,N})=\sum_{j=1}^{i}(\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N})(\frac{q}{p})^{j-1}=$$

$$\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}\sum_{j=0}^{i-1}(\frac{q}{p})^{j}=\frac{1-\frac{q}{p}}{1-(\frac{q}{p})^N}\frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-\frac{q}{p}}=\frac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N}$$

<u>דוגמא:</u>

ברולטה, סיכוי הזכייה הוא $p=\frac{18}{38}\approx 0.47$. אדם מגיע עם 50$ לקזינו ומעוניין להכפיל את הונו (להגיע ל 100$) בהימורים של 1$. מה סיכוי ההצלחה שלו?

$q=\frac{20}{38}$ ולכן $\frac{q}{p}=\frac{20}{18}$

אם כך,

$$f_{50,100}=\frac{1-(\frac{20}{18})^{50}}{1-(\frac{20}{18})^{100}}\approx\frac{1-194}{1-194^2}=\frac{1}{1+194}\approx 0.005$$

רואים שהסיכוי להכפיל את הכסף בהימורים קטנים הוא אפסי (לעומת זאת בהימור חד פעמי הסיכוי כמעט חצי).

<u>מודל המהמר – תוחלת מספר הצעדים עד הפגיעה במצב 0 או N:</u>

כעת נתעניין בשאלה אחרת הקשורה למודל המהמר – תוחלת מספר הצעדים עד לספיגה (פגיעה במצב 0 או N).

נגדיר $\tau=\min\{n\in\mathbb{N}\mid X_n\in\{0,N\}\}$ להיות זמן הפגיעה באחד משני המצבים הסופגים. נרצה לחשב את $\mu_i=E[\tau\mid X_0=i]$.

ברור כי $\mu_0 = \mu_N = 0$.

עבור $i \in \{1,...,N-1\}$ נחשב את μ_i ע"י הסתכלות על כל מה שיכול להתרחש בצעד הראשון:
$\mu_i = 1 + p\mu_{i+1} + q\mu_{i-1}$. נוסחה זאת נובעת מהעובדה שדרוש צעד אחד לנוע לאחד משני המצבים i+1 או i-1 וההסתברויות לנוע לכל אחד מהמצבים הללו הינן p או q בהתאמה. לאחר מעבר למצבים אלו, תוחלת מספר הצעדים עד לספיגה תלויה במצב החדש μ_{i+1} או μ_{i-1} .

נחשב את μ_i אך למקרה בו $p = q = \frac{1}{2}$.

מתקיים:

$$\mu_i = 1 + \frac{\mu_{i+1} + \mu_{i-1}}{2}$$

או

$\mu_{i+1} - \mu_i = -2 + \mu_i - \mu_{i-1}$ נסמן משוואה זו ב (*).

נסכם כעת משוואה זו עבור $i = 1,...,N-1$ ונקבל

$$\mu_N - \mu_1 = -2(N-1) + \mu_{N-1} - \mu_0$$

נבחין כי מתקיים $\mu_0 = \mu_N = 0$

בנוסף על פי סימטריה צריך להתקיים ש - $\mu_1 = \mu_{N-1}$

ולכן:

$$0 - \mu_1 = -2(N-1) + \mu_1 - 0$$

ולכן:

$$\mu_1 = \mu_{N-1} = N-1$$

על פי (*) מתקיים:

$$\mu_2 - \mu_1 = -2 + \mu_1 - \mu_0 = -2 + (N-1)$$

באותו אופן מתקיים:

$$\mu_3 - \mu_2 = -2 + \mu_2 - \mu_1 = -2 - 2 + (N-1) = -4 + (N-1)$$

או באופן כללי:

$$\mu_{i+1} - \mu_i = -2i + (N-1)$$

כאשר נסכם משוואה זו על הערכים: $i \in \{0,..., j-1\}$ נקבל:

$$\sum_{i=0}^{j-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) = \sum_{i=0}^{j-1} (-2i + (N-1))$$

ולכן:

$$\mu_j = -2\sum_{i=0}^{j-1} i + j(N-1)$$

ולכן:

$$\mu_j = -2\frac{(j-1)(j-1+1)}{2} + j(N-1) = j(N-1) - j(j-1) = j(N-j)$$

דוגמא:

נפעיל משוואה זו ($\mu_j = j(N-j)$) על דוגמת התאמת המטבעות מהסעיף. שם התקיים כי N=25 והערך ההתחלתי היה j=15. אם כך תוחלת מספר השלבים במשחק הוא $15(25-15)=150$.

לא נרחיב כאן על המקרה הכללי יותר בו $p \in (0,1)$ אלה רק נציין את התוצאה:

$$\mu_i = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$$

פרק ב-6: ארוגודיות וסטציונריות

הסבר אינטואיטיבי לארוגודיות:

נניח ונתון לנו מודל של תהליך סטוכסטי כלשהו $X=\{X_t, t\in T\}$ ואנחנו מממשים סימולציה של התהליך (הכוונה היא לסימולציה במחשב ובה המחשב מגריל את המשתנים המקריים הדרושים ויכול לייצר ריאליזציות של התהליך). מטרת הסימולציה היא להריץ את התהליך ולאסוף סטטיסטיקות לגבי התפתחות התהליך. לדוגמא: אם התהליך הוא מודל של מלאי, אז היינו רוצים לראות מהו אחוז הזמן ובו במערכת יש חוסר מלאי (נסמן מדד זה ב - θ).

כאשר אנו מריצים את הסימולציה אז עומדות בפניו שתי אפשרויות:
1. להריץ את הסימולציה על ריאליזציה אחת לפרק זמן מאוד ארוך, וכך לאמוד את θ.
2. לבצע הרבה הרצות, ובכל הרצה לאמוד את θ, ולשכלל את תוצאות כל ההרצות לאמד אחד.

בכלליות, תהליך סטוכסטי הוא **ארוגודי** אם ניתן להסתפק בשיטה מס' 1 (סימלוץ ריאליזציה בודדת). ז"א הסתכלות על ריאליזציה בודדת (אך ערוכה) תספק לנו את כל המידע הדרוש לגבי חוק ההסתברות של התהליך.

הגדרה זו אינה פורמאלית, הגדרה פורמאלית של מונח הארוגודית עבור תהליכים סטוכסטיים כללים דורשת תחכום מתמטי רב.

<u>להלן דוגמא של המונח ארוגודיות:</u>

יהיה $\{X_t, t\in\mathbb{R}^+\}$ תהליך סטוכסטי (מרחב הפרמטר הוא החיובים). אם כך אז אפשר להסתכל על $\{X_t, t\in\mathbb{R}^+\}$ גם כעל אוסף של משתנים מקריים וגם כפונקציה של $\omega\in\Omega$. נניח ואנו מריצים ריאליזציה בודדת. בכך בעצם בחרנו $\omega_0\in\Omega$ והסתכלנו על הריאליזציה אשר נוצרת מ ω_0. במידה ואנו מסתכלים על הריאליזציה אשר נוצרה רק ב T יחידות הזמן הראשונות. אזי הדרך הכי טובה לשערך את תוחלת התהליך על פי ההרצה שהרצנו היא:

$\widehat{EX}^T(\omega_0)=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T X_t(\omega_0)dt$. (זהו כמובן ממוצע התהליך על פני פרק הזמן $[0,T]$).

נניח ואנו לוקחים T מאוד גדול ($T\to\infty$). האם האמד שלנו $\widehat{EX}^T(\omega_0)\underset{T\to\infty}{\to}EX_T$ בהסתברות 1?

במידה וכן אז התהליך הוא ארוגודי ביחס לתוחלת. ז"א, הייתה לנו ריאליזציה בודדת וכאשר הסתכלנו עלייה מספיק זמן (הרצנו אותה עד ל T גדול), הערך אשר קבלנו שאף לתוחלת בזמן T מאוד גדול: $\lim\limits_{T\to\infty}EX_T$.

במידה והתהליך לא היה ארוגודי, אז לצורך אמידה נכונה של $\lim\limits_{T\to\infty}EX_T$ דרוש לקחת מספר ריאליזציות ($\omega_0,\omega_1,\omega_2,...,\omega_{N-1}\in\Omega$). ועבור כל ω_i להריץ עד לזמן T ולקבל $X_T(\omega_i)$ ואז לאמוד את התוחלת כך:

$$\widehat{\lim_{T\to\infty}EX_T}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}X_T(\omega_i).$$

הערה: ייתכן ותהליך סטוכסטי הוא ארוגודי ביחס לערך מסוים אשר קשור לחוק ההסתברות (לדוגמא: התוחלת) אבל אינו ארוגודי לגבי ערך אחר (לדוגמא: כל חוק ההסתברות). לא נדון בדוגמאות כאלו כאן.

ארגודיות של שרשראות מרקוב:

לאחר הדיון המופשט לגבי ארגודיות נחזור לתהליכים הסטוכסטיים אשר אנו מכירים, שרשראות מרקוב. עבור שרשראות מרקוב, ארגודיות הוא מונח המוגדר היטב וזה יהיה הנושא של המשך החלק הזה של שרשראות מרקוב.

לפני שנדגים את המשמעות של ארגודיות של שרשראות מרקוב בדוגמא, נגדיר מושג פשוט ושימושי, פונקציות רווח.

הגדרה:
פונקציה $r : S \to \mathbb{R}$ (ממרחב המצבים S לממשיים) היא **פונקצית רווח**.
בנוסף, **הרווח הממוצע** על פני n יחידות הזמן הראשונות של ריאליזציה $\{x_0, x_1, ...\}$ הוא: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(x_k)$.

דוגמא:
כאשר פונקצית הרווח היא $r(i) = I_{\{j\}}{}^{(i)}$ (עבור $i \in S$). אזי הרווח לכל מצב ששונה מ j הוא 0. והרווח למצב j הוא 1. כך אם מתקבלת התחלה של ריאליזציה: $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ אזי $\sum_{k=0}^{n-1} r(x_k)$ הוא מספר הפעמים אשר הריאליזציה ביקרה במצב j במהלך התחלה זו. ולכן הרווח הממוצע הוא פרופורציית הזמן שבו הריאליזציה הייתה במצב i.
לדוגמא, עבור דוגמא ב-3 (השרשרת הדו-מצבית). נניח כי הדוגמא משקפת את מצב מכונה, יכול להיות תקין 0, או תקול 1. אזי עבור $r(i) = I_{\{0\}}{}^{(i)}$, הרווח הממוצע משקף את פרופורציית הזמן שהמכונה תקינה (ולא תקולה).

דוגמא:
נסתכל על שרשרת המלאי (דוגמא ב-9). בדוגמא זו המצב של התהליך מסמל את מספר הפריטים אשר במלאי בזמן n. נגדיר כאן את פונקצית הרווח להיות $r(i) = ci$ (כאשר c קבוע חיובי). כל בעל מכולת, מפעל או רשת חנויות יודע כי מלאי גורר עלויות ולכן כדאי למזער (ככל שניתן) את כמות המלאי. פונקצית הרווח אשר קבענו מציינת את העלות הנגרמת עקב המלאי כאשר העלות ליחידה אחת היא c. אם כך לאחר הרצה של התהליך למשך n צעדים (n ימים). הרווח הממוצע מציין את העלות הממוצעת הנגרמת מהחזקת מלאי.

כעת לאחר שהכרנו את המונח של פונקצית רווח, נסתכל על דוגמא אשר תמחיש את המשמעות של ארגודית של שרשראות מרקוב.

דוגמא:
נסתכל על השרשרת בדוגמא ב – 14, ראינו כי בדוגמה זו המחלקות החולפות הן $\{3\}, \{2\}$ והמחלקות המתמידות הן $\{1,5\}$, $\{4,7,6\}$.
בנוסף אנו רואים כי במידה ומתחילים לרוץ במצב 2 אזי יש סיכוי שהריאליזציה **"תיספג"** במחלקה $\{1,5\}$ וסיכוי שהריאליזציה תיספג במחלקה $\{4,7,6\}$.
את הסיכוי להיספג בכל אחת מהמחלקות לא קשה לחשב (אבל גם לא טריוויאלי). בכל מקרה הסיכויים קיימים ונסמנם:

$f_{2,\{1,5\}}$ ו $f_{2,\{4,7,6\}}$ (לא נתעסק בלחשב אותם כעת).
מתקיים כי $f_{2,\{4,7,6\}}+f_{2,\{1,5\}}=1$ (התהליך בהכרח נספג באחת מהמחלקות הללו).
כעת נניח כי פונקצית הרווח היא פונקצית הזהות $r(i)=i$
בנוסף נניח כי $P_{X_0}(i)=I_{\{2\}}^{(i)}$, התהליך מתחיל במצב 2 (בהסתברות 1).
בגלל שהתהליך ייספג באחת משתי המחלקות הסופגות ברור כי כל ריאליזציה תהייה מהצורה:

- $x_0,x_1,...,x_m,y_{m+1},y_{m+2},...$ כאשר $y_i\in\{1,5\}$.

או

- $x_0,x_1,...,x_m,z_{m+1},z_{m+2},...$ כאשר $z_i\in\{4,7,6\}$.

(עבור m כלשהו).
ז"א לאחר זמן מספיק ארוך (m), התהליך ייספג באחת משתי המחלקות הסופגות (ולאחר מכן יישאר במחלקות אלו). אם כך עבור n מספיק גדול (גדול בהרבה מ – m). יתקיים כי הרווח הממוצע יהיה:

- מבוסס על הרווח הממוצע במחלקה $\{1,5\}$.

או

- מבוסס על הרווח הממוצע במחלקה $\{4,7,6\}$.

ז"א עבור n מספיק גדול, הרווח המקבל מהמצבים החולפים בהם התהליך שהה בהתחלה (מצבים 2, 3) לא תורם באופן משמעותי לרווח הממוצע.
המצבים בכל אחת משתי המחלקות $\{1,5\}$, $\{4,7,6\}$ הינם מתמידים ונראה בהמשך כי עבור שרשרת מרקוב המורכבת אך ורק מהמחלקה האי-פריקה $\{1,5\}$ קיימות פרופורציות π_1,π_5 כך ש $\pi_1+\pi_5=1$. ו π_i הוא ההסתברות שהתהליך נמצא במצב i לאחר שרץ הרבה מאוד זמן.
כנ"ל עבור שרשרת מרקוב אשר מורכבת רק מהמחלקה $\{4,7,6\}$ קיימות פרופורציות π_4,π_7,π_6 אשר סכומם 1 וגם להן את אותה משמעות.
אם כך:

- במידה ונספגנו במחלקה $\{1,5\}$ אז הרווח הוא הממוצע הוא בקרוב $1\cdot\pi_1+5\cdot\pi_5$

או

- במידה ונספגנו במחלקה $\{4,7,6\}$ אז הרווח הוא הממוצע הוא בקרוב $4\cdot\pi_4+7\cdot\pi_7+6\cdot\pi_6$

אם כך לסיכום, לא די בריאליזציה אחת בשביל לאמוד את הרווח הממוצע (זהו הערך הממוצע של התהליך) ולכן השרשרת המרקוב הנ"ל אינה ארגודית. כי הרי בשביל לשערך מהו הרווח הממוצע דרוש להריץ הרבה ריאליזציות ולמצע על פני הריאליזציות הללו.

מה אם כך הוא התנאי המתאים לארגודיות של שרשראות מרקוב?

<u>הגדרה:</u>
מצב בשרשרת מרקוב נקרא **ארגודי** אם הוא אינו מחזורי ומתמיד חיובי.
שרשרת מרקוב היא **ארגודית** אם כל מצבייה הינם ארגודים.

הערה: היה ניתן להגדיר כאן ללא הדרישה של חוסר מחזוריות ועדיין חלק מתכונות הארגודיות היו קיימות. למרות זאת, אנו מעדיפים בקורס זה "לא להסתבך" עם סוגיות הנובעות ממחזוריות.

אם כך שרשרת מרקוב אשר כל מצביה מתמידים חיובית והשרשרת אינה מחזורית היא ארגודית ובהתאם נראה בפרק הבא כי לשרשראות כאלו תכונות נפלאות (קיום התפלגות סטציונרית - π). בפרט ידוע כי עבור שרשרת בעלת מרחב מצבים סופי אי-פריקה, כל המצבים מתמידים ולכן כל עוד שלא קיימות "בעיות של מחזוריות בשרשראות כאלו" הן יהיו ארגודיות.

סטציונריות:

פגשנו כבר מונח הקרוב וסטציונריות בחלק א' של הקורס: אינקרימנטים סטציונרים. המשמעות שם הייתה שחוק ההסתברות של האינקרימנטים של התהליך קבוע לאורך הזמן. כעת נתאר מהו תהליך סטציונרי. זהו מושג חזק יותר מתהליך בעל אינקרימנטים סטציונרים. תהליך סטציונרי הוא תהליך אשר חוק ההסתברות שלו עצמו (לא רק של האינקרימנטים) אינו משתנה לאורך זמן.

<u>הגדרה:</u>
תהליך סטוכסטי $\{X_n, n \geq 0\}$ הוא **סטציונרי** עם עבור כל $m \in \mathbb{N}$ ועבור כל $n_1,...,n_k \in \mathbb{N}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ (לכל אורך של סדרה) מתקיים כי ההתפלגות המשותפת של $X_{n_1},...,X_{n_k}$ זהה להתפלגות המשותפת של $X_{n_1+m},...,X_{n_k+m}$.

הערה: קל לראות כי סטציונרית גוררת אינקרימנטים סטציונרים.
הערה: ההגדרה דורשת שההתפלגות השולית של התהליך בכל נקודת זמן תהייה זהה.

<u>דוגמא:</u>
אוסף משתנים מקריים i.i.d. הוא תהליך סטציונרי.

<u>דוגמא:</u>
תהליך ספירה ברנולי אינו סטציונרי.

סטציונריות של שרשראות מרקוב:

מה לגבי שרשראות מרקוב?
בפרק 2, ראינו שבהינתן התפלגות התחלתית P_{X_0} ניתן לקבל את P_{X_n} ע"י הכפלת וקטור השורה P_{X_0} במטריצה P^n (המינוחים כאן הם עבור המקרה של מרחב מצבים סופי אבל התוצאות הינן כלליות) ז"א קבלנו:

$$P_{X_n} = P_{X_0} P^n$$

לרוב P_{X_n} יהיה שונה מ - P_{X_0} ולכן שרשראות מרקוב לרוב יהיו לא סטציונריות.
אבל מה עם נבחר את P_{X_0} כך שיקיים:

$$P_{X_0} = P_{X_0} P^n$$

אם ניזכר במשוואות שווי המשקל:

$$\pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} \quad \forall j \in S$$
$$\sum_{j \in S} \pi_j = 1$$

אז הן בדיוק פותרות עבור ה P_{X_0} הזה אשר מקיים את התנאי.
בפרקים הבאים נראה שכאלו קיימות רק כאשר השרשרת היא אי-פריקה ומתמידה חיובית, אבל במידה וזה המצב, אז מקבלים שאם משתמשים בפתרון המשוואות (קראנו לו ההתפלגות הסטציונרית) לצורך ההתפלגות ההתחלתית אז מקבלים שרשרת מרקוב אשר מהווה תהליך סטוכסטי סטציונרי.
הערה: לא קל להוכיח זאת.

פרק ב-7: הסתברויות גבוליות/סטציונריות.

מכאן והלאה נתמקד בשרשראות מרקוב ארגודיות (שרשראות אי-פריקות, אי-מחזוריות אשר כל מצביהם מתמידים חיובית).

משוואות שווי משקל ומשמעות הפתרון שלהן:

שוב נזכר **במשוואות שווי המשקל**:

$$\pi_j = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} \quad \forall j \in S$$

$$\sum_{j\in S} \pi_j = 1$$

לצורך המחשה נסתכל על קבוצת המשוואות כאשר S סופי. יש כאן $|S|+1$ משוואות:

$$\pi_1 = \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + ... + \pi_N P_{N1}$$

$$\pi_2 = \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + ... + \pi_N P_{N2}$$

$$...$$

$$\pi_N = \pi_1 P_{1N} + \pi_2 P_{2N} + ... + \pi_N P_{NN}$$

$$\pi_1 + \pi_2 + ...\pi_N = 1$$

מה המשמעות של פתרון המשוואות (הוקטור π)? יש לווקטור זה מספר משמעויות:

<u>משמעות 1: **ההתפלגות הסטציונרית**</u>

ראינו בפרק הקודם שבמידה ונבחר $P_{X_0} = \pi$ אז התהליך יהיה סטציונרי. (ז"א $P_{X_n} = \pi$ לכל n). ולכן π נקרא וקטור ההסתברות הסטציונרית או **ההתפלגות הסטציונרית**.

<u>משמעות 2: **ההתפלגות הגבולית**</u>

גם אם $P_{X_0} \neq \pi$ אז עדין נקבל כי עבור n גדול $P_{X_n} \approx \pi$ ובגבול (כאשר n אינסוף) נקבל שוויון: $\lim_{n\to\infty} P_{X_n} = \pi$. באופן שקול מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ לכל $i,j \in S$. ולכן π נקרא וקטור ההסתברויות הגבוליות או **ההתפלגות הגבולית**. את עובדה זו נוכיח בהמשך פרק זה (ההוכחה אינה טריוויאלית בכלל).

<u>משמעות 3: **ההופכי של תוחלת זמן החזרה למצב**</u>

כזכור זמן הפגיעה במצב i הוא המשתנה המקרי $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$. כאשר דנו במצבים מתמידים חיובית ומתמידים אפס ציינו כי $E[T_i \mid X_0 = i] = \frac{1}{\pi_i}$ עבור שרשרת אי-פריקה אשר כל מצביה מתמידים חיוביות. גם את עובדה זו נוכיח בהמשך פרק זה (גם כאן ההוכחה אינה טריוויאלית).

<u>משמעות 4: **ההתפלגות המשמשת לחוק החזק עבור שרשראות מרקוב**</u>

כזכור מהפרק הקודם הרווח הממוצע עבור פונקצית רווח $r : S \to \mathbb{R}$ כאשר הריאליזציה היא $\{x_0, x_1, ...\}$ הוא: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(x_k)$. **החוק החזק עבור שרשראות מרקוב** הוא:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r(X_k)=\sum_{i\in S}r(i)\pi_i$ בהסתברות 1.

ז"א הרווח הממוצע שואף לתוחלת הרווח המתקבלת תחת ההתפלגות π.

מקרה פרטי של חוק זה מתקבל ע"י פונקצית הרווח $r(i)=I_{\{j\}}{}^{(i)}$. במקרה זה החוק טוען:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}I_{\{j\}}{}^{(X_k)}=\pi_j$ בהסתברות 1. ז"א פרופורציית הזמן בו התהליך נמצע במצב j שואפת ל π_j.

<u>דוגמא:</u>

נזכר בדוגמא ב – 1, מזג אוויר.

להלן המצבים בדוגמא:

1 – מעונן כבד.

2 – מעונן חלקי.

3 – שמיים נקיים.

להלן מטריצת המעבר:

$$P=\begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix}$$

נרשום את משוואות שווי המשקל:

בצורה מטריציונית המשוואות הן

$$\pi P=\pi$$
$$\pi e=1$$

(כאשר π הוא וקטור שורה ו e הוא וקטור עמודה של אחדים).

אם כך,

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}=1$$

וכאשר משוואות אלו נרשמות באופן מפורש:

$$\pi_1.4+\pi_2.2+\pi_3.1=\pi_1$$
$$\pi_1.6+\pi_2.5+\pi_3.7=\pi_2$$
$$\pi_1 0+\pi_2.3+\pi_3.2=\pi_3$$
$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

נחפש את פתרון המשוואות:

נתחיל בפתרון המשוואה השלישית, נניח כי π_3 ידוע:

$$\pi_2=\frac{.8}{.3}\pi_3=\frac{8}{3}\pi_3$$

נציב במשוואה השנייה:

$$\pi_1.6+(\frac{4}{3}+.7)\pi_3=\frac{8}{3}\pi_3$$
או
$$\pi_1.6=(\frac{4}{3}-.7)\pi_3=.6333\pi_3$$
או
$$\pi_1=1.0556\pi_3$$
נשתמש עכשיו במשוואה האחרונה (משוואת הסכום לאחד):
$$1.0556\pi_3+2.6667\pi_3+\pi_3=1$$
או
$$4.7223\pi_3=1$$
$$\pi_3=.2118$$
ולכן
$$\pi_1=1.0556\pi_3=1.0556\cdot.2118=.2235$$
ולכן
$$\pi_2=\frac{8}{3}\pi_3=\frac{8}{3}.2118=.5647$$
אם כך קבלנו שהוקטור π הוא $(.2118 \quad .5647 \quad .2235)$

נתחיל להתבונן בארבעת המשמעויות של π:

<u>התפלגות סטציונרית:</u> אם מתחילים את תהליך מזג האוויר על פי ההתפלגות π אזי פילוג התהליך בכל נקודת זמן יהיה π.

<u>התפלגות גבולית:</u> נראה מה קורה כאשר המטריצה P מועלה בחזקות:

להלן דוגמא שנלקחה מתוכנת MATLAB:

```
>> P =[.4 .6 0
       .2 .5 .3
       .1 .7 .2]
P =
   0.4000   0.6000        0
   0.2000   0.5000   0.3000
   0.1000   0.7000   0.2000
>> P^2
ans =
   0.2800   0.5400   0.1800
   0.2100   0.5800   0.2100
   0.2000   0.5500   0.2500
>> P^3
ans =
   0.2380   0.5640   0.1980
   0.2210   0.5630   0.2160
   0.2150   0.5700   0.2150
>> P^4
ans =
   0.2278   0.5634   0.2088
   0.2226   0.5653   0.2121
   0.2215   0.5645   0.2140
>> P^5
ans =
   0.2247   0.5645   0.2108
   0.2233   0.5647   0.2120
   0.2229   0.5649   0.2121

>> P^6
ans =
```

```
   0.2239   0.5646   0.2115
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2234   0.5647   0.2119
>> P^7
ans =
   0.2236   0.5647   0.2117
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
>> P^8
ans =
   0.2236   0.5647   0.2117
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
>> P^9
ans =
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
```

רואים כמובן ששורות P^n מתכנסות ל π. כבר לאחר תשעה צעדים השורות זהות כאשר בוחנים אותן בדיוק של 4 ספרות משמעותיות. המשמעות היא שבכל תנאי התחלה (P_{X_0}) פילוג התהליך לאחר תשעה צעדים יהיה זהה (עד לדיוק של 4 ספרות). ז"א תנאי ההתחלה אינם משמעותיים בשרשראות ארגודיות.

הערה: לא נמשיך נדון ב"קצב ההתכנסות" $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ אבל הדוגמא המספרית לעיל מעידה שהוא "מהיר".

<u>תוחלת זמן החזרה למצב:</u>

נסתכל על π_i^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 4.47 & 1.77 & 4.72 \end{pmatrix}$$

ז"א שבמידה והיום מעונן כבד (מצב 1) אז תוחלת מספר הימים עד ששוב יהיה מעונן כבד היא 4.47 וכו'.

<u>החוק החזק:</u>

ראשית כאשר משתמשים בפונקצית רווח שהיא אינדיקאטור עבור מצב מסוים לדוגמא (מצב 2):

$r(i) = I_{\{2\}}^{(i)}$ אזי לפי החוק החזק פרופורציית הזמן בו התהליך הוא במצב 2 (מעונן חלקי) היא $\pi_2 = .5647$.

שנית נניח ופונקצית הרווח מציינת את הטמפרטורה במעלות צלסיוס בכל מצב:

$$r(i) = \begin{cases} 13 & i=1 \\ 17 & i=2 \\ 25 & i=3 \end{cases}$$

אזי הטמפרטורה הממוצעת שואפת לטמפרטורה:

$$13\pi_1 + 17\pi_2 + 25\pi_3 = 17.8$$

<u>אינטואיציה של משוואות שווי המשקל:</u>

נניח שמרחב המצבים הוא $\{1,2,3,4\}$ נסתכל על המשוואה עבור j=3:

$$\pi_3 = \pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} + \pi_4 P_{43}$$

מה המשמעות של משוואה זו?

צד שמאל הוא π_3, ההסתברות שהתהליך הסטציונרי (או התהליך הגבולי) יהיה במצב 3 בזמן מסוים (נניח n).
צד ימין מתאר את כל הדרכים להגיע למצב 3 מהזמן הקודם (n-1).
ניתן בזמן הקודם להיות בכל אחד מהמצבים: $\{1,2,3,4\}$ וההסתברות להיות בכל אחד מהמצבים הללו ניתנת על פי π וההסתברות לעבור למצב 3 על פי העמודה השלישית ב P.
אם כך המשוואות מתארות עבור כל מצב, את כל הדרכים אשר ניתן להגיע להיות במצב הזה.

משוואות שווי משקל מפורטות:

לפעמים ניתן לנסח ולפתור משוואות קצת שונות עבור π:

<u>הגדרה:</u>
משוואות תנאי שווי משקל מפורט (detailed balance condition) הן:
$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ לכל $i,j \in S$.
$$\sum_{i\in S} \pi_i = 1$$
כאן ישנה משוואה עבור כל צמד מצבים ב S ועוד משוואת הסכום לאחד.

<u>טענה:</u>
במידה וקיים פתרון למשוואות תנאי שווי המשקל המפורט אז קיים פתרון למשוואות שווי המשקל.
<u>הוכחה:</u>
ניקח את המשוואות $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ עבור j קבוע כלשהו ונסכם על כל ה i:
$$\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} = \sum_{i\in S} \pi_j P_{ji}.$$
בצד ימין π_j קבוע ביחס לסכום ו $\sum_{i\in S} P_{ji} = 1$ ולכן
$$\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j.$$
אם כך הפתרון π של משוואות תנאי שווי המשקל המפורטות מקיים גם את משוואות שווי המשקל.
מ.ש.ל.

<u>דוגמא:</u>
נסתכל על השרשרת הבאה:
$S = \{1,2,3,4\}$ ומתאפשרת תנועה בין מצבים עוקבים בלבד (כולל בין מצבים 4 ו- 1) על פי המטריצה הנ"ל:
$$P = \begin{pmatrix} .5 & .1 & 0 & .4 \\ .3 & .5 & .2 & 0 \\ 0 & .2 & .5 & .3 \\ .4 & 0 & .1 & .5 \end{pmatrix}$$

משוואות תנאי שווי משקל המפורטות:
בין מצבים 1,2: $\pi_1 .1 = \pi_2 .3$

בין מצבים 2,3: $\pi_2.2 = \pi_3.2$

בין מצבים 3,4: $\pi_3.3 = \pi_4.1$

בין מצבים 4,1: $\pi_4.4 = \pi_1.4$

בין שאר המצבים $P_{ij} = 0$ ולכן אין משוואות.

משוואת הסכום לאחד: $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 = 1$

אם כך: $\pi_2 = \pi_3$ ו $\pi_1 = \pi_4$

ובגלל ש - $\pi_1.1 = \pi_2.3$ אז $\pi_1 = \pi_2 3$ וכשנציב במשוואת הסכום לאחד:

$$3\pi_2 + \pi_2 + \pi_2 + 3\pi_2 = 1$$

ולכן

$$\pi_2 = \frac{1}{8}$$

ולכן

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

על פי הטענה הקודמת פתרון זה צריך להיות גם הפתרון של משוואות שווי המשקל. נוודא זאת:
צריך להתקיים:

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .5 & .1 & 0 & .4 \\ .3 & .5 & .2 & 0 \\ 0 & .2 & .5 & .3 \\ .4 & 0 & .1 & .5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4 \end{pmatrix}$$

ובאמת כפי שרואים ב MATLAB :

```
P =

    0.5000    0.1000         0    0.4000
    0.3000    0.5000    0.2000         0
         0    0.2000    0.5000    0.3000
    0.4000         0    0.1000    0.5000

ppp =

    0.3750    0.1250    0.1250    0.3750

>> ppp*P

ans =

    0.3750    0.1250    0.1250    0.3750
>> sum(ppp)

ans =

     1
```

הערה: לא תמיד ניתן להשתמש במשוואות תנאי שווי משקל המפורט למציאת ההתפלגות הסטציונרית. אבל הראנו שכאשר קיים פתרון למשוואות תנאי שווי המשקל המפורט אז הוא גם הפתרון של משוואות שווי המשקל.

<u>דוגמא</u>: (לתהליך אשר אין לו פתרון למשוואות תנאי שווי המשקל המפורט) אבל הוא כן ארוגודי.

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

להלן משוואות תנאי שווי משקל המפורטות:

$$\pi_1\frac{1}{3}=\pi_2 0$$

$$\pi_1\frac{1}{3}=\pi_3 1$$

$$\pi_2\frac{1}{2}=\pi_3 0$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

הפתרון היחיד אשר מקיים את שלושת המשוואות הראשונות הוא $\pi=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ אבל אז המשוואה הרביעית אינה מתקיימת.

מאידך קיים פתרון למשוואות שווי המשקל:

$$\pi_2=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_3=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

על פי שתי המשוואות הראשונות $\pi_2=\pi_3$

ואז ע"י הצבה של שוויון זה במשואה השנייה מקבלים: $\pi_2=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2$

ולכן $\pi_2=\frac{2}{3}\pi_1$

ואז ע"י הצבה במשוואה השלישית מקבלים:

$\pi_1+\frac{2}{3}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_1=1$ ולכן $\pi_1=\frac{3}{7}$ ולכן $\pi_2=\pi_3=\frac{2}{7}$

משפטים והוכחות:

משפט:
בשרשרת מרקוב ארגודית, אם $P_{X_0}=\pi$ אזי $P_{X_n}=\pi$ לכל n.

הוכחה:
π הוא וקטור השורה (אולי אינסופי) המקיים את המשוואות: $\pi P=\pi$. ראינו כי P_{X_n} מתקבל מ P_{X_0} ע"י הכפלה מימין ב P^n. אבל $P_{X_0}=\pi$ ולכן כאשר נכפיל מימין ב P נקבל שוב π, ולכן גם לאחר הכפלה מימין ב P n פעמים עדיין נקבל π.
מ.ש.ל.

משפט ההתכנסות (ללא הוכחה):
בשרשרת מרקוב ארגודית $\lim_{n\to\infty}P_{ij}^n=\pi_j$ לכל $i,j\in S$.

משפט החוק החזק עבור שרשראות מרקוב (ללא הוכחה):
בשרשרת מרקוב ארגודית בעלת פונקצית רווח r. אם $\sum_{i\in S}|r(i)|\pi_i<\infty$ אז

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}r(X_k)=\sum_{i\in S}r(i)\pi_i$ בהסתברות 1.

המשפט הבא הוצג בפרק ב-4.

משפט (ללא הוכחה):
עבור שרשרת מרקוב אי-פריקה ומשוואות שווי משקל. כל מצבי השרשרת הינם מתמידים חיובית אמ"מ למשוואות שווי המשקל קיים פתרון.
מעבר לכך, במידה וקיים פתרון אז הוא יחיד ובו $\pi_j>0$ לכל מצב j.

משפט (ללא הוכחה):
עבור שרשרת מרקוב אי פריקה בעלת התפלגות סטציונרית מתקיים:

$$E[T_j\mid X_0=j]=\frac{1}{\pi_j}.$$

פרק ב-8: הסתברויות גבוליות המשך – דוגמאות.

בפרקים הקודמים בחלק זה של הקורס למדנו וחקרנו תכונות רבות של שרשראות מרקוב. המעניינת מבין התכונות היא תכונת ההפלגות הגבולית עבור שרשראות מרקוב ארגודיות והחוק החזק של שרשראות מרקוב העושה שימוש בהתפלגות זו. כעת נפנה לחקר מספר דוגמאות יישומיות ובהן מציאת ההתפלגות הגבולית ושימוש בה לצורך חישובים נלווים הינה פעולה יישומית ומעניינת.

שרשרת דו-מצבית:

ניזכר בדוגמא ב-3, שרשרת דו מצבית. המצבים הינם 0 ו – 1 ומטריצת המעבר היא:

$$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$$

למודל זה יישומים רבים. לדוגמא:
מכונה יכולה להיות במצב תקין (0) או תקול (1). בכל יום הסיכוי להתקלקל הוא a (במידה ובמצב תקין) והסיכוי לעבור ממצב תקול למצב תקין הוא b.

בפרק ב-3 הצלחנו לבצע עבור מודל זה, מה שלרוב לא ניתן לעשות, לחשב באופן מפורש את מטריצת המעבר ב – n צעדים:

$$P^n=\frac{1}{a+b}\left(\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+(1-a-b)^n\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}\right)$$

מה קורה כאן כאשר $n\to\infty$?
מתקיים כי $|1-a-b|<1$ (כאשר a ו b שניהם אינם 0 או 1 וכך השרשרת ארגודית) ולכן

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\frac{1}{a+b}\left(\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}$$

וכך מצאנו את ההתפלגות הגבולית:

$$\pi=\begin{pmatrix}\frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\end{pmatrix}$$

לרוב כמובן לא נצליח למצוא כך את ההפלגות הגבולית (ע"י לקיחת גבול באופן מפורש) ונצטרך לפתור את המשוואות באופן מפורש:

$$\pi_0=\pi_0P_{00}+\pi_1P_{10}$$
$$\pi_1=\pi_0P_{01}+\pi_1P_{11}$$
$$\pi_0+\pi_1=1$$

או

$$\pi_0=\pi_0(1-a)+\pi_1 b$$
$$\pi_1=\pi_0 a+\pi_1(1-b)$$
$$\pi_0+\pi_1=1$$

נציב את המשוואה השלישית ($\pi_0 = 1-\pi_1$) במשוואה הראשונה ונקבל:

$$1-\pi_1 = (1-\pi_1)(1-a)+\pi_1 b$$

או

$$1-(1-a) = \pi_1(1-(1-a)+b)$$

או

$$\frac{a}{a+b} = \pi_1$$

ולכן

$$\pi_0 = 1-\pi_1 = \frac{b}{a+b}.$$

כך לדוגמא עם a=0.9 ו b=0.3 אז ממצב 0 יש סיכוי רב לעבור למצב 1 אבל ממצב 1 יש פחות סיכוי לעבור למצב 0 ואז

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

ובאמת רואים שרוב הזמן (75% מהזמן) נמצא במצב 1.

תיקון חלקים במכונה:

למכונה יש שלושה חלקים (1,2,3) קריטיים אשר עלולים להתקלקל. לצורך תפקוד תקין של המכונה דרושה תקינות של שתיים מתוך שלושת החלקים (ז"א שכאשר המכונה מתפקדת, לכל היותר חלק אחד יכול להיות מקולקל). מדיניות החלפת החלקים המקולקלים היא כזאת: ברגע ששני חלקים נמצאים במצב מקולקל, הם מוחלפים והמכונה חוזרת לעבוד ביום הבא.
ההסתברות לקלקול חלקים 1, 2 ו – 3 הן 0.01, 0.02 ו 0.04 בהתאמה, אבל שני חלקים לא יכולים להתקלקל באותו יום.

מהו המודל המרקובי אשר מתאים לסיפור זה?
אם נפעיל את המכונה למשך 1800 ימים (בערך 5 שנים) כמה חלקים מסוג, 1, 2, 3 יוחלפו?

המודל: נתאר את מרחב המצבים כך: $S = \{0,1,2,3,12,13,23\}$ כאשר כל מצב מתאר מהם החלקים המקולקלים. לדוגמא מצב 0 מתאר כי אין חלקים מקולקלים, מצב 3 מתאר כי חלק מס' 3 מקולקל ומצב 23 מתאר כי חלקים 2 ו 3 מקולקלים.
אם כך אז זוהי מטריצת המעבר:

$$P = \begin{array}{r|} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 12 \\ 13 \\ 23 \end{array} \begin{pmatrix} .93 & .01 & .02 & .04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .94 & 0 & 0 & .02 & .04 & 0 \\ 0 & 0 & .95 & 0 & .01 & 0 & .04 \\ 0 & 0 & 0 & .97 & 0 & .01 & .02 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נתעניין בקרוב (הגבולי) של תוחלת מס' החלקים מסוג 1, 2 ו – 3 אשר יוחלפו לאחר 1800 ימי פעולה.
אנו יודעים כי חלקים מוחלפים בכל פעם שהשרשת במצב 12, 13 או 23:

חלק 1 מוחלף כאשר אנו במצבים 12 או 13.
חלק 2 מוחלף כאשר אנו במצבים 12 או 23.
חלק 3 מוחלף כאשר אנו במצבים 13 או 23.
רואים בקלות שהשרשת היא אי-פריקה ולכן בגלל שמרחב המצבים שלה סופי אז קיימת עבורה התפלגות גבולית π.

אם כך הקרוב הגבולי לתוחלת מס' החלקים המוחלפים מכל סוג הוא:
חלק 1: $1800(\pi_{12}+\pi_{13})$
חלק 2: $1800(\pi_{12}+\pi_{23})$
חלק 3: $1800(\pi_{13}+\pi_{23})$

נותר כעת רק לחשב את π:

נרשום את משוואות שווי המשקל עבור כל העמודות פרט לעמודה הראשונה (ניתן תמיד לדלג על עמודה/משוואה אחת).

$$.01\pi_0+.94\pi_1=\pi_1$$
$$.02\pi_0+.95\pi_2=\pi_2$$
$$.04\pi_0+.97\pi_3=\pi_3$$
$$.02\pi_1+.01\pi_2=\pi_{12}$$
$$.04\pi_1+.01\pi_3=\pi_{13}$$
$$.04\pi_2+.02\pi_3=\pi_{23}$$
$$\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_{12}+\pi_{13}+\pi_{23}=1$$

נניח כי π_0 ידוע:
אז לפי המשוואה הראשונה, השנייה והשלישית בהתאמה מתקיים:

$$\pi_1=\pi_0\frac{1}{6}$$
$$\pi_2=\pi_0\frac{2}{5}$$
$$\pi_3=\pi_0\frac{4}{3}$$

או לאחר מכנה משותף:

$$\pi_1=\pi_0\frac{5}{30}$$
$$\pi_2=\pi_0\frac{12}{30}$$
$$\pi_3=\pi_0\frac{40}{30}$$

נציב כעת במשוואות הרבעית, החמישית והשישית:

$$\pi_{12} = \pi_0 \frac{10+12}{3000}$$
$$\pi_{13} = \pi_0 \frac{20+40}{3000}$$
$$\pi_{23} = \pi_0 \frac{48+80}{3000}$$

כעת נשתמש במשוואת הסכום:

$$\frac{3000+500+1200+4000+22+60+128}{3000}\pi_0 = 1$$

ולכן $\pi_0 = \frac{3000}{8910}$

ומכאן:

$$\pi_1 = \frac{500}{8910}$$
$$\pi_2 = \frac{1200}{8910}$$
$$\pi_3 = \frac{4000}{8910}$$
$$\pi_{12} = \frac{22}{8910}$$
$$\pi_{13} = \frac{60}{8910}$$
$$\pi_{23} = \frac{128}{8910}$$

ומכאן לאחר 1800 ימים משתמשים בממוצע ב 16.56 פריטים מסוג 1, 30.30 פריטים מסוג 2, ו 37.98 פריטים מסוג 3.

מודל אמינות:

מערכת יצור נמצאת באחד מאוסף מצבים $S = \{1,...,N\}$. קיימת קבוצה מצבים A, $A \subseteq S$ שהיא קבוצת **המצבים התקינים** בה המערכת מייצרת. הקבוצה המשלימה $A^c = S \setminus A$ היא קבוצת **המצבים התקולים** בהם המערכת אינה מייצרת.

נניח כי מצב מערכת הייצור מתנהג על פי שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר P והשרשרת היא אי-פריקה ואינה מחזורית.

נתעניין במספר מדדים לגבי מערכת היצור:

1. פרופורציית הזמן בה המערכת במצב תקין.
2. פרופורציית הזמן בה המערכת במצב תקול.
3. הקצב אשר בו מערכת היצור עוברת ממצב תקין למצב תקול, ז"א קצב הקלקולים.
4. הקצב אשר בו מערכת היצור עוברת ממצב תקול למצב תקין, ז"א קצב התיקונים.
5. הזמן הממוצע בו המערכת נשארת במצב תקין לאחר תיקון (זהו הזמן הממוצע בין קלקולים – נקרא Mean Time Between Failures – MTBF).

6. הזמן הממוצע בו המערכת נשארת במצב תקול לאחר התקלקלות (זהו הזמן הממוצע להתאוששות מקלקול).

פתרון:
ראשית בגלל שהשרשרת היא ארגודית אז קיימת התפלגות סטציונרית π, אם בנוסף נניח כי השרשרת במצב שווי משקל (המערכת כבר עבדה מספר ימים רב) אז ההסתברות שהמערכת במצב i היא π_i.

אם כך, ההסתברות להיות במצב תקין היא $\sum_{i\in A}\pi_i$. (שאלה 1).
וההסתברות להיות במצב תקול היא $\sum_{i\in A^c}\pi_i$. (שאלה 2).

שנית נגדיר שרשרת מרקוב דו מצבית (כפי שהוצגה בתחילת הפרק הזה). נקרא למצב 0 – המצב התקין ולמצב 1 – המצב התקול. נבנה את הסתברויות המעבר של השרשרת הדו-מצבית (מבוססים על הפרמטרים a ו – b) כך שיתאימו לשרשרת שלנו (השרשרת ה N מצבית):

עבור כל ריאליזציה של השרשרת שלנו (המטיילת בין N מצבים). נגדיר ריאליזציה של השרשרת הדו-מצבית כך:

נסמן את השרשרת שלנו (ה- N מצבית) ב - Y_n ואת השרשרת הדו-מצבית ב X_n. אז:
$$X_n = I_{A^c}(Y_n)$$
ז"א כאשר השרשרת שלנו במצב תקול אז השרשרת הדו-מצבית במצב – 1 וכאשר השרשרת שלנו במצב תקין אז השרשרת הדו- מצבית במצב 0.

במצב יציב (כאשר הפילוג השולי לכל זמן n של השרשרת שלנו הוא π) נחשב את a ו- b (הסתברויות המעבר בשרשרת הדו-מצבית). אנו יודעים כי קצב המעבר ממצב i למצב j הוא $\pi_i P_{ij}$. כל מעבר ממצב ב A למצב ב A^c בשרשרת שלנו (N מצבים) גורר מעבר ממצב 0 למצב 1 בשרשרת הדו –מצבית. ולכן:

$a = \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}$ וזהו הקצב בו המכונה עוברת ממצב תקין למצב תקול (שאלה 3).

ובאופן דומה, $b = \sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c}\pi_i P_{ij}$ וזהו הקצב בו המכונה עוברת ממצב תקול למצב תקין. (שאלה 4).

מהם התשובות לשאלות 5,6 (הזמן הממוצע בו השרשרת במצב תקול והזמן הממוצע בו השרשרת במצב תקין).

וכן בכל שרשרת מרקוב הזמן הממוצע בו נשארים במצב לא סופג i הוא $\frac{1}{1-P_{ii}}$ (כי נשארים במצב מספר גיאומטרי של פעמים עם הסתברות הצלחה = יציאה ממצב $1-P_{ii} = \sum_{j\neq i}P_{ij}$).

בפרט בשרשרת הדו מצבית נשאר במצב 0 בממוצע $\frac{1}{a}$ צעדים ובמצב 1 בממוצע $\frac{1}{b}$ צעדים. ולכן בשרשרת שלנו (ה-N מצבית) נישאר במצב תקין בממוצע למשך $\frac{1}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}}$ צעדים (שאלה 5) ומצב תקול בממוצע למשך $\frac{1}{\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c}\pi_i P_{ij}}$ צעדים.

לדוגמא:

עבור מרחב מצבים $S = A\bigcup A^c$ כאשר $A=\{1,2\}$ ו $A^c=\{3,4\}$ נניח כי מטריצת המעבר היא

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

התפלגות שווי המשקל מתקבלת ע"י המשוואות הבאות:

$$\pi_1=\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_3+\frac{1}{4}\pi_4$$

$$\pi_2=\frac{1}{4}\pi_1+\frac{1}{4}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_3+\frac{1}{4}\pi_4$$

$$\pi_3=\frac{1}{2}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2+\frac{1}{4}\pi_3$$

$$1=\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4$$

פתרון המשוואות הוא:

$$\pi=\begin{pmatrix} \frac{9}{48} & \frac{12}{48} & \frac{14}{48} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}$$

פרופורציית הזמן בו המערכת במצב תקין: $\frac{21}{48}$

פרופורציית הזמן בו המערכת במצב תקול: $\frac{27}{48}$

קצב הקלקולים הוא:

$$\sum_{j\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{ij}=\pi_1(P_{13}+P_{14})+\pi_2(P_{23}+P_{24})=\frac{9}{48}\left(\frac{1}{2}+0\right)+\frac{12}{48}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{32}$$

וקצב התיקונים היא:

$$\sum_{j\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{ij}=\pi_3(P_{31}+P_{32})+\pi_4(P_{41}+P_{42})=\frac{14}{48}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{13}{48}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{32}$$

ומשך הזמן הממוצע בו המערכת מקולקלת הוא:

$$\frac{1-\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{ij}}=\frac{1-(\pi_1+\pi_2)}{\pi_1(P_{13}+P_{14})+\pi_2(P_{23}+P_{24})}=\frac{1-\frac{21}{48}}{\frac{9}{32}}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{9}{32}}=2$$

ומשך הזמן הממוצע בו המערכת תקינה הוא:

$$\frac{\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{ij}}=\frac{(\pi_1+\pi_2)}{\pi_1(P_{13}+P_{14})+\pi_2(P_{23}+P_{24})}=\frac{\frac{21}{48}}{\frac{9}{32}}=\frac{14}{9}$$

סכום מצטבר מודולו:

נזכר בדוגמא ב-11. מטריצת המעבר אשר התקבלה עבור מרחב המצבים $\{0,1,2,3,4\}$ היא:

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_4 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_0 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי במטריצת המעבר P לא רק שסכום כל שורה הוא אחד (המטריצה היא סטוכסטית כמובן) אלה גם הסכום של כל העמודה הוא אחד (P^T היא סטוכסטית גם כן). ז"א לכל $j\in S$ מתקיים $\sum_{i\in S}P_{ij}=1$ (וזאת מעבר לתנאי הרגיל של מטריצה סטוכסטית: לכל $i\in S$ מתקיים $\sum_{j\in S}P_{ij}=1$). למטריצה כזאת נקראה מטריצה **סטוכסטית כפולה**.

קל לראות שעבור שרשראות מרקוב אי-פריקות, סופיות, בעלות מטריצות סטוכסטיות כפולות (כמו דוגמת הסכום מצטבר מודולו) מתקיים כי ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi_i=\frac{1}{|S|}$ (אחידה בדידה על מרחב המצבים).

הרי משוואת שווי המשקל עבור מצב j היא: $\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}$. ואם נציב $\pi_i=\frac{1}{|S|}$ אז נקבל:

$\frac{1}{|S|}1=\sum_{i\in S}\frac{1}{|S|}P_{ij}=\frac{1}{|S|}$. ובנוסף משוואת הסכום לאחד מתקיימת ולכן $\pi_i=\frac{1}{|S|}$ הוא הפתרון.

ולכן במקרה הפרטי של דוגמת סכום מצטבר מודולו 5, ההסתברות להיות בכל מצב מסוים לאחר שהשרשרת רצה לפרק זמן ארוך היא $\frac{1}{5}$.

הילוך אקראי מוחזר (Reflecting Random Walk):

ניזכר בדוגמא ב-15. מטריצת המעבר היא:

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

בפרק ב-4, חקרנו דוגמא זו בהקשר של מצבים מתמידים חיוביות ומתמידים אפס. שם ראינו כי תנאי הכרחי ומספיק להתמדה חיובית של מצבי השרשרת הוא קיום פתרון למשוואות שווי המשקל. פתרנו את מערכת משוואות שווי המשקל עבור שרשרת זו וקבלנו עבור $p<0.5$ את הפתרון:

$$\pi_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{p}{1-p})^k}$$

$$\pi_k=\pi_0(\frac{p}{1-p})^k$$

כך לדוגמא עבור $p=\frac{1}{4}$ מקבלים:

$$\pi_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k}=\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}$$

$$\pi_k=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^k$$

ז"א π הוא וקטור מסת ההסתברות של משתנה מקרי גיאומטרי סופר כישלונות עם פרמטר להצלחה $\frac{2}{3}$.

הערה: קל לקבל פתרון זה באמצעות משוואות תנאי שווי משקל המפורט:

$$\pi_0 p=\pi_1(1-p)$$
$$\pi_1 p=\pi_2(1-p)$$

....

$$\pi_k p = \pi_{k+1}(1-p)$$

אם כך:

$$\pi_k = \pi_{k-1}\frac{p}{1-p} = \pi_{k-2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 = ... = \pi_0\left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$

ואז π_0 מתקבל ממשוואת הסכום לאחד.

בהמשך הקורס (בעיקר בחלק ה') נמשיך ונדון בפתרונות מסוג זה (עבור תהליכי לידה ומוות).

שארית אורך החיים:

ניזכר בדוגמא ב-12. מטריצת המעבר היא:

$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

להלן משוואות שווי המשקל:

$$\pi_0 = \pi_0 p_1 + \pi_1$$
$$\pi_1 = \pi_0 p_2 + \pi_2$$
$$\pi_2 = \pi_0 p_3 + \pi_3$$
$$....$$
$$\pi_k = \pi_0 p_{k+1} + \pi_{k+1}$$
$$....$$

נניח כי π_0 ידוע אז:

$$\pi_1 = \pi_0(1-p_1) = \pi_0(p_2+p_3+...) = \pi_0 P(Z>1) = \pi_0 \overline{F}_Z(1)$$
$$\pi_2 = \pi_1 - \pi_0 p_2 = \pi_0(1-p_1-p_2) = \pi_0(p_3+p_4+...) = \pi_0 P(Z>2) = \pi_0 \overline{F}_Z(2)$$
$$\pi_3 = \pi_2 - \pi_0 p_3 = \pi_0(1-p_1-p_2-p_3) = \pi_0(p_4+p_5+...) = \pi_0 P(Z>3) = \pi_0 \overline{F}_Z(3)$$
$$....$$
$$\pi_k = \pi_0(1-p_1-...-p_k) = \pi_0(p_{k+1}+p_{k+2}+...) = \pi_0 \overline{F}_Z(k)$$

($\overline{F}_Z(k)$ היא פונקציית השרידות של המשתנה המקרי Z המציין את שארית אורך החיים)

משוואת הסכום לאחד תיתן:

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_0\overline{F}_Z(k)$$

מכאן $\frac{1}{\pi_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}_Z(k)=EZ$

ולכן $\pi_0=\frac{1}{EZ}$.

אם כך, במידה ותוחלת אורך החיים סופית אז קיימת התפלגות סטציונרית והיא

$$\pi_k=\frac{1}{EZ}\overline{F}_Z(k)$$

נשים לב שבגלל ש $Z\geq 1$ אז $p_0=0$ ולכן $\overline{F}_Z(0)=1$ ולכן הנוסחה לעיל נכונה גם עבור π_0.

לדוגמא עבור $Z\sim Geom(p)$, $\overline{F}_Z(k)=(1-p)^k$ ו $EZ=\frac{1}{p}$ ואז:
$\pi_k=p(1-p)^k$ (מתפלג כמו גיאומטרי סופר כישלונות).

לעומת זאת עבור Z המתפלג כך:

$P_Z(k)=\frac{1}{k(k+1)}$ התוחלת היא אינסופית ולכן לא קיימת התפלגות סטציונרית לשרשרת המרקוב (כל המצבים מתמידים אפס).

הערות לגבי משתנה מקרי זה:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

ולכן $\sum_{k=1}^{\infty}P_Z(k)=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....=1$

בנוסף $EZ=\sum_{k=1}^{\infty}kP_Z(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$

וזהו הטור ההרמוני וידוע כי הוא מתבדר.

תיאור חלק ג:

בחלק זה מוגדר ונחקר תהליך הפואסון ותהליכים דומים הנגזרים מתהליך זה. עבור תהליך פואסון מוצגות 4 הגדרות שקולות ומתבצעים חישובים נלווים לתהליך וגם פיצול ומיזוג של תהליכים. בנוסף מוצגים ואריאנטים של התהליך: תהליך פואסון מורכב ותהליך אשר אינו הומוגני בזמן. החלק נפתח ע"י חזרה על התפלגות אקספוננציאלית וארלנג והצגת המושג של קצב Hazard.

פרק ג-1: תכונות של ההתפלגות האקספוננציאלית והתפלגות ארלנג.

להלן התכונות הבסיסיות עבור משתנה מקרי: $X \sim \exp(\lambda)$:

פונקצית צפיפות, התפלגות ושרידות.

צפיפות: $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)$

התפלגות: $P(X \le x) = F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \lambda e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x)dx = I_{[0,\infty)}(x)(1-e^{-\lambda x})$

שרידות: $P(X > x) = 1 - F_X(x) = \overline{F_X}(x) = e^{-\lambda x} I_{[0,\infty)}(x) + I_{(-\infty,0)}(x)$

תכונת חוסר זיכרון. עבור t ,s חיוביים.

$$P(X > s+t \mid X > t) = \frac{P(X > s+t, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > t)} =$$

$$\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} = P(X > s)$$

פירוש: נניח שמשתנה מקרי X מודד זמן המתנה בשניות (או אורך חיים – זמן המתנה למוות), אז בהינתן שזמן ההמתנה גדול מ t שניות (ידוע כי המתנו לפחות t) אז ההסברות שנמתין עוד לפחות s שניות שווה להסתברות שנמתין לפחות s שניות מתחילת ההמתנה. ז"א ההמתנה לא מתקצרת/מתארכת עקב העובדה שידוע שכבר המתנו.

זהו גם המשנה המקרי הרציף היחיד בעל תכונת חוסר הזיכרון:

יהי Y מ"מ רציף כך ש $P(Y > s+t \mid Y > t) = P(Y > s)$ אז:

או: $\dfrac{P(Y > s+t)}{P(Y > t)} = P(Y > s)$

$\overline{F}_Y(s+t) = \overline{F}_Y(s)\overline{F}_Y(t)$,

ניתן להוכיח כי הפתרון היחיד של המשווה הפונקציונאלית (משוואה אשר הנעלמים בה הם פונקציות) הנ"ל הוא מהסוג: $\overline{F}_Y(x) = e^{Cx}$.

ההוכחה מתבססת על תוצאה יחסית כבדה האומרת כי הפתרון היחיד למשוואה מהסוג $g(s+t) = g(s) + g(t)$ במרחב הפו' הרציפות הוא $g(y) = Cy$ (כאשר C, הוא קבוע כלשהו).

ניקח ln על המשוואה הפונקציונאלית של $\overline{F}_Y(.)$ ונקבל

$\ln \overline{F}_Y(s+t) = \ln \overline{F}_Y(s) + \ln \overline{F}_Y(t)$.

ואז לפי התוצאה "הכבדה" נקבל כי $\ln \overline{F}_Y(y) = Cy$

ולכן $\overline{F}_Y(x) = e^{Cx}$. בשביל ש $\overline{F}_Y(.)$ תהיה פו' שרידות אז דרוש ש C יהיה שלילי ולכן ניקח $C = -\lambda$.

הערה: עבור משתנים מקריים בדידים המשפחה הגיאומטרית הינה המשפחה היחידה בעלת תכונת חוסר זיכרון.

הערה: תכונת חוסר הזיכרון נכונה גם עבור הזזות של משתנים מקריים אקספוננציאלים /גיאומטריים.

הערה: ניתן לייחס את תכונת חוסר הזיכרון לעובדה שאם מסתכלים על העקומה היורדת של הצפיפות האקספוננציאלית או של מסת ההסתברות הגיאומטרית, אז העקומה הינה בעלת אותה צורה ככל שמסתכלים הלאה אל הזנב.

קשר למשתנה מקרי גיאומטרי.

כידוע, גם משתנה מקרי גיאומטרי הוא חסר זיכרון. קשר זה בין האקספוננציאלי לגיאומטרי אינו סתמי:

יהי $X \sim \exp(\lambda)$, נגדיר $G = \lceil X \rceil$ (הערך השלם העליון). אז עבור k=1,2,…

$$P(G=k) = P(\lceil X \rceil = k) = P(X \in (k-1,k]) =$$

$$\int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_{x=k-1}^{x=k} = -(e^{-\lambda k} - e^{-\lambda(k-1)}) =$$

$$e^{-\lambda(k-1)}(1-e^{-\lambda}) = (e^{-\lambda})^{k-1}(1-e^{-\lambda})$$

נגדיר $q = 1-p = e^{-\lambda}$

אזי $P(G=k) = (1-p)^{k-1} p$ וזו התפלגות גיאומטרית (סופרת ניסיונות).

פונקציה יוצרת מומנטים.

$$M_X(t) = Ee^{Xt} = \int_0^\infty e^{xt} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{x(t-\lambda)} dt =$$

$$\lambda \frac{e^{x(t-\lambda)}}{t-\lambda}\Bigg|_{x=0}^{x=\infty} = \frac{\lambda}{t-\lambda}\left(\lim_{x\to\infty} e^{x(t-\lambda)} - 1\right) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$

עבור $t-\lambda < 0$ או $t < \lambda$.

תוחלת, מומנטים, שונות.

$X \sim \exp(\lambda)$. נחשב את EX במספר דרכים.

<u>דרך א:</u>

$$EX = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx = x(-e^{-\lambda x})\Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^\infty 1(-e^{-\lambda x}) dx = (0 - \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{\lambda x}}) + \left[\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda} \right]_0^\infty =$$

$$0 + 0 - \frac{1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

<u>דרך ב:</u>

$$EX = \int_0^\infty \overline{F}_X(x) dx = \int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = 0 - \frac{1}{-\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

<u>דרך ג:</u>

$$EX = \frac{dM_X(t)}{dt}\Bigg|_{t=0} = (\lambda(\lambda-t)^{-1})'\Big|_{t=0} = \lambda(-1)(-1)(\lambda-t)^{-2}\Big|_{t=0} = \frac{\lambda}{(\lambda-0)^2} = \frac{1}{\lambda}$$

<u>נחשב את השונות:</u>

ראשית נחשב את המומנט השני ע"י גזירה פעמיים של פו' יוצרת מומנטים והצבה באפס.

$$EX^2 = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\Bigg|_{t=0} = (\lambda(\lambda-t)^{-1})''\Big|_{t=0} = (\lambda(-1)(-1)(\lambda-t)^{-2})'\Big|_{t=0} =$$

$$\lambda(-2)(-1)(\lambda-t)^{-3}\Big|_{t=0} = \frac{2}{\lambda^2}$$

כעת: $Var(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - (\frac{1}{\lambda})^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

הערה: אם כך סטיית התקן של מ"מ אקספוננציאלי שווה לתוחלתו ולכן מקדם ההשתנות (CV) של משתנה מקרי זה הוא 1 ($CV(X) = \frac{\sqrt{Var(X)}}{EX}$).

התפלגות מינימום.

בתחילת הקורס נזכרנו כי פו' השרידות של המינימום של n משתנים מקריים בלתי תלויים הינה מכפלת פו' השרידות (נרענן זאת כאן):

$$\overline{F}_{Min(X_1,...,X_n)}(x) = P(Min(X_1,...,X_n) > x) = P(X_1 > x)...P(X_n > x) = \prod_{k=1}^{n} \overline{F}_{X_i}(x)$$

(במידה והמשתנים המקריים הינם שווי התפלגות אז המכפלה הופחת לחזקה בגובה n).

כאשר נתונים n משתנים מקריים אקספוננציאלים, כאשר $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ אזי מקבלים:

$$\overline{F}_{Min(X_1,...,X_n)}(x) = \prod_{k=1}^{n} \overline{F}_{X_i}(x) = \prod_{k=1}^{n} e^{-\lambda_i x} = e^{-(\lambda_1 + ... + \lambda_n)x}.$$

ז"א המינימום הוא גם אקספוננציאלי בעל סכום העוצמות.

הערה: לתוצאה זו משמעות מרחיקת לכת בחישובי אמינות. נהוג הרבה פעמים למדל את אורך חייהם של רכיבים ע"י משתנה מקרי אקספוננציאלי (זאת בגלל תכונת חוסר הזיכרון וקצב סיכון קבוע – נראה בהמשך). נניח כי קיימת מערכת המורכת מ n רכיבים וכולם הכרחיים לפעולת המערכת. אזי אורך החיים של המערכת הוא אקספוננציאלי בעל סכום העוצמות (סכום ההופכי של אורך החיים הממוצע של כל רכיב).

הערה: תוצאה זו תהייה מרכזית בהבנתנו של תהליכי קפיצה מרקובים, בפרק הבא.

תחרות בין משתנים מקריים אקספוננציאלים.

נדון כעת במצב בו ישנם שני משתנים מקריים אקספוננציאלים בלתי תלויים:

$X \sim \exp(\lambda_X)$

$Y \sim \exp(\lambda_Y)$

נחשוב על X ועל Y כמסמלים את הזמן מתחילת החיים עד אשר שתי תאומות מתחתנות. (התאומות הן X ו Y). (ייתכן והנחת האי-תלות במקרה זה היא קצת לא מציאותית).

בסעיף הקודם ראינו כי הזמן עד החתונה הראשונה (Min(X,Y)) מתפלג $\exp(\lambda_X + \lambda_Y)$.

כעת נדון בהסתברות $P_X = P(X < Y) = P(X = Min(X,Y)) = 1 - P_Y$ (ההסתברות שהתאומה X תתחתן ראשונה).

אינטואיטיבית רואים שאם $\lambda_X = \lambda_Y$ אזי הסתברות זאת צריכה להיות חצי. בנוסף נצפה כי P_X תהיה פו' עולה ב λ_X.

<u>דרך חישוב א':</u>

הצפיפות המשותפת של X ו Y היא: $f_{X,Y}(x,y) = \lambda_X e^{-\lambda_X x} I_{[0,\infty)}(x) \lambda_Y e^{-\lambda_Y y} I_{[0,\infty)}(y)$.

עכשיו, נבצע אינטגרציה על כל הזוגות (x,y) ב $\mathbb{R}^2$ אשר עבורם x<y.

$$P_X = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dydx = \int_{x=0}^{\infty}\int_{y=x}^{\infty} \lambda_X\lambda_Y e^{-\lambda_X x}e^{-\lambda_Y y}dydx =$$

$$\int_{x=0}^{\infty}\lambda_X e^{-\lambda_X x}\int_{y=x}^{\infty}\lambda_Y e^{-\lambda_Y y}dydx = \int_{x=0}^{\infty}\lambda_X e^{-\lambda_X x}\overline{F}_Y(x)dx =$$

$$\lambda_X\int_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda_X x}e^{-\lambda_Y x}dx = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\int_{x=0}^{\infty}(\lambda_X+\lambda_Y)e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)x}dx =$$

$$\frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}1 = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$$

<u>דרך חישוב ב':</u>

על פי נוסחת ההסתברות השלמה:

$$P_X = P(X<Y) = \int_{x=0}^{\infty} P(X<Y \mid X=x) f_X(x)dx$$

ולכן זה שווה ל –

$$\int_{x=0}^{\infty}\overline{F}_Y(x)f_X(x)dx = \int_{x=0}^{\infty}e^{-\lambda_Y x}\lambda_X e^{-\lambda_X x}dx = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}\int_{x=0}^{\infty}(\lambda_X+\lambda_Y)e^{-(\lambda_X+\lambda_Y)x}dx = \frac{\lambda_X}{\lambda_X+\lambda_Y}$$

<u>כעת נרחיב תוצאה זו ל-n משתנים מקריים $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ בלתי תלויים.</u>

נראה כי $P_i = P(X_i = Min(X_1,...,X_n)) = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+...+\lambda_n}$

נגדיר $U = Min(X_1,...,X_{i-1},X_{i+1},...,X_n)$ אזי נסמן $\lambda_U = \lambda_1+...+\lambda_{i-1}+\lambda_{i+1}+...+\lambda_n$

ואז $U \sim \exp(\lambda_U)$.

ועכשיו $P_i = P(X_i < U) = \dfrac{\lambda_i}{\lambda_i+\lambda_U} = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1+...+\lambda_n}$.

<u>סכום של משתנים מקריים בעלי קצב זהה מתפלג ארלנג.</u>

בסעיף זה ניזכר בהתפלגות גאמא ובפרט במקרה פרטי שלה, התפלגות ארלנג. ניזכר בכך שסכום של גאמות בלתי תלויות (כאשר פרמטר הקצב זהה) מתפלגות גאמא וניישם למקרה הפרטי הארלנגי אשר יהיה שימושי ביותר בהמשך הפרק.

X מתפלג גאמא עם פרמטר צורה α ופרמטר קצב λ אם צפיפות X מכילה את הגרעין $x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}$.

(תזכורת הגרעין של פו' צפיפות הוא החלק "עם הבשר", החלק אשר משתנה על פי הערך x, בניגוד לקבוע).

(המשך תזכורת, במידה והגרעין הוא K(x) אזי, **הגורם המנרמל** הוא $\left(\int K(x)dx\right)^{-1}$, וכך מכפלת הגרעין בגורם המנרמל נותן פו' צפיפות תקנית, ז"א האינטגרל מעל התומך הוא 1).

במקרה של התפלגות גאמא, הגורם המנרמל הוא $\dfrac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$. כאשר $\Gamma(.)$ היא פו' גאמא:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt \,.$$

לפו' גאמא מס' תכונות, לא נדון בהן כאן פרט לכך ש $\Gamma(n) = (n-1)!$ (עבור $n \in \mathbb{N}$). קל להראות זאת ע"י אינטגרציה בחלקים.

אם כך:

$f_X(x)=\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x)$.

כעת נראה כי אם $\begin{matrix} X_1 \sim gamma(\alpha_1,\lambda) \\ X_2 \sim gamma(\alpha_2,\lambda) \end{matrix}$ בלתי תלויים, אזי $X_1+X_2 \sim gamma(\alpha_1+\alpha_2,\lambda)$.

<u>דרך א': קונבולוציה.</u>
לצורך חישוב זה ניזכר בהתפלגות בטא המייגעת:

$f_X(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}I_{[0,1]}(x)$ אם $X \sim Betta(\alpha,\beta)$

נבצע כעת את הקונבולוציה ו"נשלים" להתפלגות בטא במהלך החישוב (ע"י הצבה u=s/x).

$$f_{X_1+X_2}(x)=f_{X_1}(x)\otimes f_{X_2}(x)=\int_{s=0}^{\infty}f_{X_1}(s)f_{X_2}(x-s)ds=\int_{s=0}^{x}f_{X_1}(s)f_{X_2}(x-s)ds=$$

$$=\int_{s=0}^{x}\frac{\lambda^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)}s^{\alpha_1-1}e^{-\lambda s}\frac{\lambda^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)}(x-s)^{\alpha_2-1}e^{-\lambda(x-s)}ds=$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{s=0}^{x}s^{\alpha_1-1}(x-s)^{\alpha_2-1}e^{-\lambda x}ds=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}e^{-\lambda x}\int_{s=0}^{x}s^{\alpha_1-1}(x-s)^{\alpha_2-1}ds=$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}e^{-\lambda x}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}\int_{u=0}^{1}(ux)^{\alpha_1-1}(x-ux)^{\alpha_2-1}xdu=$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}x^{\alpha_1-1}x^{\alpha_2-1}xe^{-\lambda x}\int_{u=0}^{1}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1}du=$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda x}\int_{u=0}^{1}\frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}u^{\alpha_1-1}(1-u)^{\alpha_2-1}du=$$

$$=\frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}x^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\lambda x}$$

<u>דרך ב': פו' יוצרת מומנטים.</u>
נתון $X \sim gamma(\alpha,\lambda)$

$$M_X(t)=\int_{s=0}^{\infty}e^{st}\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}s^{\alpha-1}e^{-\lambda s}ds=\frac{\lambda^\alpha}{(\lambda-t)^\alpha}\int_{s=0}^{\infty}\frac{(\lambda-t)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}s^{\alpha-1}e^{-(\lambda-t)s}ds=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^\alpha$$

עבור $\lambda-t>0$, ז"א $t<\lambda$.

כעת $M_{X_1+X_2}(t)=M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)=\left(\frac{\lambda}{\lambda-t}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}$.

וזו אכן הפו' יוצרת מומנטים של $gamma(\lambda,\alpha_1+\alpha_2)$.

הרחבת תוצאה זו ל n משתנים מקריים היא מיידית.

חדי העין הבחינו כי $gamma(1,\lambda)\equiv\exp(\lambda)$ (כן, יוצא ש $\Gamma(1)=1$).

ולכן אם $X_1,...,X_n \sim \exp(\lambda)$ בלתי תלויים אזי $T=X_1+...+X_n \sim gamma(n,\lambda)$.

להתפלגות gamma כאשר פרמטר הצורה הוא שלם קוראים ארלנג (Erlang) – ולכן סכום של n משתנים מקריים אקספוננציאלים .i.i.d מתפלג $erlang(n,\lambda)$ וצפיפותו:

$$f_T(x)=\frac{\lambda^n}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-\lambda x}I_{[0,\infty)}(x).$$

אין טעם לחשב באופן ישיר את התוחלת והשונות, יותר קל לעשות זאת ע"י העובדה כי משתנה מקרי זה הוא סכום של n אקספוננציאלים ולכן:

$$ET=(\underbrace{\frac{1}{\lambda}+\ldots+\frac{1}{\lambda}}_{n})=\frac{n}{\lambda}$$

ובאותו אופן $Var(T)=\frac{n}{\lambda^2}$.

פרק ג-2: קצב Hazard (סיכון).

אנו יודעים כי ניתן לייצג את ההתפלגות של משתנים מקריים במספר דרכים:

$$F_X(x), \overline{F}_X(x), f_X(x), P_X(x), M_X(t), G_X(t)$$

וזאת כאשר $f_X(x)$ מוגדרת רק עבור מ"מ רציפים ו $G_X(t)$ ו $P_X(x)$ הן פונקציות רק עבור מ"מ בדידים.
ז"א כל האפשרויות הנ"ל עומדות לרשותנו לייצג את חוק ההסתברות (ההתפלגות) של משתנים מקריים.

בפרק זה, נכיר דרך נוספת אשר באמצעותה ניתן לתאר את חוק ההתפלגות של משתנים מקריים אי שליליים רציפים, זוהי פונקצית קצב ה Hazard או קצב הסיכון.

נגדיר את קצב ה Hazard כך:

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{\overline{F}_X(x)}.$$

לפני שנתעמק במשמעות של ערך זה, נחשב את קצב ה Hazard של משתנה מקרי אקספוננציאלי כדוגמא.

$$X \sim \exp(\lambda)$$

$$h_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda$$

לצורך הסבר של המשמעות של קצב ה Hazard, נתייחס למשתנה מקרי X כמשתנה מקרי אי-שלילי אשר מייצג אורך חיים של רכיב כלשהו (יכול להיות גם בן-אדם ביישומים אקטואריים). נשתמש במינוחים של כשלון ושרידות, ז"א אם X>x אז שרדנו יותר מ x יחידות זמן וכו'.

כדי להבין את המשמעות של קצב הסיכון נסתכל על הגודל הבא: $P(x < X \le x + \Delta x \mid X > x)$, זוהי ההסברות ששרדנו עד זמן x ולאחר מכן בפרק זמן בגודל Δx נכשלנו.

ניתן לראות כי:

$$\begin{aligned} & P(x < X \le x + \Delta x \mid X > x) = \\ & \frac{P(x < X \le x + \Delta x, X > x)}{P(X > x)} = \\ & \frac{P(x < X \le x + \Delta x)}{P(X > x)} = \\ & \frac{P(x < X \le x + \Delta x)}{\overline{F}_X(x)} \end{aligned}$$

אם כך, עבור Δx קטן מתקיים:

$$P(x < X \le x + \Delta x \mid X > x) = \frac{f_X(x)\Delta x}{\overline{F}_X(x)} = h_x(x)\Delta x$$

ז"א, קצב הסיכון בזמן x מוכפל ב Δx הוא ההסתברות להיכשל בזמן זה בהינתן שעדיין לא נכשלנו עד זמן זה. (ביישומיים אקטוארים, ערך זה נקרא עוצמת התמותה).

חשוב לשים לב כי קצב הסיכון בשל עצמו אינו מההווה הסתברות (הוא יכול להיות גדול מ 1) וזאת בדיוק כפי שפונקצית הצפיפות אינה מההווה הסתברות. אבל כאשר מכפילים בערך קטן Δx אז קצב הסיכון (כמו כן גם פונקצית צפיפות) מקרבים גודל הסתברותי.

נחזור למקרה האקספוננציאלי ובו ראינו כי קצב הסיכון הוא קבוע λ. תוצאה זו מראה שבמידה ואורך החיים הוא בעל התפלגות אקספוננציאלית אז ההסתברות להיכשל בכל רגע נתון (בהנחה שעדיין לא נכשלנו) היא קבועה. זאת אם כך הסתכלות נוספת על תכונת חוסר הזיכרון של משתנים מקריים אקספוננציאלים.

<u>דוגמא:</u>

יהי $X \sim Uniform(0,1)$ מהו קצב הסיכון?

נצפה כאן שקצב הסיכון יעלה ככל שמתרחקים מ -0 ומתקרבים ל -1:

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{1-F_X(x)} = \frac{1}{1-x}$$

<u>מעבר מקצב סיכון לפונקצית שרידות</u>

ראינו כיצד ניתן למצוא את קצב הסיכון בהינתן פונקצית שרידות (זאת על פי הגדרה):

$$h_X(x) = \frac{-\overline{F_X}'(x)}{\overline{F_X}(x)}$$ (הרי הצפיפות היא הנגזרת השלילית של פונקצית השרידות).

נראה כעת כיצד פונקצית השרידות ניתנת לחישוב על פי קצב הסיכון.

כזכור $\log(g)' = \frac{1}{g} g'$

ולכן

$$-h_X(x) = \log(\overline{F_X}(x))'$$

ניקח אינטגרל על שני צדדי המשוואה ונקבל:

$$-\int_0^x h_X(s)ds = \log(\overline{F_X}(x))$$

ולכן

$$\overline{F_X}(x) = e^{-\int_0^x h_X(s)ds}$$

אם כך יש בידינו נוסחה המאפשרת לקבל את פונקצית השרידות (ובכך כמובן גם את פונקצית ההתפלגות המצטברת) מפונקצית קצב הסיכון.

כמו כן ניתן שוב לראות שעבור המקרה האקספוננציאלי (קצב סיכון קבוע λ), הערך של האינטגרל באקספוננט הוא $-\lambda x$ כצפוי.

הערה: כאשר נדון במערכות תורים (בהמשך הקורס) נתייחס אל משתנים מקריים אי-שליליים רציפים כזמנים בין הגעות של לקוחות במערכת וכזמני שרות לקוחות בדוגמאות אלו, קצב הסיכון ישמש כקצב הגעה או קצב שרות. ז"א לקצב הסיכון יכולה להיות גם משמעות של קצב שרות/הגעה מעבר לקצב התמותה/כשלון אשר הוצג בפרק זה.

דוגמא, התפלגות Weibull:

פונ' הצפיפות היא: $f_X^{(x)} = \alpha\lambda x^{\alpha-1}e^{-\lambda x^{\alpha}}$,
ההתפלגות מוגדרת באופן טבעי ע"י קצב הסיכון $h_X(x) = \alpha\lambda x^{\alpha-1}$. כך הפרמטר α קובע האם הסיכון עולה או יורד ככל ש x גדל. לדוגמא עבור $\alpha = 1$ קצב הסיכון הוא קבוע (ואז ההתפלגות היא אקספוננציאלית), עבור $\alpha > 1$ קצב הסיכון עולה ועבור $\alpha < 1$ קצב הסיכון יורד.
קל לקבל את הצפיפות, השרידות והתוחלת של ההתפלגות מקצב הסיכון.

התפלגות זו משמשת פעמים רבות למידול אמינות של רכיבים וזאת בגלל שלפעמים יותר נוח להתאים סטטיסטית קצב סיכון מאשר צפיפות או שרידות וקצב הסיכון של התפלגות זו הוא הגיוני למידול (עולה קבוע או יורד ובקצבים שונים).

פרק ג-3: מבוא לתהליך פואסון.

הגדרת תהליך ספירה:

לפני שנתאר ונגדיר במפורט מהו תהליך פואסון, נגדיר את המונח של תהליך ספירה. תהליך סטוכסטי $\{N(t), t \ge 0\}$ הוא **תהליך ספירה בזמן רציף** אם N(t) מסמל את סך המאורעות אשר הגיעו/אירעו/נספרו/נולדו עד זמן t. ריאליזציה של תהליך ספירה נראית כמו פונקצית מדרגה לא יורדת, רציפה מימין ובעלת גבול משמאל. באמצעות תהליך ספירה ניתן לתאר:

א) מרכזיית טלפון אשר מקבלת שיחות טלפון.
ב) מונה גייגר אשר סופג חלקיקים.
ג) תביעות לחברת ביטוח.
ד) שאילתות http לאתר אינטרנט.

<u>הגדרה (מפורטת):</u>
התהליך $\{N(t), t \ge 0\}$ הוא **תהליך ספירה בזמן רציף** אם:

1) $N(t) \ge 0$
2) N(t) מקבלים ערכים ב $\mathbb{N}$ (כולל 0).
3) אם s<t אזי $N(s) \le N(t)$
4) עבור s<t הערך $N(t) - N(s)$ מסמל את **מספר המאורעות** אשר אירעו באינטרוול (s,t].
5) N(0)=0. (הערה: בספרות לפעמים סעיף זה אינו חלק מההגדרה).

אם כך, ריאליזציה של תהליך ספירה נראית כמו פונקצית מדרגה לא יורדת כאשר כל "קפיצה" בפונקצית המדרגה בזמן t_0 מספרת כי בזמן זה, הגיעו $N(t_0) - N(t_0^-)$ ספירות חדשות.

הערה: לפעמים נכנה תהליך מסוג זה, **תהליך לידה טהור** ונתייחס לערך התהליך כמצב (כפי שהתייחסנו למצב בשרשראות מרקוב) ונאמר כי השינויים במצב יכולים להיות "רק כלפי מעלה". המונח "לידה טהור" נובע מהעובדה כי בהמשך נפגוש תהליכים אשר נקראים תהליכי לידה מוות ובהם לא רק נולדים (עולים כלפי מעלה במצב) אלה גם מתים (יורדים כלפי מטה במצב).

הקשר בין תהליך ספירה לתהליך זמני ההגעה:

הערה: נושא זה גם תואר בפרק א-5.

בסעיף הקודם תיארנו תהליך ספירה בצורה הישירה, ערך התהליך בזמן t. המאורע $\{N(t) = n\}$ מתאר כי עד זמן t נספרו n הגעות והמאורע $\{N(t) \le n\}$ מתאר כי עד זמן t נספרו לכל היותר n הגעות. ניתן לתאר תהליך ספירה גם בצורה עקיפה, זאת ע"י תיאור של זמני הגעות/זמני הספירה. ע"י ידע של כל זמני ההגעה, ניתן הרי לשחזר את מספר ההגעות בכל זמן נתון.

נסמן בתהליך $\{T(n), n = 1, 2, ...\}$ את **תהליך זמני ההגעה/המופע**. מרחב המצבים של תהליך זה הוא רציף בעוד שמרחב הפרמטר הוא בדיד. המשמעות של מאורע מהסוג $\{T(n) = t_0\}$ הוא "זמן הספירה ה n הוא t_0".

הערה: נקבע כי $T(0) \equiv 0$.
לפעמים נוח להגדיר את תהליך זמני ההגעה כך:

$T(n)=\inf\{t\in\mathbb{R} \mid n\le N(t)\}$ - זהו הזמן המינימאלי מבין כל הזמנים אשר בו תהליך הספירה הוא לפחות n.

באופן דומה, ניתן להגדיר את תהליך הספירה כך: $N(t)=\sup\{n\in\mathbb{N} \mid T(n)\le t\}$ - זהו ערך הספירה המקסימאלי מבין כל ערכי הספירה אשר ההגעה שלו הייתה לכל היותר בזמן t.

קשר בסיסי בין תהליך ספריה לתהליך זמני ההגעות המתאים הוא השקילות בין שתי המאורעות הבאים: $\{N(t)\le n\}\Leftrightarrow\{T(n)\ge t\}$. (זאת כמובן עבור $\omega\in\Omega$ נתונה).

הוכחה לכוון $\Leftarrow$: אם זמן ההגעה ה n הוא לאחר או שווה לזמן t אזי בזמן t היו לכל היותר n ספירות.

הוכחה לכוון $\Rightarrow$: אם בזמן t היו לכל היותר n ספירות אזי הספירה ה n חייבת להיות לפחות בזמן t.

קשר דומה נוסף הוא: $\{N(t)<n\}\Leftrightarrow\{T(n)>t\}$.

קשר הכלה בין מאורעות הבנויים על N(t) הוא: $\{N(t)\ge n+1\}\subseteq\{N(t)\ge n\}$.

בנוסף מתקיים $\{N(t)=n\}\cup\{N(t)\ge n+1\}=\{N(t)\ge n\}$ (והאיחוד הוא איחוד זר) ולכן $\{N(t)=n\}=\{N(t)\ge n\}\setminus\{N(t)\ge n+1\}$

ואז לפי הקשר הבסיסי לעיל: $\{N(t)=n\}=\{T(n)\le t\}\setminus\{T(n+1)\le t\}$.

תיאור אינטואיטיבי של תהליך פואסון כקרוב של תהליך בינומי:

נשים לב שהגדרתנו לתהליך ספירה לא ייחסה חוק הסתברות כלשהו לתהליך (לאוסף הריאליזציות האפשריות של התהליך) אלה בסך הכול תיארה תכונות כלליות של כל ריאליזציה של התהליך. כעת נתאר את חוק הסתברות עבור המקרה הפרטי המעניין: תהליך פואסון.

בפרק הבא נגדיר במדויק את תהליך פואסון, כאן נקבל תחושה בלבד. נניח כי אנו מבצעים את התרגיל הבא, מתבוננים בעיניים של חברנו ורושמים את הזמנים של המצמוצים בעיניים. "הגעות" המצמוצים יכולים להוות תהליך ספירה (כאשר בזמן t, ערך התהליך מספר כמה מצמוצים היו בפרק הזמן $[0,t]$). נניח כי הופעת מצמוץ ברגע מסוים אינה תלויה בהופעות המצמוצים אשר אירעו ברגעים הקודמים, במילים אחרות, נניח כי ציר הזמן מחולק ל"רגעים" שהם יחסית קטנים (נאמר עשירית שנייה), והופעת מצמוץ ברגע מסוים היא בעצם כמו הצלחה בניסוי ברנולי ברגע זה (אי-הופעת מצמוץ היא כמו כשלון בניסוי הברנולי). בנוסף נניח כי כל ניסויי הברנולי הינם בלתי תלויים. כאשר מניחים כי ההסתברות ליותר ממצמוץ אחד ב"רגע" היא אפס, ומשאיפים את גודל הרגעים ל 0 בצורה מתאימה, אז מקבלים תהליך פואסון.

אופן השאיפה צריך להיות כזה: ברור כי כאשר גודל "רגע" שואף לאפס אז גם ההסתברות להצלחה צריכה לשאוף לאפס. אבל אם משמרים את המנה של הסתברות ההצלחה וגודל הרגע קבוע אז מקבלים תהליך פואסון.

נראה בהמשך שתהליך פואסון קשור ישירות להתפלגות הפואסון – ערך התהליך בזמן t מתפלג פואסונית עם פרמטר λt, כאשר λ הוא תוחלת מספר המופעים ליחידת זמן.

כאן ניזכר ביחס בין התפלגות פואסון וההתפלגות הבינומית:

יהי X_n משתנה מקרי המתפלג בינומית עם פרמטרים n ו p_n. אם נשאיף את n לאינסוף ואת p_n ל 0 כך שנשמר את היחס $np_n=\lambda$ או $p_n=\dfrac{\lambda}{n}$ אזי נקבל שהתפלגות X_n שואפת להתפלגות פואסונית עם פרמטר λ. קל להוכיח תוצאה זו:

$$P(X_n=k)=\binom{n}{k}{p_n}^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}=$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{\underbrace{n....n}_{k}}\frac{1}{(1-\frac{\lambda}{n})^k}(1-\frac{\lambda}{n})^n\frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\lim_{n\to\infty}P(X_n=k)=1\cdot1\cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

מה אנו לומדים מקשר זה בין ההתפלגויות? נניח כי ציר הזמן שלנו הוא סופי (נניח 1). ויש לנו תהליך ספירה או תהליך הגעות על ציר זמן זה. נניח בנוסף כי ההסתברות הרגעית להגעה היא קבועה (קצב הסיכון) והיא λ. כעת נניח כי אנו מקרבים את תהליך ההגעות ע"י חלוקה של ציר הזמן הרציף ל n יחידות זמן, ובכל יחידת זמן יתכן אחד משני מקרים. א) אין הגעות. ב) יש הגעה אחת. ההסתברות להגעה היא $p_n=\frac{\lambda}{n}$. אז במקרה זה מס' ההגעות מתפלגת בינומית כמו המשתנה המקרי X_n. אך כאשר נשאיף את n לאינסוף נקבל כפי שצוין לעיל כי ההתפלגות הגבולית הינה פואסונית וזה בצירוף עם התוצאה אשר תיארנו לעיל כי ההתפלגות של תהליך פואסון בזמן t היא פואסונית עם פרמטר λt.

<u>הגדרת אינקרימנטים בלתי תלויים:</u>

הערה: הגדרה זו גם הוצגה בפרק א-5.

<u>הגדרה:</u>
תהליך ספירה הוא בעל **אינקרימנטים בלתי תלויים** אם מספר המאורעות אשר מופעים בקטעי זמן זרים הם בלתי תלויים.

הערה: תהליך עם אינקרימנטים בלתי תלויים מקיים כי N(t) בלתי תלוי ב N(t+s)-N(t). (כי האינטרוולים (0,t) ו (t,t+s) הינם זרים).

בפרק הבא נראה כי תהליך פואסון הוא בעל אינקרימנטים בלתי תלויים.

<u>הגדרת אינקרימנטים סטציונרים:</u>

הערה: הגדרה זו גם הוצגה בפרק א-5.

<u>הגדרה:</u>
תהליך ספירה הוא בעל **אינקרימנטים סטציונרים** אם עבור כל אינטרוול $(t_1,t_2]$ מתקיים כי $N(t_2)-N(t_1)$ מתפלג כמו $N(t_2+s)-N(t_1+s)$ עבור כל s חיובי.

משמעות ההגדרה היא שהתפלגות מספר אינקרימנטים/הגעות/מאורעות באינטרוול תלויה רק באורך האינטרוול.

הערה: בחלק הקודם של הקורס (שרשראות מרקוב) למדנו מהו תהליך סטציונרי. על נא נבלבל בין המושגים. תהליך בעל אינקרימנטים סטציונרים אינו בהכרח תהליך סטציונרי. אבל תהליך סטציונרי הוא בעל אינקרימנטים בלתי תלויים.

הגדרה טכנית $o(h)$:

הגדרה:

נאמר שפונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **היא o(h)** אם מתקיים: $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=0$.

הערה: באופן מדויק, o(h) היא קבוצת כל הפונקציות אשר מקיימות את התנאי שצוין לעיל. למרות זאת, נוח פשוט לומר כי פונקציה "היא o(h) " ובכך הכוונה היא ששאיפת הפונקציה ל 0 היא בקצב גבוהה מליניארי וגבולה ב 0 – הוא 0.

דוגמא:

הפונקציה $f(x)=x^2$ היא o(h) כי $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}=\lim_{h\to 0}h=0$.

הפונקציה $f(x)=x$ אינה o(h) כי $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1\neq 0$

באופן כללי $f(x)=x^{\alpha}$ היא o(h) אם $\alpha>1$.

טענה: כל קומבינציה ליניארית סופית של פונקציות שהן o(h), גם היא o(h).

הוכחה:

צריך להוכיח כי אם $f_1,...,f_n$ הן o(h) אזי גם $g(x)=c_1f_1(x)+...+c_nf_n(x)$ היא גם o(h).

מתקיים כי:

$$\lim_{h\to 0}\frac{c_if_i(h)}{h}=c_i\lim_{h\to 0}\frac{f_i(h)}{h}=c_i\cdot 0=0$$

ולכן c_if_i היא o(h).

בנוסף מתקיים כי $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)+g(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h}=0+0=0$

ולכן כל סכום של שתי פו' שהן o(h) הוא o(h) ולכן גם כל סכום סופי הוא o(h).

פרק ג-4: תהליך פואסון –ארבע הגדרות שקולות.

לאחר המבוא האינטואיטיבי מהפרק הקודם, נגדיר בפרק זה את תהליך פואסון במדויק. למעשה נציג 4 הגדרות שונות לתהליך, ונוכיח שההגדרות שקולות. ע"י הצגה זו, נלמד על מספר תכונות חשובות של התהליך.

ארבע הגדרות ומשפט מסכם:

הגדרה 1 (**ההגדרה הטהורה**):

תהליך ספירה $N=\{N_t, t\in[0,\infty)\}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אם:

1. כל קפיצה היא בגודל 1.
2. לתהליך אינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

הגדרה 2 (**ההגדרה המיקרו ברנולית**):

תהליך ספירה $N=\{N_t, t\in[0,\infty)\}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אם:

1. $P(N_h=1)=\lambda h+o(h)$.
2. $P(N_h\geq 2)=o(h)$.
1. לתהליך אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים.

הגדרה 3 (**הגדרת פילוג פואסון**):

תהליך ספירה $N=\{N_t, t\in[0,\infty)\}$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ, אם:

2. $N_t-N_s \sim Poisson(\lambda(t-s))$ (עבור $t>s$).
3. לתהליך אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים.

הגדרה 4 (**הגדרת תהליך החידוש**):

יהיו $X_1,X_2,...$ משתנים מקריים i.i.d. מהתפלגות $\exp(\lambda)$, נקרא לערכי משתנים אלו **זמנים בין מופעיים**. נגדיר $T_n=X_1+...+X_n$, וגם $T_0=0$ נקרה למשתנים אלו, **זמני המופע ה n**. נגדיר $N_t=\sup\{n\in\mathbb{N} \mid T_n\leq t\}$, אזי N_t הוא תהליך פואסון עם פרמטר λ.

ההגדרה הטהורה הינה הגדרה כללית ביותר, היא אומרת שכל תהליך קפיצה בעל קפיצות בגודל יחידה בעל אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים הוא תהליך פואסון. זאתי אכן, הגדרה כללית ביותר. היא טהורה במובן שאינה מחייבת שהתהליך יהיה מורכב מהתפלגות כלשהי מפורשת. ההגדרה **המיקרו ברנולית** טוענת שבזמן קטן (אינפיניטסימאלי), ישנה הסתברות של λh שתהייה הגעה. זאתי בעצם הגדרה הטוענת שקצב הסיכון של ההגעות הוא קבוע. גם הגדרה זו דורשת אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים. **הגדרת פילוג פואסון** גם היא דורשת אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים אבל אינה מחייבת שגודל כל קפיצה יהיה 1, מאידך היא מחייבת שבפרק זמן באורך נתון, מס' ההגעות (הספירות) יהיה פואסוני עם ממוצע פרופורציונאלי לאורך הקטע. **הגדרת תהליך החידוש**, היא הגדרה קונסטרוקטיבית, היא אומרת שבכדי ליצור תהליך פואסון דרוש להתחיל בזמן 0, להגריל משתנה מקרי אקספוננציאלי, לחכות את הזמן עד הערך המקרי ואז לספור 1, להגריל עוד משתנה, לחקות ושוב לספור וכן הלאה. הביטוי $N_t=\sup\{n\in\mathbb{N} \mid T_n\leq t\}$ אולי נראה קצת מסובך בראשית, אבל בעצם הוא בסך הכול אומר שערך התהליך N_t הוא מספר המשתנים המקריים האקספוננציאלים אשר נספרו עד זמן t (וערך זה גדל ב 1 רק בנקודות זמן בהם התווסף עוד משתנה מקרי לתהליך).

לפני שנוכיח כי כל אחת מההגדרות שקולות, ננסח את כל אשר אנו יודעים על תהליך פואסון על פי ההגדרות במשפט:

משפט (מסכם של תכונות בסיסיות של תהליך פואסון):

יהי $N=\{N_t, t\in[0,\infty)\}$ תהליך פואסון עם פרמטר λ אזי:

1. N הוא תהליך ספירה.
2. קפיצות N הן בגודל 1.
3. N הוא בעל אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים.
4. $N_t - N_s \sim Poisson(\lambda(t-s))$ (עבור $t > s$).
5. $N_t \sim Poison(\lambda t)$
6. תוחלת התהליך (EN_t) היא λt.
7. עבור s<t מתקיים $Cov(N_t, N_s) = \lambda s$.
8. $P(N_h = 1) = \lambda h + o(h)$
9. $P(N_h \geq 2) = o(h)$
10. $P(N_h = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$
11. זמן המופע ה 1 מתפלג $\exp(\lambda)$.
12. הזמנים הבין מופעיים מתפלגים $\exp(\lambda)$.
13. זמן המופע ה n מתפלג $erlang(n, \lambda)$.

<u>הוכחה:</u>
(ההוכחה מתבססת על שקילות ארבעת ההגדרות – יוכח בהמשך).
1,2,3,4: נתון מההגדרות.
5: זהו 4 עבור s=0.
6: ידוע כי תוחלת של משתנה מקרי $poisson(\alpha)$ היא α.
7: שונות של משתנה מקרי $poisson(\alpha)$ היא α. בנוסף נשתמש בעובדה כי הcovariance היא ליניארית במשתנה הראשון ובתכונת אינקרימנטים סטציונרים.

$$Cov(N_t, N_s) = Cov(N_t - N_s + N_s, N_s) = Cov(N_t - N_s, N_s) + Cov(N_s, N_s) =$$
$$= 0 + Var(N_s) = \lambda s$$

8,9: נתון מההגדרות.
10: ע"י המשלים של 8 ו 9.

$$P(N_h = 0) = 1 - P(N_h = 1) - P(N_h \geq 2) = 1 - (\lambda h + o(h)) - o(h) =$$
$$1 - \lambda h - 2o(h) = 1 - \lambda h + o(h)$$

11: מוכח בהוכחת השקילות בין ההגדרות (הגדרה 3 $\Leftarrow$ הגדרה 4).
12: מוכח בהוכחת השקילות בין ההגדרות (הגדרה 3 $\Leftarrow$ הגדרה 4).
13: סכום של אקספוננציאלים i.i.d. הוא ארלנג.
■

<u>הוכחות שקילות ההגדרות:</u>

ראשית נבצע מספר פיתוחי עזר ולאחר מכן נראה את הקשר המעגלי הבא בין ההגדרות: $1 \Rightarrow 4 \Rightarrow 3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$, ולכן כל ההגדרות שקולות.

<u>פיתוח עזר 1:</u>
יהי N תהליך ספירה בעל אינקרימנטים בלתי תלויים וסטציונרים:
נסמן $P_n(t) = P(N_t = n)$.
לפי סימון זה, $P_0(t+h) = P(N(t+h) = 0)$.

$$= P(N(t) = 0, N(t+h) - N(t) = 0)$$
$$= P(N(t) = 0)P(N(t+h) - N(t) = 0)$$

וזאת על פי אינקרימנטים בלתי תלויים.

וזה שווה ל $P(N(t)=0)P(N(h)=0)$ (על פי אינקרימנטים סטציונרים).
אם כך קבלנו: $P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)$
$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)$.
■

<u>פיתוח עזר 2:</u>
נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הפשוטה הנ"ל:
$$\begin{matrix} f(0)=1 \\ f'(t)=af(t) \end{matrix}$$ עבור t אי-שלילי.

$$\frac{f'(t)}{f(t)}=a \;\Leftarrow\; (\log f(t))'=a \;\Leftarrow\;\Leftarrow\; \log f(t)=at+c \quad f(t)=Ce^{at} \Leftarrow f(t)=e^{at}e^{c}$$
תנאי ההתחלה גורר כי $f(0)=1=Ce^{a0}=C$. ולכן הפתרון הוא $f(t)=e^{at}$.
■

<u>פיתוח עזר 3:</u>
נפתור את המשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל:
$f'(t)=af(t)+g(t)$ עבור t אי-שלילי.

נכפיל את המשוואה ב e^{-at} :
$$e^{-at}f'(t)-ae^{-at}f(t)=e^{-at}g(t)$$
צד שמאל הוא נגזרת של מכפלה:
$$(e^{-at}f(t))'=e^{-at}g(t)$$
כך (ע"י אינטגרציה והעברת אגפים) נקבל את הפתרון הכללי:
$$f(t)=\frac{\int e^{-as}g(s)ds}{e^{-at}}$$
■

הוכחת: <u>**(ההגדרה הטהורה)** $\Leftarrow$ **(ההגדרה המיקרו ברנולית).**</u>
לא נציג הוכחה זאת כאן.

הוכחת: <u>**(ההגדרה המיקרו ברנולית)** $\Leftarrow$ **(הגדרת פילוג פואסון)**</u>:
לפי פיתוח עזר 1 מקבלים.
$P_0(t+h)=P_0(t)P_0(h)=P_0(t)(1-\lambda h+o(h))$.
מכאן:
$$P_0(t+h)-P_0(t)=-\lambda hP_0(t)+P_0(t)o(h)$$
נחלק את שני צדדי המשוואה ב h וניקח גבול של h ל אפס:
$$\lim_{h\to 0}\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+P_0(t)\frac{o(h)}{h}.$$
נתבונן במשוואה ונזכר בהגדרת הנגזרת ובהגדרת o(h) וקבלנו את המשוואה הדיפרנציאלית הפשוטה:
$P_0'(t)=-\lambda P_0(t)$. תנאי ההתחלה הוא $P_0(t=0)=P(N(0)=0)=1$.
את משוואה זו פתרנו בפיתוח עזר 2 לעיל. ולכן $P_0(t)=e^{-\lambda t}$.

קבלנו אם כך כי $P(N_t=0)=e^{-\lambda t}$ כצפוי.

באופן דומה נחשב כעת את $P_n(t)$ עבור $n\ge 1$.
נסתכל על התהליך בזמן t+h. המאורע $\{N_{t+h}=n\}$ מתחלק לשלושת המאורעות הבאים:
$\{N_t=n, N_{t+h}-N_t=0\}$ - כל n ההגעות היו בקטע [0,t), ובקטע [t,t+h) לא היו הגעות.
$\{N_t=n-1, N_{t+h}-N_t=1\}$ - כל ההגעות פרט לאחת היו בקטע [0,t) וההגעה אחת הייתה בקטע [t,t+h).
$\{N_{t+h}=n, N_{t+h}-N_t\ge 2\}$ - הייתה יותר מהגעה אחת בקטע [t,t+h), ושאר ההגעות היו בקטע [0,t).
מכאן $P_n(t+h)=$

כך ניתן להגיעה למשוואה: $P_n'(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$. משוואה זו תואמת את המשוואה בפיתוח עזר 3 ולכן:
$$P_n(t)=\frac{\int e^{\lambda s}\lambda P_{n-1}(s)ds}{e^{\lambda t}}.$$
ראשית נחשב עבור n=1 ולאחר מכן נמשיך באינדוקציה.
ידוע כבר כי $P_0(s)=e^{-\lambda s}$ ולכן $P_1(t)=\frac{\lambda t+c}{e^{\lambda t}}=te^{-\lambda t}+ce^{-\lambda t}$.
תנאי ההתחלה הוא $P_1(0)=P(N_0=1)=0$ ולכן $0=0\lambda e^{-\lambda 0}+ce^{-\lambda 0}\Leftarrow c=0$.
אם כך: $P_1(t)=\lambda te^{-\lambda t}$ (כצפוי).

נוכיח באינדוקציה כי לכל $n\ge 1$ $P_n(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}$.
הנחת האינדוקציה היא $P_{n-1}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$
אם כך על פי הפתרון של המשוואה הדיפרנציאלית עבור $P_n(t)$ נקבל:
$$P_n(t)=\frac{\int e^{\lambda s}(\lambda e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!})ds}{e^{\lambda t}}=e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n}{(n-1)!}\int s^{n-1}ds=e^{-\lambda t}\frac{\lambda^n}{n!}(t^n+c)$$
נשתמש בתנאי ההתחלה $P_n(0)=P(N_0=n)=0$ ונקבל $0=0+c$.
אם כך הוכחנו את הרצוי: $N_t\sim Poison(\lambda t)$
■

הערה: הוכחה חלופית מקובלת הינה באמצעות פונקציות יוצרות.

<u>הוכחה: **(הגדרת פילוג פואסון)** $\Leftarrow$ **(הגדרת תהליך החידוש)**:</u>
נגדיר את $X_1,X_2,...$ להיות סדרת הזמנים הבין מופעיים של התהליך. בנוסף נסמן $T_n=X_1+...+X_n$, $T_0=0$, אם כך T_n הוא תהליך זמני ההגעות. עלינו להראות כי $X_1,X_2,...$ היא סדרה i.i.d. אקספוננציאלית עם פרמטר λ.
ראשית נבחין כי $\{X_1>t\}\Leftrightarrow\{N_t=0\}$. ידוע כי $N_t\sim poiison(\lambda t)$ ולכן:
$$\overline{F}_{X_1}(t)=P(X_1>t)=P(N_t=0)=e^{-\lambda t}$$
ולכן $X_1\sim\exp(\lambda)$.
נקבל כעת את התפלגות X_2 ע"י התניה ב X_1.
$$P(X_2>t\,|\,X_1=s)=P(A\,|\,X_1=s)$$

כאשר A הוא המאורע המתאר כי לא היו ספירות בזמן [s,s+t).
בגלל אינקרימנטים בלתי תלויים נקבל כי $P(A\,|\,X_1=s)=P(A)$
ובגלל אינקרימנטים סטציונרים נקבל כי $P(A)=e^{-\lambda t}$.
אם כך קיבלנו כי X_2 גם הוא $\exp(\lambda)$ והוא בלתי תלוי ב X_1.
■

הוכחת: (הגדרת תהליך החידוש) $\Leftarrow$ (ההגדרה הטהורה):
תהליך N_t אשר מוגדר כפי שמוגדר בהגדרת תהליך החידוש הוא בהכרח בעל קפיצות בגודל 1 (זאת כי ההסתברות כי משתנה מקרי אקספוננציאלי הוא בדיוק 0 היא 0). בנוסף הגדרת תהליך החידוש גוררת באופן מיידי אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים.
■

פיתוח צפיפות ארלנג באמצעות הקשר בין תהליך הספירה לתהליך זמני ההגעות:

בפרק הקודם ראינו כי סכום של משתנים מקריים אקספוננציאלים i.i.d. מתפלג ארלנג, הוכחנו זאת עבור המקרה הכללי יותר של סכום של גאמות עם פרמטר קצב זהה. כאן נראה פיתוח חלופי לתוצאה זו:

יהי $T_n \sim erlang(n,\lambda)$. אזי קיים תהליך פואסון N_t אשר עבורו T_n מסמל את זמן ההגעה ה n. אם כך:
$F_{T_n}(t)=P(T_n\le t)=P(N_t\ge n)=\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$. זהו בסך הכול שימוש בקשר בין תהליך ספירה לתהליך זמני ההגעות. אם כך,

$$f_{T_n}(t)=\frac{d}{dt}\sum_{k=n}^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{d}{dt}(e^{-\lambda t}(\lambda t)^k)=\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k!}(-\lambda e^{-\lambda t}(\lambda t)^k+\lambda e^{-\lambda t}k(\lambda t)^{k-1})=$$
$$=-\sum_{k=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}+\sum_{k=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!}=-\sum_{k=n}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}+\sum_{k'=n-1}^{\infty}\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{k'}}{k'!}=$$
$$=\lambda e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

פרק ג-5: חישובים נלווים לתהליך פואסון.

התפלגות מותניית של זמני ההגעה:

נניח כי ידוע ערך תהליך פואסון בזמן t. ז"א ידוע כי $N_t = n$. בסעיף זה נראה כיצד מתפלגים זמני ההגעה $T_1,...,T_n$ בהינתן מאורע זה.

לצורך חימום נניח כי ידוע כי $N_t = 1$. אזי יש לדון בהתפלגות של T_1.

עבור $0 \le s \le t$:

$$P(T_1 \le s \mid N_t = 1) = \frac{P(T_1 \le s, N_t = 1)}{P(N_t = 1)} = \frac{P(N_s = 1, N_t - N_s = 0)}{P(N_t = 1)} =$$

$$= \frac{P(N_s = 1)P(N_t - N_s = 0)}{P(N_t = 1)} = \frac{(e^{-\lambda s}\dfrac{(\lambda s)^1}{1!})(e^{-\lambda(t-s)}\dfrac{(\lambda(t-s))^0}{0!})}{e^{-\lambda t}\dfrac{(\lambda t)^1}{1!}} = \frac{s}{t}$$

עבור t<s ברור כי מתקיים

$$P(T_1 \le s \mid N_t = 1) = 1$$

וכמובן כי עבור s<0 מתקיים

$$P(T_1 \le s \mid N_t = 1) = 0$$

מכאן ראינו כי $T_1 \mid N_t = 1 \sim Uniform(0,t)$.

הערה: תוצאה זו (והתוצאה היותר הכללית הבאה) ממחישה את "האקראיות" של תהליך הגעה פואסוני.

כעת נחזור על התרגיל הנ"ל עבור התפלגות של $T_1,...,T_n \mid N_t = n$. כאן נחפש את ההתפלגות המשותפת המותנית. ברור יהיה כי התומך של ההתפלגות הנ"ל (האזור בו פו' הצפיפות חיובית ממש בתוך $\mathbb{R}^n$) צריך להיות כזה אשר רק מכיל וקטורים n מימדים סדורים. את הניתוח נבצע כאן לפי פו' הצפיפות ולא לפי פו' ההתפלגות המצטברת. נסתכל על הצפיפות בנקודה $s_1,...,s_n$ כאשר מתקיים $s_1 < s_2 < ... < s_n$. (בכל נקודה אחרת הצפיפות תהיה 0).

$$f_{T_1,...,T_n|N_t}(s_1,...,s_n \mid n)\Delta_1...\Delta_n = \frac{P(T_1 = s_1,...,T_n = s_n, N_t = n)}{P(N_t = n)}\Delta_1...\Delta_n$$

ברור כי הכתוב למעלה אינו נכון, כי הרי ההסתברות שמשתנה מקרי רציף יקבל ערך מסוים ספציפי הינה 0. למרות זאת, נשתמש בכתיבה זו לקצר את המשוואה הבא:

$$\lim_{\substack{\sup \Delta_i \to 0 \\ i=1,...,n}} f_{T_1,...,T_n|N_t}(s_1,...,s_n \mid n)\Delta_1...\Delta_n = \lim_{\substack{\sup \Delta_i \to 0 \\ i=1,...,n}} \frac{P(T_1 \in [s_1, s_1 + \Delta_1),...,T_n \in [s_n, s_n + \Delta_n), N_t = n)}{P(N_t = n)}$$

אם כך נמשיך את הפיתוח בעזרת הכתיבה ה"שגויה":

$$\frac{P(T_1 = s_1,...,T_n = s_n, N_t = n)}{P(N_t = n)} = \frac{P(N_{s_1+\Delta_1} - N_{s_1} = 1,...,N_{s_n+\Delta_n} - N_{s_n} = 1, A)}{P(N_t = n)}$$

כאשר המאורע A מסמל – "לא היו הגעות בכל פרק הזמן פרט לזמנים סביב $s_1,...,s_n$".

ומכאן (אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים) זה שווה:

$$\frac{P(N_{s_1+\Delta_1}-N_{s_1}=1),...,P(N_{s_n+\Delta_n}-N_{s_n}=1),P(A)}{P(N_t=n)}$$

$$=\frac{(e^{-\lambda\Delta_1}\frac{(\lambda\Delta_1)^1}{1!})...(e^{-\lambda\Delta_n}\frac{(\lambda\Delta_n)^1}{1!})(e^{-\lambda(t-(\Delta_1+...+\Delta_n))})}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}=\frac{n!}{t^n}$$

אם כך עבור נקודות $s=(s_1,...,s_n)$ ב $\mathbb{R}^n$ המקיימות $s_1<s_2<...<s_n$, מתקיים כי הצפיפות היא $\frac{n!}{t^n}$ (אינה תלויה בערך הנקודה). ועבור נקודות אשר אינן מקיימות $s_1<s_2<...<s_n$ נקבל כמובן כי $P(T_1=s_1,...,T_n=s_n \mid N_t=n)=0$. ניזכר בצפיפות המשותפת של סטטיסטי הסדר של מדגם i.i.d. ואם כך קבלנו כי $T_1,...,T_n \mid N_t=n$ מתפלגים במשותף כמו סטטיסטי הסדר ממדגם i.i.d. מהתפלגות $Uniform(0,t)$.

<u>דוגמא:</u>
שרת e-mail מחובר למחשבי קצה (בעלי תוכנות e-mail) בצד אחד, ולרשת העולמית בצד שני. תפקוד השרת בהיבט של שליחת דואר ממחשבי הקצה מתבצע כך: כאשר משתמש במחשב קצה שולח חבילת דואר בתוכנות ה e-mail שלו אז הדואר מועבר מיידית לשרת. השרת אוגר את הדואר היוצא, ואחת ל τ שניות הוא מעביר את הדואר היוצא הלאה לרשת העולמית.
(נניח כי אין כיתובי דואר בין clients אשר מחבורים לאותו שרת).
שליחת הדואר ממחשבי הקצה מתנהג כמו תהליך פואסון בעל פרמטר λ (יחידות דואר לשנייה).

ברור שככל ש τ גדול יותר אז חבילות דואר נאלצות להמתין יותר זמן בשרת. נרצה לחשב את תוחלת סכום זמני ההמתנה של חבילות דואר בין פעולות השרת (בפרק זמן τ) – ערך זהה מהווה את מחיר ההמתנה הכולל.

נרצה אם כך לחשב את $C=E\left[\sum_{k=1}^{N_\tau}(\tau-T_k)\right]$. נשתמש בתכונת ההתפלגות המותנית של זמני הגעה ונתנה את התוחלת ב N_τ.

$$E\left[\sum_{k=1}^{N_\tau}(\tau-T_k) \mid N_\tau=n\right]=E\left[\sum_{k=1}^{n}(\tau-T_k) \mid N_\tau=n\right]=E\sum_{k=1}^{n}\tau-E[\sum_{k=1}^{n}T_k \mid N_\tau=n]$$

עכשיו ידוע כי $T_1,...,T_n \mid N_\tau=n$ מתפלג כמו סטטיסטי הסדר היוניפורמי המשותף ולכן $\sum_{k=1}^{n}T_k \mid N_\tau=n$ מתפלג כמו סכום של n משתנים מקריים i.i.d. $Uniform(0,t)$ (נסמנם ב $U_1,...,U_n$).
ולכן הביטוי לעיל שווה ל:

$$.n\tau-E\sum_{k=1}^{n}U_k=n\tau-\sum_{k=1}^{n}EU_k=n\tau-n\frac{\tau}{2}=\frac{n\tau}{2}$$

כעת נוריד את ההתניה ע"י משפט התוחלת המותנית ניקח תוחלת חיצונית לפי התפלגות N_τ. קבלנו אם כך:

$$.C=E\frac{N_\tau\tau}{2}=\frac{\tau}{2}EN_\tau=\frac{\lambda\tau^2}{2}$$

<u>דוגמא (מערכת שרות M/G/∞):</u>

הערה: משמעות הסימון M/G/∞ תתבהר במלואה בחלק ה' של הקורס.

במידול מערכות טלפוניה, ניתן להניח כקירוב ראשוני כי מספר קווי הטלפון היוצאים ממרכזיה הוא אינסופי. ז"א כל אדם אשר מרים את השפופרת ומחייג הוא "מבקש" קו טלפון מהמרכזייה ומקבל קו (לעולם אין מחסור בקווים).

ניתן להניח כי דרישות לקויי טלפון מגיעות למרכזיה על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. (נסמן N_t).

בנוסף, נניח כי משך כל שיחת טלפון (הזמן מחיוג המספר ועד ניתוק השיחה) מתנהג כמו משתנה מקרי X אי-שלילי בעל פו' התפלגות מצטברת $F_X(x)$. משכי השיחות הינם i.i.d. בנוסף נניח כי $EX=\mu$.

נניח כי המערכת התחילה (בזמן 0) ללא כל קווי טלפון תפוסים.

ההסתברות ששיחה אשר התחילה בזמן s עדיין מתנהלת בזמן t (כאשר $s<t$) היא ההסתברות ש $t-s<X$ וזה $\overline{F}_X(t-s)$.

אם כך אז בהינתן ש $N_t=n$ מתקיים כי זמני תחילת n השיחות מתפלגים כמו סטטיסטי הסדר של התפלגות אחידה n מימדים על הקטע $[0,t]$.

לכן אם נגדיר את $N_*(t)$=מס' השיחות שעדיין מתנהלות בזמן t אזי:

$$N_*(t) \sim poisson(\lambda\int_0^t \overline{F}_X{}^{(t-s)}ds)$$

מה הקשר ל μ? $\lim_{t\to\infty}\int_0^t \overline{F}_X{}^{(t-s)}ds = \lim_{t\to\infty}\int_0^t \overline{F}_X{}^{(s)}ds = EX = \mu$. ולכן כאשר $t\to\infty$ מספר השיחות במערכת מתפלג $Poiison(\mu t)$.

התפלגות מותנית של מספר המגיעים:

נניח כי ידוע כי $N_t=n$, מעניין כיצד מתפלג N_s עבור $s<t$. כבר ראינו כי תהליך פואסון מתאר הגעות אקראיות יוניפורמיות על פני הזמן. אם כך אפשר לשאר כי חלוקת ציר הזמן לשתי הקטעים: [0,s] ו [s,t). הראשון באורך s והשני באורך t-s מייצרת אוסף של n ניסויים בלתי תלויים כך שתוצאת ניסוי מהווה את הזמן בו הייתה הגעה, והסיכוי שהגעה תהיה בקטע היא פרופורציונאלית לאורך הקטע. אם כך היינו מצפים כי:

$$N_s \mid N_t \sim Bin(n,\frac{s}{t}).$$

נוכיח זאת:

$$P(N_s=k\mid N_t=n)=\frac{P(N_s=k,N_t=n)}{P(N_t=n)}=\frac{P(N_t-N_s=n-k,N_s=k)}{P(N_t=n)}=\frac{P(N_t-N_s=n-k)P(N_s=k)}{P(N_t=n)}=$$

$$=\frac{e^{-\lambda(t-s)}\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}}{(n-k)!}e^{-\lambda s}\frac{(\lambda s)^k}{k!}}{e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}}=\frac{n!}{(n-k)!k!}\frac{(\lambda(t-s))^{n-k}(\lambda s)^k}{(\lambda t)^n}=\binom{n}{k}\frac{(t-s)^{n-k}s^k}{t^{n-k}t^k}=\binom{n}{k}(\frac{s}{t})^k(1-\frac{s}{t})^{n-k}$$

פרק ג-6: השוואה בין תהליכי פואסון ותהליכי ברנולי

הטבלה הבאה מציגה מספר משתנים מקריים שונים אשר קיימים בתהליכי פואסון ובתהליכי ברנולי. ניתן לראות כי קיים קשר בין הפילוג של כל משתנה מקרי בתהליכי הברנולי, למשתנה המקרי המתאים בתהליכי פואסון.

המשתנה המקרי בתהליכי ברנולי ובתהליך פואסון	פילוג בתהליך ספירה ברנולי	פילוג בתהליך פואסון
N_t או N_n	$Bin(n,p)$	$Poisson(\lambda)$
T_1	$Geom(p)$	$Exp(\lambda)$
$T_k\ (k\in\mathbb{N})$	$NB(k,p)$	$Erlang(k,\lambda)$
$N_s\mid N_t$ או $N_m\mid N_n$	HG	Bin
$T\mid N$	$DiscreteUniform$	$Uniform$

$$N_n = x_1 + ... + x_n\ (x_i \sim Bernoulli(p))\ \Rightarrow N_n \sim Bin(n,p)$$

$$\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}\ (n\to\infty, p\to 0) \Rightarrow N_n = N_t \to poisson(\lambda)$$

$T_1 =$ (מס' ניסיונות עד "הצלחה ראשונה" בתהליך ברנולי או זמן עד הגעת מופע ראשון בתהליך פואסון)

$T_k =$ (מס' ניסיונות עד הצלחה מס' k בתהליך ברנולי או זמן עד הגעת המופע ה-k בתהליך פואסון)

$$T_1 \sim Geom(p) \Rightarrow T_k = T_0 + (T_1 - T_0) + ... + (T_k - T_{k-1}) \Rightarrow T_k \sim NB(k,p)$$

$$T_1 \sim \exp(\lambda) \Rightarrow T_k = T_1 + (T_2 - T_1) + (T_3 - T_2) + ... + (T_k + T_{k-1}) \Rightarrow T_k \sim Erlang(k,\lambda)$$

בתהליך ברנולי:

$$N_m \mid N_n (n > m)\ \to p(N_m = x \mid N_n = y) \sim HG(n,m,y) = \frac{\binom{m}{x}\binom{n-m}{y-x}}{\binom{n}{y}}$$

<u>התפלגות היפר-גיאומטרית</u>: נתונה אוכלוסיה בגודל n , כאשר m אלמנטים מתוכה הם מסוג א' והשאר (m-n) הם מסוג ב', ניקח מדגם בגודל y מהאוכלוסייה ונחשב את ההסתברות ש-x מתוכם יהיו מסוג א'.

<u>במקרה שלנו</u>: n ניסויי ברנולי, נלקח מדגם של y הצלחות ונחשב את ההסתברות ש-x מתוכם נפלו בחלק א' (m הניסויים הראשונים).

בתהליך פואסון:

$$N_s \mid N_t (s < t) \to p(N_s = m \mid N_t = n) \sim Bin(n, s/t) = \binom{n}{m}(s/t)^m (1 - s/t)^{n-m}$$

<u>הקשר בין ההתפלגויות</u>: $X \sim Bin(y, m/n)_{n\to\infty} \Rightarrow X \sim HG(n,m,y)$ (כאשר y=מדגם מקרי, n=אוכלוסיה, m= פריטים מסוג א'). (זאת כאשר $\frac{n}{m} \to p$ קבוע).

$$T \mid N \to p(T_1 = k \mid N_n = 1) = \frac{p(T_1 = k, N_n = 1)}{p(N_n = 1)} = \frac{p(x_1, ..., x_{k-1} = 0, x_k = 1, x_{k+1}, ...x_n = 0)}{\binom{n}{1} p(1-p)^{n-1}} =$$

$$\frac{(1-p)^{n-1} p}{n(1-p)^{n-1} p} = \frac{1}{n} \Rightarrow \sim DiscreteUniform(1,n)$$

(בתהליך ברנולי)

(T|N בתהליך פואסון מתואר בפרק ג-5)

פרק ג-7: פיצול ומיזוג של תהליכי פואסון.

בפרק זה נכיר שתי תכונות חשובות של תהליכי פואסון:

- **פיצול -** כאשר מפצלים את זרם ההגעות של תהליך פואסון למספר זרמים ע"י הגרלה שוות התפלגות ובלתי תלויה עבור כל הגעה האומרת לאיזה זרם ההגעה משתייכת אז הזרמים הנוצרים הינם תהליכי פואסון עם פרמטר קצב שהוא קצב התהליך המקורי מוכפל בהסתברות לפיצול לאותו זרם.
- **מיזוג** - סכום (מיזוג) של תהליכי פואסון הוא תהליך פואסון בעל סכום הקצבים.

לתכונות אלו יישומים מרחיקי לכת.

תכונת פיצול פואסון

משפט:

יהי N_t תהליך פואסון עם פרמטר λ. נניח כי נוצרים שני תהליכים נוספים, N_t^1 ו N_t^2 באופן הבא. עבור כל הגעה של N_t מבצעים את ההגרלה הבאה (באופן בלתי תלוי): בסיכוי p קובעים כי ההגעה היא של N_t^1 ובסיכוי 1-p קובעים כי ההגעה היא של N_t^2. אז:

- התהליך N_t^1 הוא תהליך פואסון עם פרמטר λp.
- התהליך N_t^2 הוא תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda(1-p)$.
- שני התהליכים הינם בלתי תלויים (ז"א כל אוסף של משתנים מקריים אשר נוצרים בין התהליכים הנ"ל הינו ב"ת).

הערה: המשפט מציין כי התהליכים אשר מתפצלים מתהליך פואסון גם הם תהליכי פואסון והם בלתי תלויים. הפיצול המצוין במשפט הוא בינארי אבל ההרחבה לפיצול ל $2 \le n$ תהליכים היא מיידית.

הוכחה:

נראה שהתהליכים N_t^1 ו - N_t^2 הינם תהליכי ספירה בעלי אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים והתפלגות של אינקרימנט פואסונית עם הפרמטרים המתאימים, ולכן הם תהליכי פואסון עם הפרמטרים המתאימים.
זה שהם תהליכי ספירה זה ברור.
נסמן ב - $B(n,p)$ משתנה מקרי בינומי עם פרמטרים p,n.
נסתכל על הפילוג המשותף של שני אינקרימנטים של שני התהליכים באותו נקודת זמן:

$$\begin{aligned}
&P(N_{t+s}{}^1 - N_s{}^1 = j, N_{t+s}{}^2 - N_s{}^2 = k) = \\
&P(N_{t+s} - N_s = j+k, B(j+k,p) = j) = \\
&(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!})\cdot(\binom{j+k}{j}p^j(1-p)^{(j+k)-j}) = \\
&e^{-\lambda(p+(1-p))t}\frac{(\lambda t)^{j+k}}{(j+k)!}\frac{(j+k)!}{j!k!}p^j(1-p)^k = \\
&e^{-\lambda pt}\frac{(\lambda pt)^j}{j!}\cdot e^{-\lambda(1-p)t}\frac{(\lambda(1-p)t)^k}{k!}
\end{aligned}$$

קבלנו אם כך כי הפילוגים הם פואסונים עם הפרמטרים הדרושים והם בלתי תלויים.
מ.ש.ל.

הערה: תכונה זו מפתיעה: נניח כי מדובר בתהליך פואסון של הגעות אנשים לבנק. כאשר בן-אנוש המגיע הוא גבר בהסתברות p ואישה בהסברות 1-p. נניח שידוע שבין השעות 8 ל 10 הגיעו 70 גברים, מידע זה אינו מספר לנו כלום (אי-תלות) לגבי כמות הנשים אשר הגיעה בפרק הזמן הזה.

תכונת מיזוג פואסון

הערה: למיזוג של תהליכי פואסון לפעמים קוראים סכום או סופר-פוזיציה.

משפט:
יהיו N_t^1 ו N_t^2 תהליכי פואסון בלתי תלויים בעלי קצבים λ_1 ו λ_2 בהתאמה. אזי התהליך $N_t = N_t^1 + N_t^2$ הוא תהליך פואסון בעל קצב $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

הוכחה:
נראה כי $N_t = N_t^1 + N_t^2$ הוא תהליך פואסון עם פרמטר $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.
נראה שהוא תהליך ספירה בעל אינקרימנטים סטציונרים בלתי תלויים ופילוג אינקרימנט פואסוני עם הפרמטר המתאים.

אינקרימנט של התהליך $N_t = N_t^1 + N_t^2$ בזמן $[s, s+t)$ הוא: $(N_{t+s}{}^1 - N_s{}^1) + (N_{t+s}{}^2 - N_s{}^2)$.
האינקרימנטים בכל אחת מההתפלגויות מתפלגים כך:

$$(N_{t+s}{}^1 - N_s{}^1) \sim Poisson(\lambda_1 t)$$
$$(N_{t+s}{}^2 - N_s{}^2) \sim Poisson(\lambda_2 t)$$

והם בלתי תלויים. בדוגמא א-4 הראנו כי קונבולוציה של שתי פו' מסת התפלגות פואסון היא פו' מסת התפלגות בעלת סכום העוצמות ולכן:

$$(N_{t+s}{}^1 - N_s{}^1) + (N_{t+s}{}^2 - N_s{}^2) \sim Poisson(\lambda_1 + \lambda_2)$$

אי-תלות של האינקרימנטים נובעת מאי-תלות של האינקרימנטים של תהליכי המקור.
מ.ש.ל.

דוגמאות ויישומים

דוגמא:
אנשים הולכים על המדרכה ליד חנות ספרים. המספר הממוצע של האנשים ההולכים בדקה לכוון 1 הוא 13. המספר הממוצע של האנשים ההולכים בדקה לכוון 2 הוא 7. בממוצע, אחד מכל 10 אנשים מחליט להיכנס לחנות הספרים. בהנחת תהליכי פואסון והסתברויות בלתי תלויות מה הסיכוי שבחמש הדקות הראשונות בה החנות פתוחה אף אחד לא ייכנס?

נגדיר: $N_1(t)$=מס' העוברים לכיוון 1 עד לזמן t , $N_2(t)$=מס' העוברים לכיוון 2 עד לזמן t, $N(t)$=מס' העוברים ליד החנות עד לזמן t , $N_e(t)$=מס' הנכנסים לחנות עד לזמן t, $N_{ne}(t)$=מס' הלא נכנסים....

דרך א:
נסכם את שתי התהליכים ואז נבצע דילול:

$$\left.\begin{aligned} N_1(t) &\sim poisson(13t) \\ N_2(t) &\sim poisson(7t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow N(t) \sim poisson(20t) \begin{aligned} &\nearrow N_e(t) \sim poisson(\tfrac{1}{10} \cdot 20t) \\ &\searrow N_{ne}(t) \sim poisson(\tfrac{9}{10} \cdot 20t) \end{aligned}$$

<u>דרך ב:</u>
נבצע דילול ולאחר מכן נסכם את שני התהליכים:

$$\left.\begin{array}{l} N_{1e}(t) \sim poisson(13 \cdot \tfrac{1}{10} t) \\ N_{2e}(t) \sim poisson(7 \cdot \tfrac{1}{10} t) \end{array}\right\} N_e(t) \sim poisson(\tfrac{1}{10} \cdot 20t)$$

$$\left.\begin{array}{l} N_{1ne}(t) \sim poisson(13 \cdot \tfrac{9}{10} t) \\ N_{2ne}(t) \sim poisson(7 \cdot \tfrac{9}{10} t) \end{array}\right\} N_{ne}(t) \sim poisson(\tfrac{9}{10} \cdot 20t)$$

<u>בשני הדרכים:</u> נחשב את $p(N_e(5)=0)$

<u>דוגמא:</u>
אנשים מגיעים לתחנת אוטובוס על פי תהליך פואסון עם קצב של 20 אנשים בשעה $(N_p(t))$, האנשים מחכים לאוטובוס שכאשר הוא מגיע הוא אוסף אותם.
גם האוטובוסים מגיעים לפי תהליך פואסון עם קצב של 1 בשעה $(N_b(t))$.
מהי התפלגות מספר האנשים אשר אוסף כל אוטובוס?

$$\left.\begin{array}{l} N_p(t) \sim poisson(20t) \\ N_b(t) \sim poisson(1t) \end{array}\right\} \Rightarrow N_{p+b}(t) \sim poisson(21t) \begin{array}{l} \nearrow p(people) = \tfrac{20}{21} \\ \searrow p(bus) = \tfrac{1}{21} \end{array}$$

$\Rightarrow$ מס' האנשים אשר אוסף כל אוטובוס $\sim Geometric(\tfrac{1}{21})$ (סופר כישלונות)

פרק ג-8: תהליך פואסון מורכב.

אז הכרנו את תהליך הפואסון. כעת נדון **בתהליך פואסון מורכב**. זהו וריאנט של תהליך פואסון ובו גודל הקפיצות עם כל הגעה הוא משתנה מקרי ולכל הקפיצות יש את אותה התפלגות. להלן ההגדרה המדויקת:

הגדרה:

תהליך סטוכסטי $\{X_t, t\geq 0\}$ הוא **תהליך פואסון מורכב** אם הוא ניתן לרישום כך:

$$X_t=\sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

כאשר $\{N_t, t\geq 0\}$ הוא תהליך פואסון ו $\{Y_n, n=1,2...\}$ הם אוסף משתנים מקריים i.i.d. חיוביים.

הערה: כאשר ההתפלגות של $\{Y_n, n=1,2...\}$ נותנת ל משתנים המקריים את הערך 1 בהסתברות 1 אזי התהליך הנ"ל הוא פשוט תהליך פואסון.

דוגמא:

קבצן יושב ברחוב ואוסף תרומות מהעוברים לידו. תרומות מגיעות אל הקבצן בקצב של λ על פי תהליך פואסון. הקבצן מקבל תרומות בהיקף של 5 אגורות, 10 אגורות, חצי שקל, שקל, חמישה שקלים ועשרה שקלים על פי הפילוג הבא:

$$P_{Y_i}(y)=\begin{cases}\frac{2}{15} & .05\\ \frac{5}{15} & .1\\ \frac{4}{15} & .5\\ \frac{2}{15} & 1\\ \frac{1}{15} & 5\\ \frac{1}{15} & 10\\ 0 & other\end{cases}$$

כאשר המשתנה המקרי Y_i מציין את גודל התרומה ה i בשקלים.

במידה ונניח שסדרת המשתנים המקריים Y_i הינה בלתי תלויה אז הונו של הקבצן מתנהג כמו תהליך פואסון מורכב.

הפילוג השולי של תהליך פואסון מורכב בזמן t

בחלקו הראשון של הקורס פגשנו את הסכום האקראי: $S=\sum_{n=1}^{N} Y_n$.

כאן N הוא משתנה מקרי בדיד ו $\{Y_n, n=1,2,...\}$ היא סדרה i.i.d. והיא גם בלתי תלויה ב N.

חישבנו את הגדלים הבאים:

תוחלת הסכום האקראי, $E[S]=E[Y]E[N]$

שונות הסכום האקראי, $Var(S)=E[N]Var(Y)+Var(N)E[Y]^2$

פו' יוצרת מומנטים של הסכום האקראי $M_S(s)=M_N(\log(M_Y(s))$

אנו כמובן יודעים כי $N_t\sim Poiison(\lambda t)$. ולכן:

$$EN_t = \lambda t$$
$$Var(N_t) = \lambda t$$
$$M_{N_t}(s) = e^{\lambda t(e^s - 1)}$$

ולכן עבור תהליך הפואסון המורכב $X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$ מתקיים:

$$EX_t = \lambda t EY$$
$$Var(X_t) = \lambda t Var(Y) + \lambda t E[Y]^2 = \lambda t(E[Y^2] - E[Y]^2 + E[Y]^2) = \lambda t E[Y^2]$$
$$M_{X_t}(s) = e^{\lambda t(e^{\log(M_X(s))} - 1)} = e^{\lambda t(M_X(s) - 1)}$$

דוגמא:
ניקח תהליך פואסון מורכב שהוא בעצם תהליך פואסון:
$P_Y(y) = I_{\{1\}}{}^{(y)}$ (פילוג אשר נותן לערך 1 הסתברות 1).
אם כך:

$$E[Y] = 1 \cdot 1 = 1$$
$$E[Y^2] = 1^2 \cdot 1 = 1$$
$$M_Y(s) = Ee^{sY} = e^{s1} \cdot 1 = e^s$$

הצבה בתוחלת, שונות ופו' יוצרת מומנטים של תהליך הפואסון המורכב נותנת ערכים המזדהים עם ערכי תהליך הפואסון.

הגדרה חלופית לתהליך פואסון מורכב

הערה: ניתן להגדיר תהליך פואסון מורכב על פי תכונות האינקרימנטים סטציונרים ובלתי תלויים.

פרק ג-9: תהליך פואסון לא הומוגני בזמן.

עבור כל התהליכים הסטוכסטיים אשר פגשנו עד כה, המרכיבים ההסתברותיים הבסיסים אשר מרכיבים את התהליך היו קבועים (הומוגניים) לאורך הזמן: בתהליך הברנולי, המשתנים המקרים אשר יצרו את ההצלחות/הפסדים היו שווי התפלגות. בשרשראות המרקוב, מטריצות המעבר לא היו תלויות בכמה זמן התהליך התקדם עד כה ובתהליך הפואסון קצב התהליך λ היה קבוע לאורך הזמן.

כעת נדון (בקצרה) בתהליך אשר אינו מקיים את התכונה הנ"ל (של הומוגניות הפרמטרים לאורך הזמן). זהו תהליך פואסון ובו קצב התהליך λ הוא פו' של הזמן, $\lambda(t)$.

<u>הגדרה:</u>
תהליך ספירה $\{N_t, t \ge 0\}$ הוא תהליך **פואסון לא הומוגני בזמן** בעל **פונקצית קצב** $\lambda(t)$ אם:

1. $P(N_{t+h} - N_t = 1) = \lambda(t)h + o(h)$.
2. $P(N_{t+h} - N_t \ge 2) = o(h)$.
3. לתהליך אינקרימנטים בלתי תלויים.

הערה: ניזכר בהגדרה המיקרו ברנולית של תהליך פואסון, להלן ההבדלים בינה ובין ההגדרה החדשה:
א) בהגדרה של תהליך פואסון הקצב הוא קבוע, כאן הוא פונקציה של הזמן.
ב) בהגדרה של תהליך פואסון, האינקרימנטים הם סטציונרים, כאן לא.
ג) הניסוחים בעזרת o(h) בהגדרת תהליך פואסון, דנו בחוק ההסתברות של התהליך בזמן h. כאן לעומת זאת, ההגדרה דנה בחוק ההסתברות של הפרש זמנים t+h ו h.

<u>הגדרה:</u>
נגדיר את **פונקצית ערך התוחלת** של תהליך פואסון לא הומוגני, כך:

$$m(t) = \int_0^t \lambda(s)ds .$$

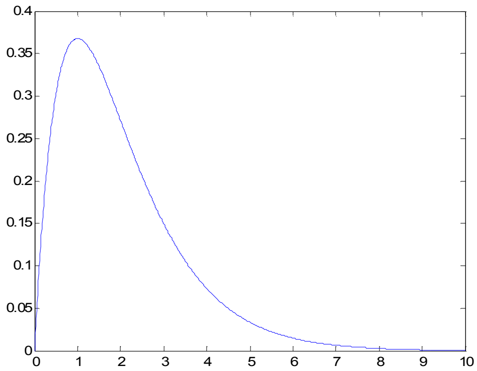
<u>משפט (ללא הוכחה):</u>

$$P(N_{t+s} - N_t = n) = e^{-(m(t+s)-m(t))}\frac{(m(t+s)-m(t))^n}{n!} .$$

ז"א $N_{t+s} - N_t \sim poisson(m(t+s)-m(t))$. וכמקרה פרטי, $N_t \sim poisson(m(t))$.

הערה: נשים לב שתהליך פואסון רגיל הוא מקרה פרטי של תהליך לא הומוגני בזמן ועבורו $m(t) = \lambda t$.

<u>דוגמא:</u>
להלן מודל לקצב רכישות מוצר מסוים לאור פרסום. נניח כי מוצר נרכש על פי תהליך פואסון לא הומוגני בזמן בעל פונקצית קצב המורכב מהפרמטרים הבאים:
λ_b - **קצב רכישה בסיסי**.
$\{(t_i, p_i, d_i), i \ge 1\}$ - **סדרת מאמצי פרסום**. כאשר המאמץ הפרסומי ה i מתחיל בזמן t_i, הינו בעל השפעה מקסימאלית p_i ובעל דעיכה ועלייה המאופיינת ע"י d_i.
מאמץ פרסום מעלה את קצב הרכישה, למעל הבסיסי החל מזמן התחלתו, ותוספתו המכסימלית הינה p_i, כאשר לאחר מכן התוספת דועכת. נוח למדל תוספת שכזו על ידי פו' מהסוג $f(x) = xe^{-(1/d)x}$. זהו הרי הגרעין של צפיפות גאמא עם פרמטר צורה 2 (ארלנג 2). להלן איור של צפיפות זו כאשר d=1:



את הפונקציה צריך לנרמל בהינתן פרמטר p (הערך המקסימאלי).
נגזור ונשווה לאפס לצורך מציאת נקודת המקסימום:

$$\frac{d}{dx}xe^{(-1/d)x}=e^{(-1/d)x}+(-1/d)xe^{(-1/d)x}=0$$

$$1+(-1/d)x=0$$

$$x=d$$

כעת נמצא את גורם הנרמול A כך שבנקודה d ערך הפונקציה יהיה p:

$$p=Ade^{(-1/d)d}=Ade^{-1}$$

$$A=\frac{ep}{d}$$

מכאן, תוספת מאמץ פרסום לקצב נראית כך:

$$f(x)=\frac{ep}{d}xe^{(-1/d)x}$$

ואם כך, לאור העובדה שהתוספת ה i מתחילה בזמן t_i אזי התוספת היא:

$$f_i(t)=\frac{ep}{d}(t-t_i)e^{(-1/d)(t-t_i)}I_{(t)}(t_i,\infty)$$

ואם כך פונקציות קצב הרכישה היא:

$$\lambda(t)=\lambda_b+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{ep}{d}(t-t_i)e^{(-1/d)(t-t_i)}I_{[t_i,\infty)}(t).$$

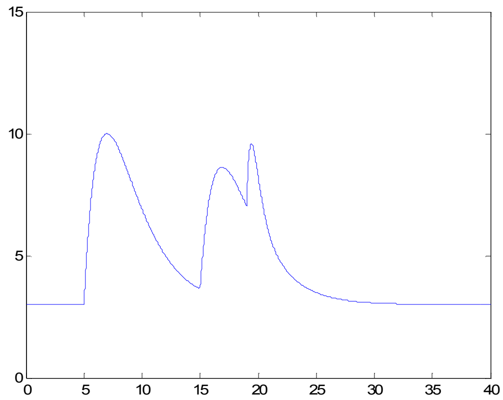
כך לדוגמא נראית הפונקציה עבור:

$$\lambda_b=3$$

$$(t_1,p_1,d_1)=(5,7,2)$$

$$(t_2,p_2,d_2)=(15,8,3)$$

$$(t_3,p_3,d_3)=(19,3,1/2)$$



אפשר להמשיך ולחשב את פונקצית ערך התוחלת ומכאן לקבל את התפלגויות מספר הרכישות בנקודות זמן שונות.

תיאור חלק ד:

בחלק זה מוצגים תהליכי קפיצה מרקובים שהם שרשראות מרקוב בזמן רציף. מוצגות משוואות קולמוגורוב האחוריות והקדמיות ולבסוף מוצג אופן חישוב ההסתברויות הגבוליות.

פרק ד-1: תהליך קפיצה מרקובים – הגדרה ותכונות בסיסיות.

תהליך קפיצה מרקובי הוא תהליך מרקובי בעל מרחב מצבים בן מנייה ומרחב פרמטר רציף אשר מקיים את התכונה המרקובית והומוגניות בזמן. כבר פגשנו תהליכים כאלו בחלק הקודם של הקורס (תהליכי פואסון). נראה בהמשך הפרק כי תהליך פואסון הוא מקרה פרטי של תהליך קפיצה מרקובי.

הגדרה באמצעות מרקוביות והומוגניות בזמן

זאת הדרך הראשונה להגדיר תהליך קפיצה מרקובי:

<u>הגדרה:</u>
יהי $\{X_t, t \geq 0\}$ תהליך סטוכסטי בעל מרחב פרמטר רציף ($\mathbb{R}^+$) ומרחב מצבים בן מנייה (לרוב $\mathbb{N}$ או קבוצה חלקית של $\mathbb{N}$) S. אשר מקיים את התנאים הבאים לכל $t,s \geq 0$:

א) $P(X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_u : 0 \leq u < s) = P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = P_{ij}(s,t+s)$ - **מרקוביות.**

ב) $P(X_{s+t} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i) = P_{ij}(t)$ - **הומוגניות בזמן**. ז"א $P_{ij}(s,t+s) = P_{ij}(t)$.

אזי נאמר כי $\{X_t, t \geq 0\}$ הוא **תהליך קפיצה מרקובי** (או שרשרת מרקוב בזמן רציף).

הערה: הביטוי $P(X_{s+t} = j \mid X_s = i, X_u : 0 \leq u < s)$ הוא ההסתברות המותנית של המאורע $\{X_{s+t} = j\}$ בהינתן כל מאורע אשר מוגדר ע"י רצף המשתנים המקריים $\{X_u, 0 < u < s\}$ והמאורע $\{X_s = i\}$. ז"א מטרת ביטוי זה היא תיאור של הפילוג השולי של התהליך בזמן s+t בהינתן ערך התהליך בזמן s וידיעת כל ערכי התהליך שקדמו לזמן s.

<u>דוגמא:</u>
נניח כי מרחב המצבים הוא $\{0,1\}$. בשביל לייצר תהליך קפיצה מרקובי מעל מרחב מצבים זה עלינו להגדיר את הפונקציות:
$P_{00}(t)$, $P_{01}(t)$, $P_{10}(t)$, $P_{11}(t)$.
בנוסף עלינו להגדיר את פילוג הערך ההתחלתי: $P_{X_0}(k)$. (הערה: לא נייחס משמעות רבה לערך ההתחלתי של התהליכים שנחקור – רובם יהיו ארגודים).

צריך להתקיים:
$$P_{00}(t) + P_{01}(t) = 1$$
וגם
$$P_{10}(t) + P_{11}(t) = 1.$$
מסתבר (לא נראה כרגע) שהפונקציות היחידות אשר יקיימו תכונה זו הינם הפונקציות ($\lambda, \mu > 0$):
$$P_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$
$$P_{01}(t) = 1 - P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} - \frac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

ו-

$$P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} - \frac{\mu}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}$$

$$P_{11}(t)=1-P_{10}(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}+\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

בצורה מטריציונית ניתן לכתוב זאת כך:

$$P(t)=\begin{pmatrix}P_{00}(t) & P_{01}(t)\\ P_{10}(t) & P_{11}(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{\lambda+\mu}(\begin{pmatrix}\mu & \lambda\\ \mu & \lambda\end{pmatrix}+e^{-(\lambda+\mu)t}\begin{pmatrix}\lambda & -\lambda\\ -\mu & \mu\end{pmatrix})$$

הפרמטרים של תהליך קפיצה מרקובי

הגדרה של תהליך קפיצה מרקובי אמנם מספרת לנו מה נדרש מתהליך זה אבל אינה מאפשרת בקלות לאפיין תהליכי קפיצה מרקובים כי הרי עבור תהליך מסוים אנו נדרשים להגדיר את ערכי $P_{ij}(t)$ עבור כל צמד מצבים i,j ועבור כל $t\geq 0$.

כזכור, שרשראות מרקוב אופיינו ע"י מטריצת המעבר בצעד אחד, $P^{(1)}$ ובאמצעות נוסחת צ'פמן קולמוגורוב היה ניתן לחשב את הסתברות המעבר ב n צעדים: $P^{(n)}$ (זה בעצם היה העלה של המטריצה P בחזקת n). כעת נפגוש אפיון דומה עבור תהליכי קפיצה מרקובים. נראה כי ניתן לאפיין תהליך קפיצה מרקובי באמצעות מטריצה בודדת (נסמנה בהמשך Q) ונראה בקצרה כיצד ניתן לחשב את $P_{ij}(t)$ עבור כל $t\geq 0$ ע"י פעולות מסוימות על Q.

<u>הגדרה:</u>
מטריצת הגנראטור (לפעמים מכונה **מטריצת היוצר**) Q (Generator Matrix), עבור תהליך קפיצה מרקובי בעל מרחב מצבים S היא מטריצה בעלת מימד $|S|\times|S|$, סופית או אינסופית אשר כל איבריה q_{ij} הינם אי-שליליים ומתקיים לכל $i\in S$:

$$q_{ii}=-\sum_{k\in S\setminus\{i\}}q_{ik}\,.$$

ז"א האלכסון הוא מינוס סכום שאר האיברים בכל שורה ולכן סכום כל שורה הוא אפס.

המטריצה Q מתארת תהליכי קפיצה מרקובים וזאת כמו שהמטריצה P מתארת שרשראות מרקוב בזמן בדיד. כמובן שערכי האלכסון אינם מכילים מידע נוסף, למרות זאת הם הוגדרו כך במטריצה וזאת לצורך תכונות מתמטיות אשר נפגוש בהמשך.

בשרשראות מרקוב בזמן בדיד היה לנו ברור מהו הערך P_{ij} במטריצה. מהו אבל הערך q_{ij}? ערכים אלו הם קצבי המעבר ממצב i למצב j. הערה: בניגוד להסתברות, קצב מעבר אינו חייב להיות קטן שווה לאחד.

משמעות קצב המעבר היא זאת:
נסתכל על h קטן ועל $i\neq j$, נניח:

$$P_{ij}(h)=q_{ij}h+o(h)$$

הנחה זו אומרת שההסתברות לעבור ממצב i למצב j בפרק זמן קטן היא ליניארית באורך פרק הזמן בעלת שיפוע (קצב) q_{ij}. עבור h=0 ההסתברות היא 0, אבל עבור h קצת גדול מ – 0, ההסתברות היא פרופורציונאלית לאורך הקטע (עד כדי השגיאה $o(h)$).

ולכן

$$\frac{P_{ij}(h)}{h}=q_{ij}+\frac{o(h)}{h}$$

או

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h}=q_{ij}$$

בנוסף נשים לב שעבור $i\neq j$, $P_{ij}(0)=0$ (כי לא ניתן לעבור באפס זמן בין מצבים) ולכן:

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(0+h)-P_{ij}(0)}{h}=q_{ij}$$

זאת אומרת, הנגזרת של $P_{ij}(h)$ בזמן 0 היא הקצב q_{ij}.

עבור $i=j$ נקבל:

$$1-P_{ii}(h)=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}P_{ik}(h)$$

ולכן

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k\in S\setminus\{i\}}P_{ik}(h)}{h}=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}\lim_{h\to 0}\frac{P_{ik}(h)}{h}=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}q_{ik}=-q_{ii}$$

קבלנו:

$q_{ij}, i\neq j$ הוא קצב המעבר ממצב i למצב j.

$-q_{ii}$ הוא קצב היציאה ממצב i (לאיזשהו מצב).

זמן השהייה במצב הוא אקספוננציאלי

נניח כי תהליך קפיצה מרקובי נמצא במצב i. נסמן ב H את הזמן אשר התהליך יישאר במצב i. מה נצפה מחוק ההסתברות של H?

נסתכל על ההסתברות $P(H>s+t\,|\,H>s)$?

נניח שהתהליך התחיל לרוץ בזמן 0 במצב i. בנוסף נניח כי ידוע ש $\{H>s\}$. אם כך אז ידוע שבזמן s התהליך במצב i.

ולכן משמעות המאורע $\{H>s+t\}$ היא שהתהליך נשאר במצב i למשך עוד t יחידות זמן.

עם כך עקב תכונת המרקוביות וההומוגניות בזמן מתקיים:

$$P(H>s+t\,|\,H>s)=P(H>t).$$

ולכן H הוא חסר זיכרון ולכן אקספוננציאלי.

אם כך אנו רואים כי תהליך קפיצה מרקובי מטייל בין המצבים במרחב המצבים ונשאר זמן אקספוננציאלי בכל מצב.

הגדרה באמצעות משתנים מקריים אקספוננציאלים ושרשרת מרקוב משוכנת

בסעיף זה נסתכל על תהליכי קפיצה מרקובים בצורה קצת יותר קונסטרוקטיבית.
כיצד "פועל" תהליך קפיצה מרקובי?

בפרק הקודם ראינו כי הזמן שבו התהליך נמצא בכל מצב הוא זמן אקספוננציאלי. ניתן לראות שברגע שבו הזמן אשר הוגרל ע"י משתנה מקרי אקספוננציאלי נגמר, התהליך עובר למצב אחר על פי שרשרת מרקוב בזמן בדיד. כל נקודת זמן באותה שרשרת מציינת נקודת קפיצה של תהליך הקפיצה המרקובי, כך שהמעבר ה n בשרשרת המרקוב ממופה לקפיצה ה-n בתהליך הקפיצה המרקובי.

אם כך להלן הגדרה חלופית של תהליך קפיצה מרקובי:

<u>הגדרה:</u>
יהי $\{X_t, t \geq 0\}$ תהליך סטוכסטי בעל מרחב פרמטר רציף ($\mathbb{R}^+$) ומרחב מצבים בן מנייה (לרוב $\mathbb{N}$ או קבוצה חלקית של $\mathbb{N}$) S. אשר מתנהג על פי ההתנהגות הבאה:
א) קיים אוסף משתנים מקריים אקספוננציאלים עבור כל מצב. כך שלכל מצב המשתנים המקריים מתפלגים על פי פרמטר ייחודי. (נסמן את הפרמטר של המצב ה – i $-q_{ii}$. הוא יהיה מינוס הערך אשר באלכסון מטריצת הגנראטור Q). נסמן ערך זה גם ב λ_i.
ב) קיימת שרשרת מרקוב (בזמן בדיד) בעלת מטריצת מעבר P כך שבשרשרת לא ניתן לעבור בצעד אחד ממצב לעצמו (אלכסון המטריצה הוא אפסים). זאתי נקראת **השרשרת המשוכנת**.
ג) התהליך מתנהג באופן הבא: במידה ונכנס למצב i (בזמן t), מוגרל משתנה מקרי אקספוננציאלי H בעל פרמטר $-q_{ii}$ (או λ_i) והתהליך נשאר במצב i עד לזמן $t+H$ (לא כולל) ואז קופץ למצב אחר $j \neq i$ על פי מטריצת המעבר P.
תהליך כזה הוא ***תהליך קפיצה מרקובי***.

היופי בהגדרה לעיל הוא שהיא מתארת כיצד לסמלץ תהליך קפיצה מרקובי: להיכנס למצב i, להגריל מ"מ אקספוננציאלי בעל פרמטר $\lambda_i = -q_{ii}$

<u>טענה (ללא הוכחה):</u>
שתי ההגדרות זהות – ז"א תהליך אשר מוגדר על פי כל אחד מההגדרות מקיים גם את ההגדרה השנייה.

ניתן להרגיש את פעולת תהליך הקפיצה המרקובי באופן באחד משני ההסתכלויות החלופיות הבאות:

<u>פעולת תהליך קפיצה מרקובי – הסתכלות א':</u>
הגרלת משתנים מקריים אקספוננציאלים תחרות ביניהם. בחירה לאיזה מצב לעבור ואז מעבר.

<u>פעולת תהליך קפיצה מרקובי – הסתכלות ב':</u>
אוסף תהליכי פואסון, אחד עבור כל מצב. כל אחד עם פרמטר $\lambda_i = -q_{ii}$. כאשר נמצאים במצב i, מחקים להגעה הבא בתהליך הפואסון ה –i.
כאשר הגעה זו מגיעה אז מתקיים פיצול פואסון על פי המטריצה המשוכנת ועוברים מצב.

<u>תרגום בין שתי סוגי ההצגות</u>

תהליך קפיצה מרקובי אשר ניתן ע"י ההגדרה הראשונה שניתנה (מרקוביות והומוגניות בזמן) מתואר ע"י מטריצת הגנראטור Q וההתפלגות ההתחלתית P_{X_0}. מאידך, תהליך קפיצה מרקובי אשר ניתן ע"י ההגדרה השנייה (משתנים אקספוננציאלים ושרשרת משוכנת) מוגדר ע"י מינוס האלכסון של המטריצה Q (האיברים $-q_{ii}$), מטריצת מעבר של שרשרת מרקוב בדידה P והתפלגות התחלתית P_{X_0}. כיצד ניתן לתרגם בין כל אחת מהתצוגות הנ"ל?

<u>מעבר מייצוג מטריצת גנראטור לייצוג שרשרת משוכנת ומשכי זמן אקספוננציאלים:</u>
א) האיברים באלכסון מטריצת הגנראטור הינם מינוס הסכום של האיברים בכל השורה. מינוס האיברים הללו הינם קצבי המעבר האקספוננציאלים עבור כל מצב ($\lambda_i = -q_{ii}$).
ב) הסיכוי לעבור ממצב i למצב j ($j \neq i$) הוא הסיכוי שמבין כל המשתנים המקריים האקספוננציאלים, המשתנה j יהיה מינימאלי. הסיכוי לכך הוא $P_{ij} = \dfrac{q_{ij}}{\sum_{k \in S \setminus \{i\}} q_{ik}} = \dfrac{q_{ij}}{-q_{ii}}$ (על פי תחרות בין משתנים מקריים

אקספוננציאלים ופעולת תהליך קפיצה מרקובי – הסתכלות א' אשר הוסברה קודם. כך ניתנים ערכי המטריצה $j \neq i$ P_{ij}.

ג) ערכי המטריצה P באלכסון הם 0.

מעבר מייצוג שרשרת משוכנת ומשכי זמן אקספוננציאלים לייצוג מטריצת גנראטור:

א) ערכי מטריצת הגנראטור באלכסון הינם מינוס ערכי משכי הזמן אקספוננציאלים בהם נשארים בכל מצב ($\lambda_i = -q_{ii}$).

ב) ערך מטריצת הגנראטור לא באלכסון: q_{ij} , $j \neq i$. הוא $\lambda_i P_{ij}$.

אם כך, זאת הדרך המאפשרת לעבור בקלות בין שני סוגי התצוגות. לרוב יותר נוח דווקא לתאר מודלים על פי ייצוג מטריצת הגנראטור כי הוא מתאר קצבי מעבר.

סווג מצבים וכו'

ניתן ליישם את התיאוריה של סווג מצבים (מתמיד חיובי/מתמיד אפס/חולף) וחלוקה למחלקות קשירות כפי שנלמדה עבור שרשראות מרקוב בזמן בדיד עבור תהליכי קפיצה מרקובים. דרוש להסתכל על השרשרת המשוכנת ולסווג את המצבים על פי שרשרת זו.

נציין שאין בעיית מחזוריות בתהליכי קפיצה מרקובים. אמנם ייתכן שהשרשרת המשוכנת היא מחזורית, אבל תהליך הקפיצה המרקובי לא יהיה מחזורי בגלל האקראיות של זמן ההשארות במצב.

רוב הדוגמאות (אבל לא כולם) אשר יענינו אותנו יהיו תהליכי קפיצה מרקובים אי-פריקים.

הגדרה:
תהליך קפיצה מרקובי הוא **אי-פריק** אם שרשרת המרקוב המשוכנת שלו הינה אי-פריקה. או עבור כל שני מצבים $i, j \in S$ קיימת סדרה: $i_0 = i, i_1, i_2, ..., i_n = j$ כך ש $q_{i_{k-1}, i_k} > 0$ עבור $k = 1, ..., n$.

למרות זאת, לפעמים נתעניין גם בתהליכים פריקים (לא אי-פריקים) ועבור אלו נוכל להתייחס למצבים חולפים, מתמידים אפס ומתמידים חיובית כפי שעשינו עבור שרשראות מרקוב. את זה נעשה באמצעות השרשרת המשוכנת. בנוסף נוכל להתייחס למחלקות קשירות באותו אופן שהכרנו עבור שרשראות מרקוב.

מושג נוסף, אשר פגשנו בעבר הוא **זמן-הפגיעה** במצב i: $T_i = \inf\{t \in \mathbb{R}^+ \mid X_t = i\}$. בדוגמאות מסוימות ננסה נתייחס למשתנה מקרי זה, תוחלתו וכו'.

פרק ד-2: תהליכי קפיצה מרקובים – דוגמאות.

להלן מספר דוגמאות.

דוגמא: ד-1 : חנות לצחצוח נעליים

בחנות לצחצוח נעליים ישנם 2 כסאות: כסא מס' 1 וכסא מס' 2. לקוח אשר מגיע מתיישב על כסא מס' 1 ובו נעליו מוברשות. לאחר מכן, הוא עובר לכסא מס' 2 ובו הצחצוח מושלם ע"י ניגוב מהיר. זמני ביצוע כל אחת מהפעולות הינן אקספוננציאלים בלתי תלויים עם פרמטרים μ_1 ו μ_2 בהתאמה. לקוחות מגיעים לחנות על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. עם הגעת לקוח, הוא יכנס לחנות רק עם שני הכיסאות ריקים.

את המודל הנ"ל ניתן לתאר ע"י תהליך קפיצה מרקובי באופן הבא:

נגדיר את מרחב המצבים להיות:

מצב 0 – המערכת ריקה.

מצב 1 – ישנו לקוח בכסא מס' 1.

מצב 2 – ישנו לקוח בכסא מס' 2.

קצבי המעבר במטריצת הגנראטור יהיו:

$$Q=\begin{pmatrix} & \lambda & 0 \\ 0 & & \mu_1 \\ \mu_2 & 0 & \end{pmatrix}$$

(אלכסון הגנראטור הוא כמובן: $\begin{pmatrix} -\lambda & & \\ & -\mu_1 & \\ & & -\mu_2 \end{pmatrix}$).

התצוגה בצורה משוכנת היא:

$$\lambda_0=\lambda \qquad \lambda_1=\mu_1 \qquad \lambda_2=\mu_2$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא: ד-2 : תהליך פואסון.

תהליך פואסון הוא מקרה פרטי של תהליך קפיצה מרקובי.

מרחב המצבים הוא $S=\{0,1,2,...\}$ ומטריצת הגנראטור היא:

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

התצוגה בצורה משוכנת היא:

$$\lambda_i = \lambda$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא: ד-3: במפעל ישנן שתי מכונות העובדות למשך זמן $\exp(\lambda = 5)$ עד קלקול ואז הן ממתינות למשך זמן $\exp(\mu = 3)$ עד סיום התיקון.

מרחב המצבים הוא $S = \{0,1,2\}$ ומטריצת הגנראטור היא:

$$Q = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 \\ 3 & -8 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

התצוגה בצורה משוכנת היא:

$$\lambda_0 = 10$$
$$\lambda_1 = 8$$
$$\lambda_2 = 3$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

דוגמא: ד-4 : תהליכי לידה ומוות
החלק הבא של הקורס (חלק ה') מוקדש לחקר מודלים העושים שימוש בדוגמא זו.
בעצם כל תהליך ובו ניתן לנוע ממצב i לכל היותר למצבים i+1, i-1 (וממצב 0 אך ורק למצב 1) הוא תהליך לידה ומוות.
בחלק ה' ישנם מספר סוגי תהליכי לידה מוות – ראה חלק ה'.

דוגמא: ד-5 : מודל אקטוארי בריא-חולה-מת
מודל זה מוצג בחוברת של סיכוני חיים ב' (לימודי אקטואריה).

מבוטח של ביטוח לאומי נמצא באחד משלוש מצבים:
1 – בריא.
2 – חולה.
3 – מת.

קצבי/עוצמות המעבר הינם כדלקמן:

μ^{12} - עוצמת המעבר ממצב בריא למצב מחלה (עוצמת המחלה).
μ^{13} - עוצמת המעבר ממצב בריא למצב מוות (עוצמת המוות הפתאומי).
μ^{23} - עוצמת המעבר ממצב חולה למצב מוות (עוצמת המוות ממחלה).
μ^{21} - עוצמת המעבר ממצב חולה למצב בריא (עוצמת ההחלמה).

כמובן שעוצמות המעבר ממצב 3 למצבים האחרים היא 0 (לא ניתן לחזור מהמוות).

<u>דוגמא: ד-6 : שרשרת מתפוצצת</u>

נניח שרשרת על מרחב המצבים $S=\{1,2,3,...\}$ ונניח כי

$q_{i,i+1}=2^i$. ונניח ששאר העוצמות הן 0. ז"א:

$$Q=\begin{pmatrix} & 2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & & 4 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & & 8 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 16 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

שרשרת זו תישאר במצב i למשך זמן $\exp(2^i)$. ז"א תוחלת זמן ההישארות של השרשרת במצב i הוא $\frac{1}{2^i}$.

כזכור (T_n) הוא זמן הפגיעה במצב n.

נראה כי $\lim_{n\to\infty}E[T_n\mid X_0=1]<\infty$. ז"א בזמן סופי השרשרת מבקרת בכל המצבים!

נשים לב ש:

$$\sum_{i=1}^{\infty}E[T_{i+1}-T_i\mid X_0=1]=\sum_{i=1}^{\infty}2^{-i}=\frac{1/2}{1-1/2}=1$$

ולכן:

$$\sum_{i=1}^{n}E[T_{i+1}-T_i\mid X_0=1]=\sum_{i=1}^{n}(E[T_{i+1}\mid X_0=1]-E[T_i\mid X_0=1])=E[T_{n+1}\mid X_0=1]-E[T_1\mid X_0=1]=$$
$$E[T_{n+1}\mid X_0=1]-0$$

אם כך $1=\sum_{i=1}^{\infty}E[T_{i+1}-T_i\mid X_0=1]=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}E[T_{i+1}-T_i\mid X_0=1]=\lim_{n\to\infty}E[T_{n+1}\mid X_0=1]$

וכך הראנו כי $\lim_{n\to\infty}E[T_n\mid X_0=1]<\infty$ ולכן השרשרת מתפוצצת.

הערה: ברוב המודלים היישומיים לא הגיוני שהתהליך יבצע כמות אינסופית של קפיצות בזמן סופי (כמו דוגמא זו)

<u>דוגמא: ד-7 :</u> במפעל ישנם שלוש מכונות ושני טכנאים. המכונות עובדות למשך זמן $\exp(\lambda=1)$ עד קלקול ואז הן ממתינות למשך זמן $\exp(\mu=3)$ עד סיום התיקון.

מרחב המצבים הוא $S=\{0,1,2,3\}$ ומטריצת הגנראטור היא:

$$Q=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -5 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & -6 \end{pmatrix}$$

התצוגה בצורה משוכנת היא:

$$\lambda_0 = 3$$
$$\lambda_1 = 5$$
$$\lambda_2 = 7$$
$$\lambda_3 = 6$$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & \frac{6}{7} & 0 & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

פרק ד-3: משוואות קולמוגורוב.

נניח כי נתון תהליך קפיצה מרקובי בעל מטריצת גנראטור Q. בפרק זה נראה כיצד ניתן לחשב את $P(t)$ על פי Q.

ראשית ניזכר במשוואות צ'פמן קולמוגורוב ולאחר מכן נפתח קבוצות משוואות הנקראות המשוואות האחוריות של קולמוגורוב וקבוצות משוואות אחרות הנקראות המשוואות הקדמיות של קולמוגורוב ונראה כיצד ניתן להשתמש במשוואות אלו לפתרון $P(t)$.

למעשה בהרבה מקרים לא יהיה ניתן להשתמש במשוואות לצורך חישוב P(t) באופן סגור, למרות זאת נסתכל על מספר דוגמאות ובהן ניתן לבצע זאת.

משוואות צפמ'ן קולמוגורוב

משוואות צפמ'ן קולמוגורוב אשר הכרנו בזמן הבדיד רלוונטיות גם בזמן הרציף.

<u>משפט:</u>

$$\sum_{k\in S} P_{ik}(s)P_{kj}(t) = P_{ij}(t+s)$$

הוכחה:

$$P_{ij}(s+t) = P(X_{s+t}=j \mid X_0=i) = \sum_{k\in S} P(X_{s+t}=j, X_s=k \mid X_0=i) =$$
$$\sum_{k\in S} \frac{P(X_{s+t}=j, X_s=k, X_0=i)}{P(X_0=i)} \frac{P(X_s=k, X_0=i)}{P(X_s=k, X_0=i)} = \sum_{k\in S} P(X_{s+t}=j \mid X_s=k, X_0=i) P(X_s=k \mid X_0=i)$$
$$\sum_{k\in S} P(X_{s+t}=j \mid X_s=k) P(X_s=k \mid X_0=i) = \sum_{k\in S} P(X_t=j \mid X_0=k) P(X_s=k \mid X_0=i) =$$
$$\sum_{k\in S} P_{ik}(s)P_{kj}(t)$$

השתמשנו בדרך בהגדרת הסתברות מותנה, בתכונה המרקובית ובהומוגניות בזמן.
מ.ש.ל.

משוואות קולמוגורוב האחורית

נתחיל במשוואות צ'פמן קולמוגורוב:

$$P_{ij}(t+h) = \sum_{k\in S} P_{ik}(h)P_{kj}(t)$$

מכאן:

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(h)P_{kj}(t) - P_{ij}(t)$$

מכאן:

$$P_{ij}(t+h) - P_{ij}(t) = \sum_{k\in S\setminus\{i\}} P_{ik}(h)P_{kj}(t) + P_{ii}(h)P_{ij}(t) - P_{ij}(t)$$

מכאן:

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}P_{ik}(h)P_{kj}(t)+(P_{ii}(h)-1)P_{ij}(t)$$

נחלק את שני צדדי המשוואה ב h ונשאיף את h לאפס:

$$\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k\in S\setminus\{i\}}P_{ik}(h)P_{kj}(t)+(P_{ii}(h)-1)P_{ij}(t)}{h}$$

צד שמאל הוא הנגזרת: $P_{ij}'(t)$

עבור צד ימין נזכר כי $q_{ij}=\lim_{h\to 0}\frac{P_{ij}(h)}{h}$ עבור $i\neq j$

ולכן הסכום בצד ימין הוא:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sum_{k\in S\setminus\{i\}}P_{ik}(h)P_{kj}(t)}{h}=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}q_{ik}P_{kj}(t)$$

בנוסף ראינו:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-P_{ii}(h)}{h}=-q_{ii}$$

ולכן:

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S\setminus\{i\}}q_{ik}P_{kj}(t)--q_{ii}P_{ij}(t)$$

או:

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}q_{ik}P_{kj}(t)$$

או בצורת מטריצות:

$$P'(t)=QP(t).$$

זוהי משוואת קולמוגורוב האחורית.

<u>הגדרה:</u>

משוואות קולמוגורוב האחוריות הן:

$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}q_{ik}P_{kj}(t)$ לכל $i,j\in S$

או

$P'(t)=QP(t)$ בצורה מטריציונית.

<u>משוואות קולמוגורוב הקדמיות</u>

נתחיל במשוואות צ'פמן קולמוגורוב:

$$P_{ij}(t+h)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)P_{kj}(h)$$

הערה: במשוואות האחוריות התחלנו עם משוואות צ'פמן קולמוגורוב כאשר הסתכלנו על מעבר עד זמן h ואז t. כעת הסדר הפוך, t ואז h.

מכאן:

$$P_{ij}(t+h)-P_{ij}(t)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)P_{kj}(h)-P_{ij}(t)=\sum_{k\in S\setminus\{j\}}P_{ik}(t)P_{kj}(h)+P_{ij}(t)P_{jj}(h)-P_{ij}(t)=$$
$$\sum_{k\in S\setminus\{j\}}P_{ik}(t)P_{kj}(h)+P_{ij}(t)(P_{jj}(h)-1)$$

ולכן ע"י חלוקה ב h ולקיחת גבול $h\to 0$ מקבלים:

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S\setminus\{j\}}P_{ik}(t)q_{kj}+P_{ij}(t)q_{jj}$$

ולכן:

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)q_{kj}$$

או בצורת מטריצות:

$$P'(t)=P(t)Q\,.$$

זוהי משוואת קולמוגורוב הקדמית.

<u>הגדרה:</u>
משוואות קולמוגורוב הקדמיות הן:
$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)q_{kj}$ לכל $i,j\in S$

או

$P'(t)=P(t)Q$ בצורה מטריציונית.

דוגמאות

<u>שרשרת דו-מצבית:</u>
נניח כי מכונה עובדת למשך $\exp(\lambda)$ עד קלקול ואז היא ממתינה למשך $\exp(\mu)$ עד סיום התיקון.
נניח כי ישנו סיכוי של 20% שהמכונה התחילה את היום במצב תקין (80% שהתחילה מקולקלת), מה הסיכוי שלאחר 5.5 שעות המכונה במצב תקין?

נמדל כתהליך קפיצה מרקובי בעל שתי מצבים 0-תקין, 1- תקול ומטריצת גנראטור:

$$Q=\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda\\ \mu & -\mu\end{pmatrix}.$$

אנו מתעניינים בחישוב $P(X_{5.5}=0)$. מתקיים: $P_{X_0}P(5.5)=P_{X_{5.5}}$. ז"א וקטור השורה ההתחלתי $P_{X_0}=(.2\quad .8)$ מוכפל במטריצת המעבר של 5.5 יחידות זמן הוא פילוג המצב ב 5.5 יחידות זמן.

לשם כך נחשב את $P(t)$ באופן כללי- מטריצת המעבר ב – t יחידות זמן.
נשתמש במשוואות האחוריות, $P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}q_{ik}P_{kj}(t)$:

שתיים מהמשוואות הן:

$$(*)\quad P_{00}'(t)=-\lambda P_{00}(t)+\lambda P_{10}(t)$$
$$P_{10}'(t)=\mu P_{00}(t)-\mu P_{10}(t)$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב μ ואת השנייה ב λ ונסכם את המשוואות לקבל:

$$\mu P_{00}'(t)+\lambda P_{10}'(t)=0$$

או

$$\mu P_{00}'(s)+\lambda P_{10}'(s)=0$$

ניקח אינטגרל מ-0 עד t:

$$\mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = c$$

נבחין כי $P_{00}(0) = 1$ ו - $P_{10}(0) = 0$ ולכן $c = \mu$:

$$(**)\quad \mu P_{00}(t) + \lambda P_{10}(t) = \mu$$

נציב משוואה זו במשוואה הדיפרנציאלית הראשונה (מסומנת ב - *):

$$P_{00}'(t) = -\lambda P_{00}(t) + \mu(1 - P_{00}(t))$$

או

$$(***)\quad P_{00}'(t) = \mu - (\mu + \lambda) P_{00}(t)$$

יש לנו אם כך משוואה דיפרנציאלית עבור $P_{00}(t)$. (תנאי ההתחלה הם $P_{00}(0) = 1$).

נפתור:

נסמן:

$$h(t) = P_{00}(t) - \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

אזי $h'(t) = P_{00}'(t)$

וכשנציב ב *** נקבל:

$$h'(t) = -(\lambda + \mu) h(t)$$

זו כבר משוואה אשר קל לפתור:

$$\frac{h'(t)}{h(t)} = -(\lambda + \mu)$$

שזה:

$$\log'(h(t)) = -(\lambda + \mu)$$

או

$$\log'(h(s)) = -(\lambda + \mu)$$

נבצע אינטגרציה על הקטע [0,t] ונקבל:

$$\log(h(t)) = -(\lambda + \mu)t + c$$

או

$$h(t) = Ke^{-(\lambda+\mu)t}$$

ולכן

$$P_{00}(t) = Ke^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

מהו K?

ידוע כי $P_{00}(0) = 1$

ולכן:

$$K = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

ולכן סוף כל סוף:

$$P_{00}(t) = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\mu}{\lambda + \mu}$$

ולכן על פי ** נקבל:

$$P_{10}(t)=P_{10}(t)=\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\mu}{\lambda}P_{00}(t)=\frac{\mu}{\lambda}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}-\frac{\mu^2}{\lambda(\lambda+\mu)}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}-\frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}$$

ניתן לקבל עכשיו גם בקלות את $P_{01}(t)=1-P_{00}(t)$ ואת $P_{11}(t)=1-P_{10}(t)$ (המשלימים).

מכאן התוצאה הרצויה הסופית ($P(X_{5.5}=0)$) מיידית.

<u>תהליך פואסון:</u>

אנו יודעים כי עבור תהליך פואסון

$P_{ij}(t)=e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!}$ עבור $i\le j$

ו –

$P_{ij}(t)=0$ עבור $j<i$.

נראה שהסתברות המעבר הנ"ל מקיימת את המשוואות הקדמיות.

$$P_{ij}'(t)=\sum_{k\in S}P_{ik}(t)q_{kj}$$

עבור תהליך פואסון

$$P_{ij}'(t)=P_{i,j-1}(t)q_{j-1,j}-P_{i,j}(t)q_{jj}$$

או

$$P_{ij}'(t)=\lambda(P_{i,j-1}(t)-P_{i,j}(t))$$

נציב את ה - $P_{ij}(t)$ הידוע ונראה שהמשוואה מתקיימת:

עבור $i\le j$:

$$\frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!}(e^{-\lambda t}t^{j-i})'=\lambda(e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-1-i}}{(j-1-i)!}-e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^{j-i}}{(j-i)!})$$

$$(e^{-\lambda t}t^{j-i})'=e^{-\lambda t}(j-i)t^{j-1-i}-e^{-\lambda t}\lambda t^{j-i}$$

$$-\lambda e^{-\lambda t}t^{j-i}+e^{-\lambda t}(j-i)t^{j-i-1}=e^{-\lambda t}(j-i)t^{j-1-i}-e^{-\lambda t}\lambda t^{j-i}$$

וקבלנו שוויון.

עבור $j<i$ נקבל שוויון מיידית.

ובכך הראנו שפילוג פואסון (הפילוג השולי של תהליך פואסון) מקיים את משוואות קולמוגורוב הקדמיות.

באופן דומה ניתן להראות כי מתקיימות גם המשוואות האחוריות.

<u>תהליך לידה בעל קצב לידה ליניארי – תהליך Yule:</u>

את תהליך Yule נפגוש (או פגשנו) בפרק ה-1. כאן $q_{i,i+1}=\lambda i$

נראה כי התפלגות המעבר של תהליך זה ממצב 1 (פריט אחד מאוכלוסיה) למצב j (j פריטים באוכלוסיה) בזמן t היא:

$P_{1,j}(t)=e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}$ עבור $1\le j$. (*)

ז"א כאשר מתחילים עם פריט אחד באוכלוסיה בזמן 0, אז בזמן t מספר הלידות ב t יחידות הזמן הראשונות הוא מ"מ גיאומטרי עם פרמטר $e^{-\lambda t}$.

נשתמש במשוואה הקדמית:

$$P_{1j}'(t)=\sum_{k\in S}P_{1k}(t)q_{kj}=P_{1,j-1}(t)q_{j-1,j}+P_{1j}(t)q_{jj}$$

שאר המחוברים הינם אפס.
ז"א קיבלנו:

$$P_{1j}'(t)=P_{1,j-1}(t)(\lambda(j-1))+P_{1j}(t)(-\lambda j)$$

נציב את הפתרון המוצא (*) בצד ימין:

$$e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-2}\lambda(j-1)-e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}\lambda j$$

שזה:

$$(\&\&\&)\ \lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-2}((j-1)-(1-e^{-\lambda t})j)$$

נציב את * בצד שמאל (נגזור):

$$-\lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-1}+(j-1)e^{-\lambda t}(-\lambda)(1-e^{-\lambda t})^{j-2}$$

שזה:

$$(\&\&\&\&)\ \lambda e^{-\lambda t}(1-e^{-\lambda t})^{j-2}(-1+(j-1)(1-e^{-\lambda t}))$$

מתקיים &&& = &&&& ולכן זהו הפתרון.

בשביל לחשב את $P_{ij}(t)$ נשתמש בעובדה שמצב השרשרת אשר התחילה עם i פריטים הוא כמו הסכום של i שרשראות אשר התחילו עם פריט אחד!!!

אנו יודעים שסכום של i גיאומטריים הוא בינומי שלילי עם הפרמטר הנ"ל. (ז"א הקונבולוציה של $P_{1j}(t)$ עם עצמו הוא $P_{ij}(t)$). ולכן:

$$P_{ij}(t)=\binom{j-1}{i-1}(e^{-\lambda t})^{i}(1-e^{-\lambda t})^{j-i}$$

פרק ד-4: תהליכי קפיצה מרקובים – הסתברויות גבוליות.

משמעות ההתפלגות הסטציונרית

נתחיל בהגדרה של ההתפלגות הסטציונרית. מההכרות שלנו עם התפלגות כזאת משרשראות מרקוב בזמן בדיד, נצפה כי היא תישמר בכל נקודת זמן. דרישה זאת מסוכמת בהגדרה הבאה:

הגדרה:
התפלגות סטציונרית של תהליך קפיצה מרקובי היא ההתפלגות π (וקטור שורה) המקיימת.

$$\pi P(t) = \pi$$

$$\pi e = 1$$

לכל $t \in \mathbb{R}^+$

משפט (ללא הוכחה כאן):
יהי $\{X_t, t \geq 0\}$ תהליך קפיצה מרקובי אי-פריק ובעל התפלגות סטציונרית π. אז: $\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \pi_j$.

משפט (ללא הוכחה כאן):
יהי $\{X_t, t \geq 0\}$ תהליך קפיצה מרקובי אי-פריק ובעל התפלגות סטציונרית π. ותהי r פונקצית רווח, אז:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t r(X_s)ds = \sum_{k\in S} \pi_k r(k).$$

משוואות שווי משקל באמצעות מטריצת הגנראטור

אז ראינו את החוזק של ההתפלגות הסטציונרית אבל כיצד ניתן לפתור את מערכת המשוואות

$$\pi P(t) = \pi$$

$$\pi e = 1$$

עבור כל t? לרוב זה די קשה לבצע באופן ישיר (כמעט בלתי אפשרי). כעת נכניס את מטריצת הגנראטור למשחק ונראה כיצד ניתן לפתור עבור ההתפלגות הסטציונרית בקלות:

הגדרה:
משוואות שווי משקל עבור תהליך קפיצה מרקובי עם מטריצת גנראטור Q הן:

$$\begin{matrix} \pi Q = 0 \\ \pi e = 1 \end{matrix}.$$

נשים לב, המשוואה עבור השורה ה – j היא:

$$\sum_{k\in S} \pi_k q_{kj} = 0$$ או,

$$\sum_{k\in S\setminus\{j\}} \pi_k q_{kj} = \pi_j \lambda_j.$$

כך עבור כל מצב j, המשוואה ה-j מראה כי מספר הכניסות לתוך המצב (צד שמאל) שווה למספר היציאות מהמצב (צד ימין) – זהו שווי משקל.

כעת נראה כי לצורך מציאת התפלגות סטציונרית, ניתן להשתמש במשוואות שווי המשקל.

<u>משפט:</u>

π היא התפלגות סטציונרית אמ"מ היא מקיימת את משוואת שווי המשקל.

<u>הוכחה:</u>

<u>כוון ראשון:</u>

נניח כי π התפלגות סטציונרית ונראה כי היא מקיימת את משוואת שווי המשקל.

ידוע כי המשוואות הקדמיות מקיימות:

$$P'(t) = P(t)Q \, .$$

או $P_{ij}'(t) = \sum_{k\in S} P_{ik}(t) q_{kj}$.

נכפיל ב π_i ונסכם על כל i:

$$\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}'(t) = \sum_{i\in S} \pi_i \sum_{k\in S} P_{ik}(t) q_{kj}$$

צד שמאל הוא:

$$\sum_{i\in S} \pi_i \frac{d}{dt} P_{ij}(t)$$

שזה:

$\frac{d}{dt}\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}(t)$ (בהנחה שניתן להחליף נגזרת וסכום ללא בעיות)

עכשיו על פי הגדרת ההתפלגות הסטציונרית מתקיים כי $\pi = \pi P(t)$ לכל t . ז"א $\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}(t) = \pi_j$ לכל t.

ולכן צד ימין הוא $\frac{d}{dt}\pi_j$ שזה 0.

אם כך המשוואה היא:

$$0 = \sum_{i\in S} \pi_i \sum_{k\in S} P_{ik}(t) q_{kj}$$

בצד שמאל נחליף את סדר הסכימה ונקבל:

$$0 = \sum_{k\in S} q_{kj} \sum_{i\in S} \pi_i P_{ik}(t)$$

ושוב $\sum_{i\in S} \pi_i P_{ik}(t) = \pi_k$ (כי π התפלגות סטציונרית) ולכן

$0 = \sum_{k\in S} q_{kj}\pi_k$ שזו בדיוק המשוואה ה – j במשוואות שווי המשקל.

אם הראנו כי אם π התפלגות סטציונרית אז היא מקיימת את משוואות שווי המשקל.

<u>כוון שני:</u>

נניח כי π מקיימת את משוואות שווי המשקל, נראה כי היא התפלגות סטציונרית.

נסכל על $\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}'(t)$, ע"י הוצאת הנגזרת מהסכום מקבלים:

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}(t)\right) = \sum_{i\in S} \pi_i P_{ij}'(t)$$

נזכר במשוואות האחריות:

או $P'(t) = QP(t)$

ונציב $P_{ij}'(t) = \sum_{k\in S} q_{ik} P_{kj}(t)$ במשוואה לעיל:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}(t)) = \sum_{i\in S}\pi_i \sum_{k\in S} q_{ik} P_{kj}(t)$$

או:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}(t)) = \sum_{k\in S} P_{kj}(t) \sum_{i\in S}\pi_i q_{ik}$$

אבל π מקיים את משוואות שווי המשקל ולכן $\sum_{i\in S}\pi_i q_{ik} = 0$ ולכן:

$$\frac{d}{dt}(\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}(t)) = 0$$

אם כך $\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}(t)$ קבוע לכל t וחייב להיות שווה לערכו גם בזמן $t=0$.

מתקיים כמובן $P_{ij}(0)=1$ אמ"מ $i=j$ אחרת $P_{ij}(0)=0$.

ולכן $\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}(0) = \pi_j$

ולכן $\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}(t) = \pi_j$ לכל t.

ז"א $\pi P(t) = \pi$ לכל t ולכן π התפלגות סטציונריות.

מ.ש.ל.

<u>דוגמא:</u>

ניקח את השרשרת הדו-מצבית. משוואות שווי המשקל הן:

$$\begin{pmatrix}\pi_0 & \pi_1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\end{pmatrix}$$

המשוואה הראשונה היא:

$-\lambda\pi_0 + \mu\pi_1 = 0$.

משוואה הסכום לאחד היא:

$\pi_0 + \pi_1 = 1$

נציב במשוואה הראשונה לקבל:

$-\lambda(1-\pi_1) + \mu\pi_1 = 0$ או,

$\pi_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ ולכן $\pi_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$.

<u>דוגמא:</u>

נניח S={1,2,3}.

$$Q = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

אז:

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3 & 0\\ 0 & -1/4 & 1/4\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

וגם $\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$.

הפתרון הוא:

$$\pi=\begin{pmatrix}3/8 & 4/8 & 1/8\end{pmatrix}$$

כפי שניתן לבדוק בקלות.

משוואות תנאי שווי משקל מפורט

כפי שראינו עבור המקרה הבדיד, פעמים רבות נוח יותר להשתמש במשוואות תנאי שווי משקל מפורט (בפעמים בהם מבנה השרשרת אינו משתמש ברוב המעברים הקיימים – לדוגמא, תהליכי לידה ומוות).

הגדרה:

עבור תהליך קפיצה מרקובי עם מטריצת גנראטור Q, המשוואות.

$\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}$ לכל $i,j\in S$ הינם **משוואות תנאי שווי משקל מפורט**.

הערה: המשמעות היא שמספר המעברים ממצב i למצב j וממצב j למצב i שווים.

משפט:

אם מתקיימים משוואות תנאי שווי משקל מפורט אזי מתקיימות גם משוואות שווי המשקל הרגילות.

הוכחה:

נניח כי מתקיים: $\pi_i q_{ij}=\pi_j q_{ji}$,

נסכום על כל $i\in S\setminus\{j\}$:

$$\sum_{i\in S\setminus\{j\}}\pi_i q_{ij}=\sum_{i\in S\setminus\{j\}}\pi_j q_{ji}$$

צד ימין הוא $\pi_j\sum_{i\in S\setminus\{j\}}q_{ji}=\pi_j(-q_{jj})$ ולכן:

$$\sum_{i\in S\setminus\{j\}}\pi_i q_{ij}+\pi_j q_{jj}=0$$

או

$$\sum_{i\in S}\pi_i q_{ij}=0$$

ז"א

$$\pi Q=0$$

מ.ש.ל.

הערה: הכוון ההפוך אינו תמיד נכון (כמו במקרה הבדיד) אבל למרות זאת, עבור רוב הדוגמאות השימושיות קל להשתמש במשוואות תנאי שווי משקל מפורט ולכן ננסה להשתמש בהן.

בתחילת החלק הבא (פרק ה-1) נפתור את משוואות שווי משקל המפורטות עבור הדוגמא הפופולארית והיישומיות ביותר: תהליך לידה ומוות.

תיאור חלק ה:

בחלק זה נגדיר וננתח בקצרה תהליכי לידה-מוות. באמצאות תהליכים אלו נגדיר וננתח מערכות טורים אלמנטאריות (מרקוביות). בנוסף נדון באופן כללי במערכות טורים, חשבונאות של מערכות תורים, נוסחת ליטל.

פרק ה-1: תהליכי לידה-מוות.

תהליכי לידה ומוות הינם אחת הדוגמאות הנפוצות והשימושיות ביותר של תהליכי קפיצה מרקובים.

הגדרה:

תהליך לידה-מוות הוא תהליך קפיצה מרקובי בעל מרחב מצבים $\{0,1,2,...\}$ המאפשר לעבור ממצב n אך ורק למצב n+1 או למצב n-1 (עבור n חיובי ממש) ומאפשר לעבור ממצב 0 אך ורק למצב 1.

קצב המעבר ממצב n למצב n+1 הוא λ_n $(n=0,1,2,...)$. קצבים אלו נקראים **קצבי הלידה**.

קצב המעבר ממצב n למצב n-1 הוא μ_n $(n=1,2,...)$. קצבים אלו נקראים **קצבי המוות**.

הערה: לפעמים מרחב המצבים הוא סופי $\{0,1,...,N\}$, ז"א אין מעברים ממצב N הלאה למצב N+1.

הערה: תהליך לידה מוות בעצם מאופיין ע"י הסדרות: $\{\lambda_0,\lambda_1,\lambda_2,...\}$ ו - $\{\mu_1,\mu_2,...\}$

שימו לב שסדרת קצבי המוות מתחילה ב באינדקס 1 בעוד שסדרת קצבי הלידה באינדקס 0.

מטריצת הגנראטור של התהליך היא:

$$Q=\begin{pmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 & 0 & \cdots \\ 0 & \mu_2 & -(\lambda_2+\mu_2) & \lambda_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

מכאן הייצוג בצורה המשוכנת הוא:

$$\overline{\lambda}_0=\lambda_0$$

$$\overline{\lambda}_k=\lambda_k+\mu_k$$

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \frac{\mu_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\mu_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{\mu_2}{\lambda_2+\mu_2} & 0 & \frac{\lambda_2}{\lambda_2+\mu_2} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{\mu_3}{\lambda_3+\mu_3} & 0 & \frac{\lambda_3}{\lambda_3+\mu_3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

כאן אנו מסמנים את קצבי היציאה ממצב ע"י $\overline{\lambda}_k$ בגלל שהסימון λ כבר תפוס.

בפרק זה נראה כיצד ניתן ליישם את המודל של תהליכי לידה ומוות למודלים רבים בתורת התורים. אבל ראשית נראה דוגמאות הקשורות למידול של גודל אוכלוסיה.

דוגמא: תהליך פואסון

תהליך פואסון הוא תהליך לידה מוות בו

$\lambda_k = \lambda$

$\mu_k = 0$

ז"א הוא בעצם תהליך לידה טהור (קצבי המוות הינם 0).

תכונות תהליך פואסון נחקרו לעומק בחלק ג' של הקורס.

דוגמא: תהליך לידה בעל קצב לידה ליניארי – תהליך Yule:
נחשוב על אוכלוסיה בה פריטים יכולים ללדת פריטים אחרים אבל אינם יכולים למות. אם כל פריט מתנהג באופן בלתי תלוי בפריטים האחרים ולוקח זמן בעל פילוג $\exp(\lambda)$ ללדת אז ניתן לייצג את מספר הפריטים במערכת כתהליך לידה טהור בעל פרמטר: $\lambda_k = k\lambda$. זה בגלל שאם באוכלוסיה יש k פריטים, וכל אחד מוליד בקצב λ אז סך קצב הילודה במצב זה הוא $k\lambda$.
התהליך הוצע ע"י החוקר G. Yule בתורתו המתמטית של האבולוציה.

תכונות מסוימות של תהליך זה נחקרו לעומק בחלק ד' של הקורס.

דוגמא: מודל אוכלוסיה ליניארי
נסתכל על אוכלוסיה בה כל פריט מוליד פריט אחר על פי קצב אקספוננציאלי λ ומת על פי קצב אקספוננציאלי μ. נמדל את מספר הפריטים באוכלוסיה.
אז קצבי התהליך הם:
$\mu_k = k\mu$ (כי במידה ויש k פריטים עוצמת המעבר ממצב k למצב k-1 היא כסכום עוצמות התמותה).
$\lambda_k = k\lambda$ (על פי אותו שיקול).

נראה כעת כי עבור תהליך זה:
$E[X_t \mid X_0 = i] = ie^{(\lambda-\mu)t}$.
ז"א תוחלת ערך התהליך שואפת על פני הזמן ל – 0 במידה ו $\mu > \lambda$ או שואפת על פני הזמן לאינסוף במידה ו $\mu < \lambda$.

לצורך הנוחות, נסמן $M_i(t) = E[X_t \mid X_0 = i]$.
נבחין: בגלל שכל פריט מוליד, ומת ללא קשר למה שקורה לפריטים אחרים, ניתן לחשוב על האוכלוסייה הכללית אשר התחילה עם i פריטים כמורכבת מ i אוכלוסיות בלתי תלויות אשר כל אחת מתחילה עם פריט בודד. ולכן
$M_i(t) = iM_1(t)$.
לצורך הנוחות נסמן $M(t) = M_1(t)$.
נראה כעת כי $M(t) = e^{(\lambda-\mu)t}$ ומכאן התוצאה.

נסמן ב T את זמן האירוע הראשון (לידה או מוות). אז על פי נוסחת התוחלת השלמה:

$$M(t) = E[X_t \mid X_0 = 1] = \int_0^\infty E[X_t \mid T = s] f_T(s)\,ds$$

כאשר $f_T(s) = (\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s}$

נפצל את האינטגרל לשניים:

$$M(t)=\int_0^t E[X_t \mid T=s]f_T(s)ds+\int_t^\infty E[X_t \mid T=s]f_T(s)ds$$

ננתח את הגודל $E[X_t \mid T=s]$:

במידה והאירוע הראשון מתרחש בזמן s אשר גדול מ – t אז גודל האוכלוסייה בזמן t הוא 1.

לעומת זאת עם האירוע הראשון מתרחש בזמן s אשר קטן מ t אז ייתכנו המקרים הבאים:

א) s<t והאירוע הוא מוות (מתרחש בהסתברות $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$), אז בזמן s האוכלוסייה נכחדת ואז גם בזמן t ישנם אפס פריטים.

ב) s<t והאירוע הוא לידה (מתרחש בהסתברות $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$), אז בזמן s ישנם 2 פריטים ואז לפי התכונה המרקובית תוחלת האוכלוסייה בזמן t היא $M_2(t-s)$ שזה $2M(t-s)$.

אם כך,

$$M(t)=\int_0^t \frac{\lambda}{\lambda+\mu}2M(t-s)(\lambda+\mu)e^{-(\lambda+\mu)s}ds+\int_t^\infty 1 f_T(s)ds$$

$$=2\lambda\int_0^t M(t-s)e^{-(\lambda+\mu)s}ds+e^{-(\lambda+\mu)t}$$

יש כאן משוואה אינטגראלית עבור $M(t)$, לא נראה את דרך מציאת הפתרון אלה ננחש שהפתרון הוא $M(t)=e^{(\lambda-\mu)t}$ ונבדוק:

האם מתקיים $e^{(\lambda-\mu)t}=2\lambda\int_0^t e^{(\lambda-\mu)(t-s)}e^{-(\lambda+\mu)s}ds+e^{-(\lambda+\mu)t}$?

צד ימין הוא:

$$2\lambda e^{(\lambda-\mu)t}\int_0^t e^{(\mu-\lambda-\lambda-\mu)s}ds+e^{-(\lambda+\mu)t}$$

שזה

$$2\lambda e^{(\lambda-\mu)t}\left[\frac{e^{-2\lambda s}}{-2\lambda}\right|_0^t+e^{-(\lambda+\mu)t}$$

שזה

$$e^{(\lambda-\mu)t}(1-e^{-2\lambda t})+e^{-(\lambda+\mu)t}$$

שזה

$$e^{(\lambda-\mu)t}-e^{(\lambda-\mu-2\lambda)t}+e^{(-\lambda-\mu)t}$$

ומכאן התוצאה.

התפלגות שווי המשקל:

יהי X_n תהליך לידה-מוות. נסמן $p_n=\lim_{k\to\infty}P(X_k=n)$. אזי $\{p_n,n\geq 0\}$ היא התפלגות שווי המשקל/סטציונרית/גבולית של התהליך. בפרק הקודם ראינו כי המשמעות הברורה של התפלגות זאת היא תיאור של פרופורציית הזמן (בטווח הארוך) אשר בו נמצא התהליך במצב כלשהו.

לא תמיד ההתפלגות הנ"ל קיימת, לדוגמא תהליך פואסון הוא תהליך לידה מוות ובו $\lambda_n = \lambda, \mu_n = 0$ וכידוע לתהליך פואסון לא קיימת התפלגות סטציונרית.

נמצא כעת את ההתפלגות הסטציונרית ותנאי הכרחי ומספיק לקיומה.

נרשום את משוואות תנאי שווי המשקל המפורט:

$$\lambda_0 p_0 = \mu_1 p_1$$
$$\lambda_1 p_1 = \mu_2 p_2$$
....

ובאופן כללי

$$\lambda_n p_n = \mu_{n+1} p_{n+1}$$

מכאן:

$$p_1 = \frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$
$$p_2 = \frac{\lambda_1}{\mu_2}\frac{\lambda_0}{\mu_1} p_0$$

...

ובאופן כללי

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1} p_0$$

נציב כעת במשוואת הסכום לאחד:

$$1 = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1} p_0$$

מכאן:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1}}$$

ולכן עבור $1 \le n$

$$p_n = \frac{\lambda_{n-1}\lambda_{n-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_n\mu_{n-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1})}$$

או ברישום קומפקטי:

$p_n = p_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}$ עבור $1 \le n$.

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}} .$$

רואים שתנאי הכרחי לקיום הפתרון הוא: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_{k-1}\lambda_{k-2}\cdot\ldots\cdot\lambda_0}{\mu_k\mu_{k-1}\cdot\ldots\cdot\mu_1} < \infty$ (התכנסות טור המכפלות של מנות העוצמות), ניתן להראות (לא נעשה כאן) שזהו גם תנאי מספיק.

תוחלת זמן הפגיעה במצב k+1 כאשר מתחילים במצב k:

נחשב כעת את תוחלת זמן הפגיעה במצב k+1 כאשר מתחילים במצב k: $R_k = E[T_{k+1} \mid X_0 = k]$ (סימנו גודל זה ב- R_k).

נחשב את R_k באופן רקורסיבי.

ראשית R_0 הוא תוחלת זמן הפגיעה במצב 1 כאשר מתחילים במצב 0. זוהי התוחלת של מ"מ אקספוננציאלי בעל קצב λ_0:

$$R_0 = \frac{1}{\lambda_0} .$$

לצורך ההמשך נגדיר מ"מ I_k אשר מציין האם המעבר הראשון ממצב k הוא למצב k+1 או למצב k-1. במידה והמעבר הוא ל k+1 אז $I_k = 1$ אחרת $I_k = 0$.

נשים לב :

$$E[T_{k+1} \mid X_0 = k, I_k = 1] = \frac{1}{\lambda_k + \mu_k}$$

זה, בגלל שתוחלת הזמן עד המעבר הראשון ממצב k היא $\frac{1}{\lambda_k + \mu_k}$ ללא תלות במעבר אשר מתבצע.

בנוסף:

$$E[T_{k+1} \mid X_0 = k, I_k = 0] = \frac{1}{\lambda_k + \mu_k} + R_{k-1} + R_k$$

זה בגלל שבהינתן שהמעבר הראשון ממצב k היה למצב $k-1$ ($I_k = 0$), אז תוחלת הזמן עד לפגיעה במצב k+1 היא תוחלת הזמן עד המעבר הראשון ($\frac{1}{\lambda_k + \mu_k}$) ועוד תוחלת זמן המעבר ממצב k-1 למצב k (R_{k-1}) ועוד תוחלת זמן המעבר ממצב k למצב k+1 (R_k).

כמובן שידועה כי:

$$P(I_k = 1) = \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

$$P(I_k = 0) = \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}$$

על פי משפט התוחלת השלמה:

$$\begin{aligned}
R_k &= E[T_{k+1} \mid X_0 = k] = EE[T_{k+1} \mid X_0 = k, I_k] \\
&= E[T_{k+1} \mid X_0 = k, I_k = 0]P(I_k = 0) + E[T_{k+1} \mid X_0 = k, I_k = 1]P(I_k = 1) \\
&= \left(\frac{1}{\lambda_k + \mu_k} + R_{k-1} + R_k\right)\frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k} + \frac{1}{\lambda_k + \mu_k}\frac{\lambda_k}{\lambda_k + \mu_k} \\
&= \frac{\mu_k}{\lambda_k + \mu_k}(R_{k-1} + R_k) + \frac{\lambda_k + \mu_k}{(\lambda_k + \mu_k)^2}
\end{aligned}$$

נשתמש בשוויון לעיל לבטא את R_k במונחי R_{k-1}:

$$R_k = \frac{1}{\lambda_k} + \frac{\mu_k}{\lambda_k} R_{k-1}$$

קיבלנו כך דרך רקורסיבית לחשב את $R_0, R_1, R_2, ...$.

בנוסף נבחין כי במידה והיינו רוצים לחשב את תוחלת זמן המעבר ממצב k למצב $k < j$. אז ניתן לבצע זאת ע"י הסכום: $R_k + R_{k+1} + ... + R_{j-1}$.

פרק ה-2: מבוא למערכות תורים. תור M/M/1, התפלגות מספר הנמצאים במערכת.

מבוא למערכות תורים:

תורת התורים הינו תחום רחב ובו מנתחים **מערכות תורים**. מהי מערכת תורים? דוגמא מאוד מורכבת למערכת תורים היא האינטרנט, אוסף של מיליוני hosts (מחשבים) המחוברים באלפי תת רשתות וביניהם נתבים (routers) המעבירים חבילות מידע. בכל נתב ישנו תור או מספר תורים של חבילות, החבילות מחולקות למחלקות שונות, והניתוב ברשת הוא דינאמי.

בחלק זה של הקורס זה ניגע בקצרה בדוגמאות הרבה יותר פשוטות: תור של צרכנים בדואר, תור של אנשים בכניסה לקניון (נבדקים ע"י המאבטח), אוסף חבילות הממתינות לניתוב בנתב בודד באינטרנט ועוד.

להלן לקסיקון המושגים הבסיסי אשר ילווה אותנו בהמשך החלק הזה של הקורס:

צרכן –זה אשר ממתין בתור (במידה ועליו להמתין) ומקבל שרות במערכת התורים. (במקרה של מערכות תקשורת, צרכן הוא לפעמים חבילת תקשורת – Packet).

שרת –זה אשר נותן שרות לצרכנים: מעביר צרכנים דרכו ומטפל בהם.

תור –האזור (פיזי או לוגי) אשר בו ממתנים צרכנים לשרות.

שרות – פעולת השרת על צרכנים.

צרכן בתור – צרכן אשר ממתין בתור (ברגע נתון).

צרכן בשרות – צרכן אשר מקבל שרות (ברגע נתון).

צרכן במערכת – צרכן שהוא או בתור או בשרות.

מדיניות שרות – מדיניות השרת הקובעת באיזה צרכן לטפל הבא (ברגע שהשרת מתפנה). בכל המערכות אשר נבחן בפרק זה נדון במידיות FCFS (First Come First Serve) – טיפול בצרכן הכי ותיק.

משך השרות – הזמן אשר לוקח לשרת לתת שרות לצרכן ספציפי.

זמן בין מופעי צרכנים – הזמן בין מופע צרכנים עוקבים למערכת.

משך המתנה בתור – הזמן אשר צרכן ממתין בתור (מהגעתו למערכת ועד תחילת השרות).

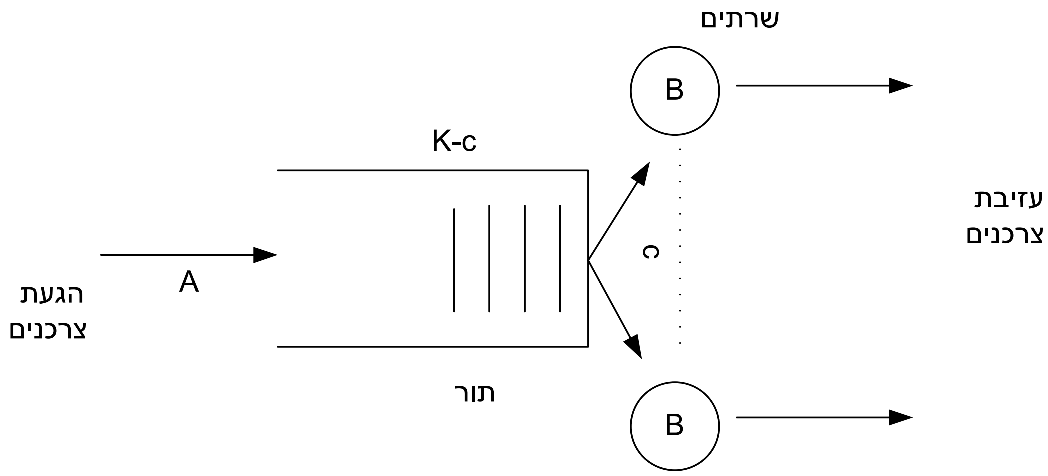
משך שהות במערכת – סך הזמן של צרכן במערכת (משך ההמתנה בתור + משך השרות).

מספר הצרכנים בתור – אורך התור.

מספר הצרכנים במערכת – אורך התור + מספר הצרכנים בשרות.

אנו נעסוק בחלק זה של הקורס רק במערכות התורים הבסיסיות ביותר, ונבצע ניתוח סטוכסטי שלהן תחת הנחות הסתברותיות מסוימות. לרוב חוקי ההסתברות (הפילוגים) של משך השרות והזמן בין מופעי הצרכנים יהיו נתונים, ואנו נחשב את חוקי ההסתברות (או מומנטים מסוימים) של משך ההמתנה בתור, משך השהות במערכת, מספר הצרכנים בתור, ומספר הצרכנים במערכת, כל זאת תחת ההנחה של **מצב יציב**.

כל מערכת אשר נדון בה ניתנת להמחשה ע"י הציור הבא:



מה רואים בציור?
הציור ממחיש מערכת תורים עם תור בודד ומספר שרתים. צרכנים מגיעים אל התור משמאל, ממתינים בתור (במידה וכל השרתים מלאים באותו רגע) ומקבלים שרות מהשרתים (העיגולים). בסיום כל שרות, הצרכן משוחרר כלפי צד ימין וכך עוזב את המערכת.
במערכת ישנם c שרתים ו K-c מקומות פנויים לצרכנים בתור. ז"א שהמספר המקסימאלי של צרכנים היכולים לשהות במערכת הוא K.

הערה: נדון גם במערכות בהם c ו/או K הינם אינסופיים.

הגעת צרכנים מאופיינת על פי חוק הגעה A. וזמן שרות הצרכנים מאופיין על פי B. כאמור, הניתוח אשר נבצע הוא הסתברותי. ולכן הפרמטרים A,B של המערכת יאפיינו באופן הסתברותי את הזמנים הבין מופעיים וזמני השרות במערכת.

לפעמים, נהוג לאפיין מערכות תורים מהסוג המצויר לעיל ע"י כתיבה כזאת: A/B/c/K/P. כאשר:
A – מאפיין את תהליך הגעת הצרכנים למערכת.
B – מאפיין את התפלגות זמני השרות בשרתים.
c – מספר השרתים.
K – קיבולת המערכת (אורך תור מקסימאלי + מספר שרתים). במידה ולא מציינים מספר זה אז הוא ∞ (אין מגבלה על קיבולת המערכת).
P – מדיניות השרות, במידה ולא מציינים מספר זה אז המדיניות הינה FCFS.
סוג כתיבה זה נקרה Kendall Notation.

נדון במערכות ובהן $A,B\in\{M,D,G\}$. כאשר:
M – "מרקובי" זמנים בין מופעיים/זמני שרות אקספוננציאלים.
D – "דטרמיניסטי" זמנים בין מופעיים או זמני שרות דטרמיניסטיים.
G – "כללים" זמנים בין מופעיים או זמני שרות בעלי התפלגות כללית כלשהי (מערכות מסוג זה הינם הכללות של המקרה ה – D או ה- M).

רוב המערכות אשר ננתח בחלק זה הינם מהסוג "A="M", B="M. כאמור, במערכות כאלה, הגעה הצרכנים למערכת היא על פי תהליך פואסון עם פרמטר λ. וזמני שרות הצרכנים הינם $\text{i.i.d. } \exp(\mu)$ ובלתי תלויים בתהליך ההגעה.

באופן כללי, תורת התורים באה לעזור לפתור בעיות תכנוניות והנדסיות כגון בחירת הקצאה של אורך התור המקסימאלי (K-c) ומספר השרתים במערכת כך שזמן ההמתנה וכו' יהיו קטנים מספיק.

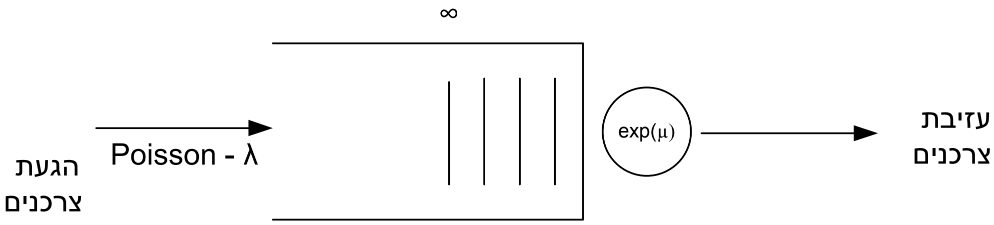
סימונים של גדלים:

להלן רוב הסימונים של הגדלים הרלוונטיים למערכות תורים אשר נבחן בפרק זה:

תיאור	סימון המשתנה המקרי	סימון התוחלת	הערות
זמן הגעת הצרכן ה – k	t_k	-	
זמן בין הגעת הצרכן ה –k-1 לצרכן ה - k	τ_k	$1/\lambda$	
זמן שרות הצרכן ה – k	x_k	$1/\mu$	
עוצמת התעבורה (traffic intensity) ניצולת (utilization)	-	$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$	
זמן עזיבת הצרכן ה – k	s_k	-	
מספר הצרכנים בתור בזמן t	$L_q(t)$	L_q	הערה: מדובר בתוחלת במצב יציב.
מספר הצרכנים בשרות בזמן t	$L_s(t)$	L_s	הערה: מדובר בתוחלת במצב יציב.
מספר הצרכנים במערכת בזמן t	$L(t)$	L	הערה: מדובר בתוחלת במצב יציב. $L(t) = L_q(t) + L_s(t)$ $L = L_q + L_s$
זמן המתנה של הצרכן ה-k בתור	$W_q(k)$	W_q	הערה: מדובר בתוחלת במצב יציב.
זמן שהות הצרכן ה-kבמערכת	$W(k)$	W	הערה: מדובר בתוחלת במצב יציב. $W(k) = W_q(k) + x_k$ $W = W_q + 1/\mu$

מערכת M/M/1:

כעת נדון בדוגמא הפשוטה ביותר: תור M/M/1. זוהי מערכת ובא תהליך ההגעה הוא כאמור פואסון עם פרמטר λ. וזמני שרות הצרכנים הינם כאמור i.i.d. $\exp(\mu)$ ובלתי תלויים בתהליך ההגעה. בנוסף במערכת יש שרת בודד ואין מגבלה לגבי מספר הצרכנים במערכת. להלן איור המערכת:



הניתוחים אשר נבצע (בפרק זה וכמעט בכל החלק הזה של הקורס) יהיו ניתוחי מצב יציב. הם יניחו כי המערכת רצה מספיק זמן בשביל לנפות תופעות מעבר ראשוניות.

מספר הצרכנים במערכת M/M/1 כתהליך לידה מוות פשוט ביותר:

מה דרוש בכדי לאפיין את מצב מערכת M/M/1? דרוש מספר אחד והוא מספר הצרכנים במערכת בזמן t. נסמן ערך אקראי זה ב $N(t)$.

כאשר $N(t)=0$ אזי המערכת ריקה, אין צרכנים בתור והשרת בטל.

כאשר $N(t)=1$ אזי התור ריק, אבל השרת משרת צרכן בודד.

כאשר $N(t)=2$ אזי יש צרכן אחד בשרות וצרכן אחד אשר ממתין בתור.

...

כאשר $N(t)=k$ אזי יש צרכן אחד בשרות ו k-1 צרכנים אשר ממתינים בתור.

קל לראות כי $N(t)$ הוא ערכו של תהליך לידה מוות עם פרמטרים קבועים:

$\lambda_k=\lambda$

$\mu_k=\mu$

כאמור, המערכת מאופיינת על ידי פרמטרים λ,μ.

נדון כעת בכל אחד מהסימונים אשר הוצגו לעיל עבור מערכת M/M/1:

$\underline{t_k}$

זמני הגעות הלקוחות ה k הינם זמני הקפיצה של תהליך פואסון עם פרמטר λ, על כל השתמעה מכך. לדוגמא: $t_{20}\sim erlang(20,\lambda)$.

$\underline{\tau_k}$

הזמן בין הצרכן ה-k-1 לצרכן הk הוא מ"מ $\exp(\lambda)$. ז"א יש כאן סדרת i.i.d. של כאלו.

$\underline{x_k}$

זמן שרות הצרכן ה k הוא מ"מ $\exp(\mu)$. גם זו היא סדרת i.i.d.

s_k

סדרת זמני העזיבה של הצרכנים היא סדרה אקראית עולה (לא i.i.d.). סדרה זו מגדירה תהליך ספירה. ניתן לומר דברים רבים על סדרה זו (במוצא תהליך M/M/1) אבל לא נרחיב כעת.

$L_s(t)\,,L_q(t)\,,L(t)$

אמרנו כי מדובר בתהליך לידה מוות עם קצב לידה וקצב מוות קבועים (לא תלויים במצב): λ,μ.
נניח כי המערכת מתחילה ריקה.
אם כך:

$$P_{0j}=P(L(t)=j)$$

ז"א ע"י פתרון של המשוואות האחוריות או הקדמיות ניתן לחשב את פילוג $L(t)$. פתרון זה אינו קל לביצוע באופן ישיר.

בנוסף ידוע כי $L_q(t)=L(t)-1$ כאשר המערכת אינה ריקה ו - $L_q(t)=0$ כאשר המערכת ריקה. ההסתברות שהמערכת ריקה בזמן t היא $P_{00}(t)$, וההסתברות שאינה ריקה היא $1-P_{00}(t)$.

בנוסף, $L_s(t)$ הוא או אפס או אחד בהתאם לזה שהמערכת ריקה או אינה ריקה.

קשה לחשב את כל הגדלים הללו (לכל t) ונראה עכשיו כי יותר קל (ולרוב גם ישים) להסתכל על המערכת לאחר שרצה "מספיק זמן". ז"א להסתכל על המערכת במצב יציב.

$L_s(t)\,,L_q(t)\,,L(t)\,,\rho$

נחשב את ההתפלגות הסטציונרית של התהליך:
ניזכר במשוואות שווי משקל עבור תהליך לידה מוות כללי ונציב λ,μ קבועים:

$$p_n=p_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}\qquad\qquad p_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{k-1}\frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}}}.$$

בכל מקום בו ניתן, נעדיף לייצג את המנה של λ,μ כ - ρ.
ראשית.

$$p_0=\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k}=\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}\rho^k}=1-\rho$$

השוויון מתקיים אמ"מ הטור מתכנס וזה כאשר $\rho<1$. ז"א כאשר $\lambda<\mu$ (קצב השרות גדול מקצב ההגעות). ז"א כאשר $\frac{1}{\lambda}>\frac{1}{\mu}$ (הזמן הממוצע בין הגעות גדול מזמן הממוצע של שרות). כאשר $\rho\geq 1$ נקבל שלא קיימת התפלגות סטציונרית (המערכת אינה יציבה).

הערה: ניתן להראות כי כאשר $\rho=1$ אזי כל המצבים מתמידים אפס וכאשר $\rho>1$ אז כל המצבים חולפים.

p_0 היא ההסתברות שהמערכת ריקה (השרת ריק). רואים שבמצב יציב זה קורה בהסתברות $1-\rho$. מכאן ρ קיבל את שמו (ניצולת): ρ הוא פרופורציית הזמן שבו השרת עובד (מנצלים אותו). בכל נקודת זמן בה המערכת אינה ריקה מתקיים כי יש מישהו בשרות, אחרת אין מישהו בשרות ולכן $L_s(t)=(1-p_0)\cdot 1+p_0\cdot 0=\rho$

נמשיך ונחשב את שאר איבר ההתפלגות הסטציונרית:
$p_n = p_0\rho^n = (1-\rho)\rho^n$.
קיבלנו אם כך שמספר הצרכנים במערכת במצב יציב מתפלג כמו מ"מ גיאומטרי סופר כישלונות בעל פרמטר $(1-\rho)$.
תוחלתו של משתנה מקרי זה היא:
$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda/\mu}{1-\lambda/\mu} = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$. זו תוחלת מספר הצרכנים במערכת.

את תוחלת מספר הצרכנים בתור (במצב יציב) נחשב כך:

$$L_q = L - L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$$

$\underline{W_q(k), W(k)}$

את פילוג $W_q(k)$, זמן ההמתנה של הצרכן ה k בתור קשה לחשב (מדובר כאן לא במצב יציב).
אנו יודעים שעבור הצרכן הראשון $W_q(1) = 0$ בהנחה שהמערכת מתחילה ריקה, אבל מעבר לכך לא ניתן לומר בקלות.
כנ"ל עבור המ"מ הדומה $W(k)$, זמן ההמתנה של הצרכן ה k במערכת, גם כאן קשה לבצע חישובים עבור כל k סופי.
נבחין שעבור צרכן אשר מגיע למערכת ריקה, $W_q(k) = 0$ ועבור צרכן אשר מגיעה למערכת לא ריקה $W_q(k)$ הוא סכום זמני השרות הנותר של הצרכנים אשר היו במערכת ברגע הגעת הצרכן.

למרות שלא ניתן לומר הרבה עבור k סופי, ניתן (במקרה של M/M/1) לחשב את פילוג זמן ההמתנה בתור וזמן השהייה במערכת עבור מצב יציב (k גדול).

פילוג זמן ההמתנה במצב יציב ב FIFO עבור M/M/1

נסתכל על מערכת M/M/1 במצב יציב. נניח כי השירות הוא FIFO (First In First Serve). שם אחר לכך הוא FCFS (First Come First Serve). כיצד מתפלג זמן השהייה במערכת?

עבור לקוח אשר מגיע למערכת ריקה, זמן השהייה הוא זמן השרות ולכן מתפלג $\exp(\mu)$.
עבור לקוח אשר מגיע למערכת אשר יש בה $n \geq 1$ צרכנים הוא צריך להמתין עד ש n הצרכנים יסיימו ($erlang(n,\mu)$) ואז הוא מקבל שרות. לכן סך הכול הוא שוהה במערכת $erlang(n+1,\mu)$. אם כך גם לקוח אשר מגיע למערכת ריקה ($n=0$) שוהה במערכת לזמן $erlang(n+1,\mu)$.

אם כך:

$$P(W \leq t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(W \leq t \mid N=n) P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^t f_{erlang(n+1,\mu)}(s)\,ds (1-\rho)\rho^n$$

כל לראות ע"י החלפה של האינטגרל והסכום כי $P(W \leq t) = 1 - e^{-(\mu-\lambda)t}$. ולכן זמן השהייה מתפלג $\exp(\mu-\lambda)$.

פרק ה-3: חשבונאות של מערכות תורים ונוסחת ליטל.

בפרק הקודם הכרנו את המערכת הבסיסית ביותר M/M/1. בפרק זה נסתכל על ריאליזציה בודדת של מערכת תורים ונדון בנוסחת ליטל.

סדרות המספרים המתארות ריאליזציה של מערכת תורים:

נסתכל על ריאליזציה אחת של מערכת תורים. את הריאליזציה מאפיינים 2 סדרות המספרים הבאות:

$\{t_k, k \geq 1\}$ - סדרת זמני ההגעה (הערך t_k הוא זמן הגעת הצרכן ה k).

$\{x_k, k \geq 1\}$ - סדרת זמני השרות (הערך x_k הוא זמן השרות של הצרכן ה k).

הערה: על פי הנוחות ניתן לדון בסדרה $\{\tau_k, k \geq 1\}$, סדרת הזמנים הבין מופעיים. ולקבל מסדרה זו את סדרת זמני ההגעה: $t_1 = \tau_1, t_k = t_{k-1} + \tau_k$.

דוגמא:

נסתכל על המערכת D/D/1 (כזכור "D" מתאר התפלגות דטרמיניסטית).

נניח כי קצבי ההגעה $\lambda = 1/2, \mu = 1$.

הערה: עד כה השתמשנו ב λ, μ לסימון פרמטרי קצב בהקשרים של התפלגות אקספוננציאלית. בדוגמא זו (וגם לפעמים בהמשך) משמעות קצב λ היא, תוחלת בין זמנית של $1/\lambda$.

אם כך:

$$\{\tau_k = 2, k \geq 1\} \Rightarrow \{t_k = 2k, k \geq 1\}$$

$$\{x_k = 1,, k \geq 1\}$$

אם כך, מהו $L(t)$ של מערכת זו? צרכן מגיעה כל 2 יחידות זמן. הצרכן תמיד מוצא תור ריק ולכן נכנס מייד לשרות. לאחר חצי יחידת זמן, שרות הצרכן מסתיים והוא עוזב את המערכת. ולכן:

$L(t) = I_{[2N \setminus \{0\}]}(\lfloor t \rfloor)$ - פו' המקבלת 1, רק כאשר הערך השלם התחתון של t הוא זוגי (לא כולל 0).

הערה: בדוגמא הקודמת, סדרות זמני ההגעה היו דטרמיניסטיות ולכן לא נדרש ניתוח סטוכסטי. באופן כללי, סדרת אלו הינן סדרות אקראית (פו' של ω). כך לדוגמא בתור M/M/1 הסדרות הינן סדרות i.i.d. של משתנים אקספוננציאלים.

פו' ספירה מצטברות – הגעה ועזיבה:

נגדיר את 2 הפו' הללו:

$A(t)$ - מספר המגיעים למערכת עד זמן t (כולל t).

$D(t)$ - מספר העוזבים את המערכת עד זמן t (כולל t).

אם כך: $A(t) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid t_k \leq t\}$ הינו נבנה ע"י סדרת זמני ההגעה.

בשביל לתאר במפורש את $D(t)$ נעזר בסדרת מספרים נוספת (אשר קיימת עבור כל ריאליזציה):

$\{s_k, k \geq 1\}$ - זוהי סדרת זמני הכניסה לשרות של כל צרכן. ברור כי $t_k \leq s_k$ עבור כל צרכן. במידה ובזמן הגעת הצרכן ה k, אזי התור ריק $L(t) = 0$ אז מתקיים שוויון, אחרת, מתקיים ממש אי-שוויון.

כיצד ניתן לחשב את הסדרה $\{s_k, k \geq 1\}$? ובכן בזמן הגעת הצרכן ה k (t_k) נתעניין כמה צרכנים כבר עזבו את המערכת:

$D(t_k)$ - מספר זה הוא גם האינדקס של הצרכן האחרון אשר עזב את המערכת. ברור כי $D(t_k) < k$. $D(t_k)$ הוא לכל

היותר k-1 וזה מתקיים כאשר בזמן t_k (הגעת הצרכן ה – k) המערכת ריקה. אם כך, בזמן t_k, נמצאים במערכת הצרכנים: $\{D(t_k)+1, D(t_k)+2, ..., k-1\}$ מאבר לצרכן החדש k. ובמידה והמערכת ריקה אז קבוצה זו של צרכנים היא ריקה.
ולכן:
$s_k = t_k + x_{D(t_k)+1} + x_{D(t_k)+2} + ... + x_{k-1}$ (כאשר ייתכן ואין xים אשר מתווספים ל/) t_k

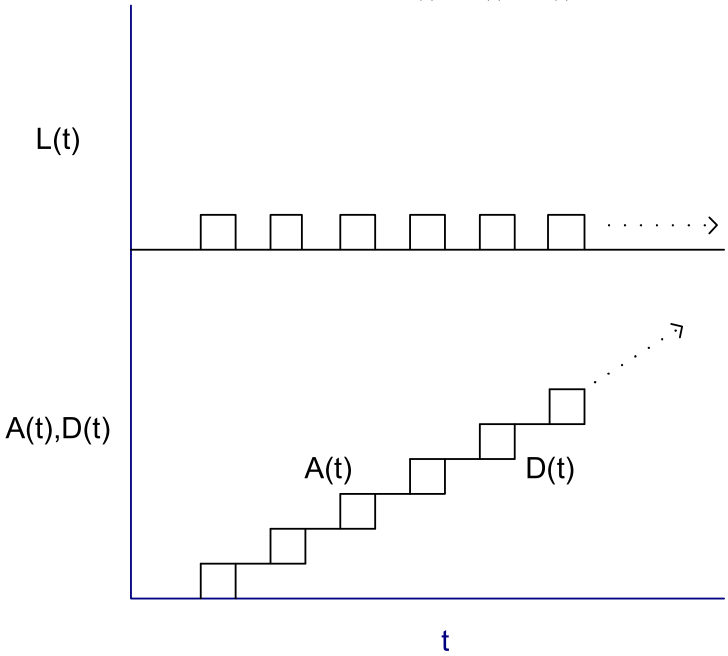
עכשיו ניתן לרשום במפורש את $D(t)$: $D(t) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid s_k + x_k \le t\}$.

$A(t_k) = k$

את $N(t)$ אשר כבר הכרנו בפרק הקודם ניתן אם כך לרשום כך:

$L(t) = A(t) - D(t)$.

להלן ציור של A(t), D(t), L(t) עבור דוגמת ה D/D/1 אשר הוצגה לעיל:



<u>דוגמא:</u>
נניח כעת כי אנו איננו במערכת D/D/1 אלה במערכת כלשהי G/G/1. (כאשר "G" מתאר התפלגות כללית כלשהי).
ונתונה הריאליזציה הבאה (נציג כאן רק את תחילת הריאליזציה):

$$\{\tau_k, k \ge 1\} = \{1,2,4,1,1,3,5,1,4,...\}$$
$$\{x_k, k \ge 1\} = \{1,3,1,1,2,1,1,1,2,...\}$$

ראשית נחשב את סדרת זמני ההגעה:

$$\{\tau_k, k \ge 1\} = \{1,2,4,1,1,3,5,1,4,...\}$$
$$t_1 = \tau_1 = 1,$$
$$t_2 = t_1 + \tau_2 = 1 + 2 = 3,$$
$$t_3 = t_2 + \tau_3 = 3 + 4 = 7,$$
$$...$$
$$\{t_k, k \ge 1\} = \{1,3,7,8,9,12,17,18,22,...\}$$

ניתן להמשיך "לסמלץ" את המערכת ולרשום במפורש את A(t),D(t),L(t).

נוסחת ליטל:

להלן נוסחת ליטל: $L = \lambda W$. הנוסחה מקשרת בין ממוצע מספר הצרכנים במערכת (L) לבין זמן השהייה הממוצע של צרכן במערכת (W).

לפני שנדון בשימושים הרבים של נוסחה זו ונוכיח אותה, נציין במדויק מהם התנאים אשר בהם הנוסחה מתקיימת:

<u>משפט (נוסחת ליטל):</u>

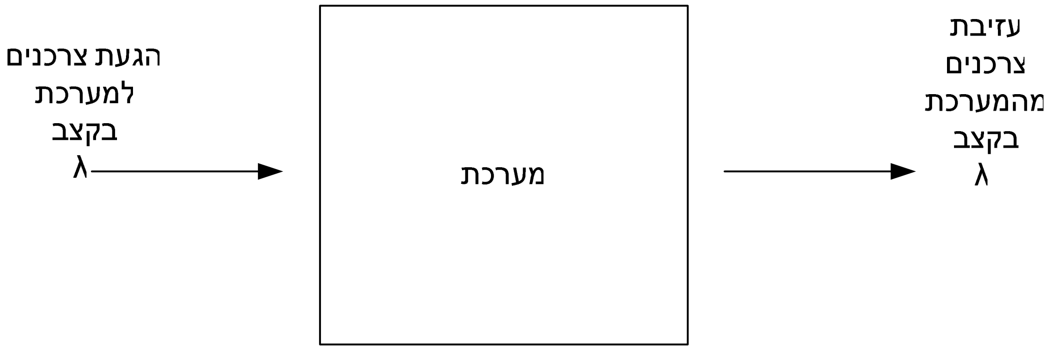
תהי נתונה סדרת זמני הגעה ועזיבה של מערכת $\{(t_k, s_k), k \geq 1\}$ כך שמתקיים:

$\lim_{t\to\infty} \frac{A(t)}{t} = \lambda$ וגם $\lim_{t\to\infty} \frac{D(t)}{t} = \lambda$ עבור λ סופית. אז:

אם $\lim_{k\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} W(k)}{k} = W$ קיים אז $\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t L(s)ds}{t} = L$ קיים ובנוסף

$L = \lambda W$

נוסחת ליטל הינה כללית ביותר ומדברת על מערכות ודרכיהן עוברים באופן כלשהו. כל מערכת ובה קצב כניסת הצרכנים שווה לקצב יציאת הצרכנים תקיים את התנאים של נוסחת ליטל. ז"א, כל מערכת מהסוג המצויר כאן:



פעמים רבות, נתייחס אל המערכת כאל כל מערכת התורים (התור + השרתים) ואז הנוסחה המתאימה הינה באמת $L = \lambda W$. אבל ניתן גם להתייחס ל"מערכת" כאל התור בלבד ואז הנוסחה היא $L_q = \lambda W_q$. בנוסף, ניתן להתייחס למערכת כאל השרת ואז $\rho = \lambda \frac{1}{\mu}$.

פרק ה-4: מערכות תורים נוספות M/M/c, M/M/c/K, M/M/∞, נוסחאות ארלנג.

תחת ההנחה המרקובית אשר גוררת כי תהליך ההגעות הוא פואסוני וזמני השרות הינם אקספוננציאלים, ניתן לתאר מגוון יחסית רחב של מערכות תורים באמצעות תהליכי לידה מוות. עבור כל מערכת שכזו ניתן גם יחסית בכלות לקבל את התפלגות מספר הצרכנים במערכת ע"י משוואות השיווי המשקל של תהליכי לידה ומוות. כל מה שבעצם יש לעשות זה להתבונן במערכת המתוארת ולאפיין את קצבי הלידה וקצבי המוות המתאימים.

מערכת M/M/c:

זוהי מערכת תורים ובה קצב הגעת הצרכנים הוא על פי תהליך פואסון בעל קצב λ. וקצב שרות כל צרכן הוא μ. ישנם c שרתים אשר יכולים לעבוד במקביל, שרת על כל צרכן.

כיצד ניתן למדל את מספר הצרכנים במערכת ($L(t)$) כתהליך לידה ומוות.

קצב הלידה יהיה קבוע $\lambda_n = \lambda$. מה לגבי קצב המוות (שרות)?

במידה וישנם c או יותר צרכנים במערכת ($c \le L(t)$) אז כל השרתים עובדים וכולם עובדים בקצב μ ולכן סך קצב השרות הוא $c\mu$ (קצב המוות).

במידה וישנם פחות מ – c צרכנים במערכת ($c > L(t)$) אז רק $L(t)$ שרתים עובדים ולכן עבור מצב $n < c$ קצב המוות הוא $n\mu$.

כך ניתן לסכם את קצבי הלידה והמוות:

$$\lambda_n = \lambda$$

$$\mu_n = \begin{cases} n\mu & n < c \\ c\mu & n \ge c \end{cases}$$

ידוע כי $p_n = p_0 \prod_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}$

מכאן נובע כי:

$$p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1} n} = (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!} p_0 \qquad ,n < c$$

$$p_n = p_0 \frac{\lambda^n}{\mu^n} \frac{1}{c!c^{n-c}} = (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{c!c^{n-c}} p_0 \quad ,n \ge c$$

על מנת למצוא את p_0 נשתמש בעובדה כי סכום ההסתברויות שווה לאחד, ז"א

$$p_0 = (\sum_{n=0}^{c-1} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{n!} + \sum_{n=c}^{K} (\frac{\lambda}{\mu})^n \frac{1}{c!c^{n-c}})^{-1}$$

נסמן $r = \frac{\lambda}{\mu}$ ו $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} = \frac{r}{c}$ ואז:

$$p_0=\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}\right)^{-1}$$

נתבונן בטור $\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}$:

$$\sum_{n=c}^{\infty}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{\infty}\left(\frac{r}{c}\right)^{n-c}=\frac{r^c}{c!}\sum_{m=0}^{\infty}\rho^m=\frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}$$ כאשר $\frac{r}{c}=\rho<1$

ולכן $p_0=\left(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^c}{c!}\frac{1}{1-\rho}\right)^{-1}$, $\frac{r}{c}=\rho<1$

<u>מערכת M/M/∞:</u>

$$\lambda_n=\lambda$$
$$\mu_n=n\mu$$

$$p_n=p_0\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_k}{\mu_{k+1}}=p_0\frac{\lambda^n}{\mu^n}\frac{1}{\prod_{k=0}^{n-1}n}=p_0\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}$$

$$p_0=\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{r^n}{n!}}=\frac{1}{e^{-r}}$$

ולכן

$$p_n=\frac{e^{-r}r^n}{n!}$$

<u>מערכת M/M/c/K:</u>

$$\lambda_n=\lambda,n<K$$
$$\lambda_n=0,K\le n$$
$$\mu_n=\max(n,c)\mu$$

$$p_n=\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}p_0 \qquad 1\le n<c$$

$$p_n=\frac{\lambda^n}{c!c^{n-c}\mu^n}p_0 \qquad c\le n\le K$$

$$p_0=\left(\sum_{n=0}^{c-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{n!}+\sum_{n=c}^{K}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n\frac{1}{c!c^{n-c}}\right)^{-1}$$

הטור השני הוא:

$$\rho=\frac{\lambda}{c\mu}=\frac{r}{c} \text{ ו } r=\frac{\lambda}{\mu} \text{ כאשר } \sum_{n=c}^{K}\frac{r^n}{c!c^{n-c}}=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{K}(\frac{r}{c})^{n-c}=\frac{r^c}{c!}\sum_{n=c}^{K}\rho^{n-c}=\begin{cases}\frac{r^c}{c!}\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho} & \rho\neq 1,\\ \frac{r^c}{c!}(K-c+1) & \rho=1\end{cases}$$

ולכן

$$p_0=\begin{cases}(\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^c}{c!}\frac{1-\rho^{K-c+1}}{1-\rho})^{-1} & \rho\neq 1,\\ (\sum_{n=0}^{c-1}\frac{r^n}{n!}+\frac{r^c}{c!}(K-c+1))^{-1} & \rho=1\end{cases}$$

נוסחאות ארלנג:

נוסחה שימושית ביותר ביישומים הנדסיים מתייחסת למערכת M/M/c/c , זאתי המערכת M/M/c/K, אשר כרגע ראינו אבל כאשר מתקיים K=c (מספר השרתים שווה למספר המקומות הפנויים במערכת). מערכת שכזאת מתאימה הרבה פעמים למרכזיית טלפון כי למרכזיית טלפון יש מספר סופי של שיחות אשר היא יכולה לתמוך בהם וכך כל שיחה היא גם "שרת" (נותנת לעצמה שרות) וגם לקוח.

ראשית נראה כי:

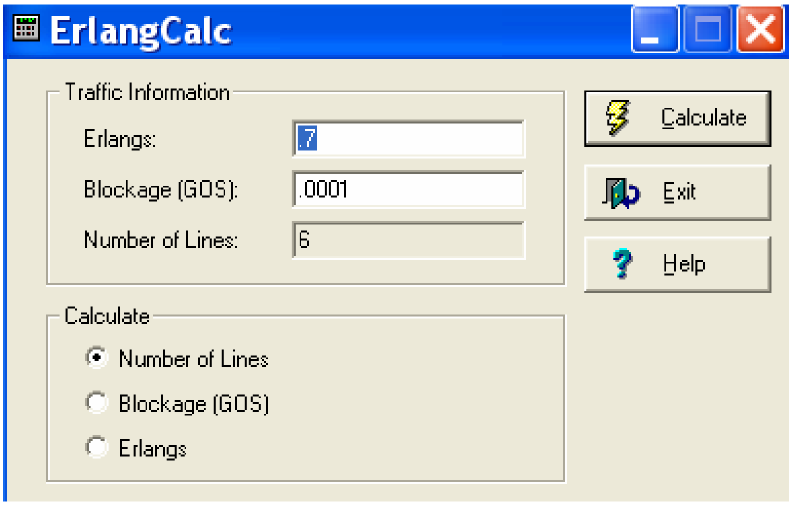
$$p_n=\frac{\frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}}{\sum_{k=0}^{c}\frac{(\lambda/\mu)^k}{k!}} \text{ עבור } 0\le n\le c.$$

התפלגות זאת נקרית **הנוסחה הראשונה של ארלנג.**

מדד ספציפי מעניין ביותר לגבי מערכת שכזאת הוא ההסתברות שלקוח יגיע למערכת אבל לא יקבל שירות. מדד זה הוא פשוט p_c . נסמן $r=\lambda/\mu$.אז:

$$P_{loss}=p_c=\frac{r^c/c!}{\sum_{k=0}^{c}r^k/k!}$$

נוסחה זו נקראה **נוסחת ההפסד של ארלנג.** היא מאפשרת למתכנני רשת לקבוע את מספר הקווים (שרתים) הדרושים כך שההסתברות שהרשת לא תהייה זמינה תהייה קטנה מערך נקוב.
האיור הבא: מציג שימוש בתוכנה הנקראת: ErlangCalc אשר מזינים בה את r (עומס התעבורה הצפוי) ואת ההסברות שחסימה והיא מחשבת את מספר הקווים המינימאלי הדרוש (במקרה שלנו r=0.7 $p_c=0.0001$ ואז התוכנה חישבה כי ה c המינימאלי הדרוש הוא 6).



הערה: את התוכנה ניתן להוריד מ http://www.certis.com/.

פרק ו-1: מה לא נלמד בקורס זה.

הרשימה הבאה מציגה נושאים נוספים אשר לרוב נכללים (בספרים רבים) בחומר הבסיס של תהליכים סטוכסטיים ולא נלמדו בקורס זה.

1. תהליכי חידוש.
2. מרטינגלים.
3. תהליכי סדר שני (תהליכים גאוסים).
4. תנועה ברואנית.

פרק ו-2: השלמות.

פרק זה מציין עבור כל חלק של החומר איזה פריטי מידע חסרים לצורך שלמות של התיאוריה הבסיסית.

חלק א: מבוא

- דוגמאות מורכבות של מודלים הסתברותיים בסיסים ללא מבנה מסוים העושים שימוש בהסתברות ותוחלת מותנה.
- דוגמאות הילוך אקראי פשוט באמצעות פונקציות יוצרות.
- חוק arcsin.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

- הגדרת זמני עצירה והתכונה המרקובית החזקה.
- ניתוח של תהליכי הסתעפות (דוגמא).
- ניתוח של הילוכים אקריים במידים גבוהים (2,3 ויותר) (דוגמא).
- ניתוח מעמיק של שרשראות מרקוב מחזוריות.
- ניתוח מטריציוני של שרשראות מרקוב, חלוקת מרחב מצבים, מציאת וקטורים עצמיים, מטריצות אי שליליות.
- ניתוח מוכלל של חישובים הקשורים למיון מצבים (זמן פגיעה, הסתברות ספיגה וכו').
- ניתוח מדויק של קריטריונים לחליפות, התמדה.
- ניתוח יציבות באמצעות פונקציות אנרגיה.
- מודלים של תורים בזמן בדיד.
- אופטימיזציה.
- ישום של תורת חידוש בדידה להוכחת משפטי התכנסות.
- היפוך זמן (Time Reversal).

חלק ג: תהליכי פואסון

- תהליכי נקודות.
- Shot Noise.

חלק ד: תהליכי קפיצה מרקובים (שרשראות מרקוב בזמן רציף)

- Uniformization.
- פתרון משוואות קולמוגורוב באמצעות e^Q.

חלק ה: תהליכי לידה-מוות, מערכות תורים אלמנטאריות ונושאים נוספים.

- מערכות תורים בעלי התפלגויות PhaseType.
- מערכות $M/G/1$ ו $G/M/1$.
- ניתוח חולף בסיסי של מערכות בסיסיות.
- רשתות Jackson.

פרק ו-3: ספרות מומלצת.

להלן רשימת ספרות ממוינת על פי מידת העומק. רמת הקורס נמצאת בין הספרות ברמה בסיסית לספרות ברמה בינונית.

ספרות ברמה בסיסית:

- Durrett, R., *Essentials of Stochastic Processes,* Springer, New York, 1999.
- Taylor, H. and Karlin, S., *Introduction to Stochastic Modeling,* Academic Press, New York, 1984.
- Ross, S., *Introduction to Probability Models,* Fourth Edition, Academic Press, Boston, 1989.
- Kulkarni V.G., *Modeling, Analysis, Design, and Control of Stochastic Systems,* Springer, New York, 1999.

ספרות ברמה בינונית:

- Cinlar E., *Introduction to Stochastic Processes,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- Ross, S. *Stochastic Processes,* Wiley, New York, 1983.

ספרות ברמה יותר מתקדמת:

- Karlin, S. and Taylor, H., *A First Course in Stochastic Processes*, Second Edition, Academic Press, New York, 1975.
- Norris, J.R., Markov Chains, Cambridge University Press, New York, 1997.
- Resnick, S., *Adventures in Stochastic Processes,* Birkhauser, Boston, 1992.

ספרות ברמה בסיסית בנושא תורת התורים:

- Kleinrock, L., *Queuing Systems, Vol. 1: Theory*. Wiley, New York 1975.
- Gross, D. and Harris, C., *Fundamentals of Queuing Theory,* Third Edition, Wiley, 1998.