

החוג לסטטיסטיקה, אוניברסיטת חיפה
מבוא לתהליכים סטוכסטיים 207.2250

בוחרן כחה, נובמבר 2008

מרצה: יוני נצרותי

מתרגלים: גיא גלעד, נעם פז.

שאלה 1:

מטייל ישראלי התחיל טיול אקראי בהודו, להלן הפרטים:

- בכל עיר המטייל שוהה זמן המתפלג אקספוננציאלית עם פרמטר קצב $\frac{1}{2}$.
- לאחר מכן ישנו סיכוי של $\frac{1}{10}$ שהמטייל יחזור לישראל או $\frac{9}{10}$ שהמטייל יעבור לעיר נוספת בהודו.
- זמן החזרה לישראל הוא משתנה מקרי המתפלג אחיד על התחום $[1, 2]$ וזמן המעבר לעיר נוספת בהודו הוא משתנה מקרי אקספוננציאלי עם פרמטר קצב 1.
- הנח שכל המשתנים המקריים הינם בלתי תלויים.
- כל הזמנים נתונים בימים.
- מה תוחלת מספר הימים עד אשר המטייל יחזור לישראל?

28(ד)

31.5 (ג)

31 (ב)

30.5 (א)

פתרון:

נסמן:

T - מס' הימים עד חזרה לישראל.

X_0 - זמן שהייה בעיר הראשונה.

X_1, X_2, \dots - סדרת זמני שהייה בערים נוספות.

Y_1, Y_2, \dots - סדרת זמני המעבר מעיר לעיר.

R - משך זמן החזרה מהעיר האחרונה לישראל.

N - מספר המעברים מעיר לעיר.

לפי נתוני השאלה: N מתפלג גיאומטרי ("סופר כישלונות") כאשר הצלחה מיוחסת ל – "חזרה לישראל"

וכישלון ל "מעבר לעיר נוספת בהודו". לכן $E[N] = \frac{9/10}{1/10} = 9$.

את הזמן הכולל עד חזרה לישראל ניתן לרשום כך: $T = X_0 + \sum_{i=1}^N (X_i + Y_i) + R$

נסמן $S = \sum_{i=1}^N (X_i + Y_i)$.

על פי נוסחת התוחלת של סכום מקרי מתקיים: $E[S] = E[N]E[X_1 + Y_1] = 9 \cdot (2 + 1) = 27$.

ולכן $E[T] = 2 + 27 + 1.5 = 30.5$.

דרך חלופית: $E[T] = (2 + 3 + (E[T] - 2)) \frac{9}{10} + (2 + 1.5) \frac{1}{10}$ (ע"י התניה בניסוי הברנולי הראשון)

וכאשר פותרים את המשוואה מקבלים את התוצאה.

שאלה 2:

יהי X משתנה מקרי בעל פונקציית מסת הסתברות:

$$P_X(i) = P(X=i) = \begin{cases} \frac{(i-1)!}{9!(i-10)!} \left(\frac{1}{2}\right)^i & i = 10, 11, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

מה היא הטענה הנכונה (יש אחת בלבד):

(א) X הוא משתנה מקרי חסר-זיכרון.

(ב) $P_X(i)$ זה הקונבולוציה של עשרה משתנים מקריים חסרי זיכרון.

$$X \sim \text{Bin}\left(9, \frac{1}{2}\right) \quad (\text{ג})$$

(ד) $P_X(i)$ אינה פונקציית מסת הסתברות בגלל ש - $\sum_{i=10}^{\infty} P_X(i) \neq 1$.

פתרון:

כזכור משתנה מקרי בינומי שלילי (סופר ניסיונות) מתאר את מספר ניסיונות הברנולי הדרושים לצורך השגת r הצלחות כאשר הסיכוי להצלחה הוא p . ידוע (וקל לראות) כי עבור משתנה מקרי זה:

$$P(i) = \begin{cases} \binom{i-1}{r-1} p^r (1-p)^{i-r} & i = r, r+1, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

אם כך רואים ש X מתפלג בינומי שלילי עם פרמטרים $r = 10$ ו- $p = \frac{1}{2}$.

אם כך תשובה ב' נכונה בגלל שמשנתנה מקרי זה הוא סכום של עשרה משתנים מקריים גיאומטריים (כל אחד מהם חסר זיכרון).

שאר התשובות אינן נכונות.