תיאור חלק ב:

חלק זה מציג שרשראות מרקוב בזמן בדיד. תחילה משפחה זו של תהליכים סטוכסטיים מוצגת ע"י הגדרה ולאחר מכן ע"י אוסף דוגמאות יישומיות. לאחר מכן מתבצעת אנליזה של תהליכים אלו, תחילה עבור ההתנהגות לטווח הזמן הקצר ע"י משוואות צ'פמן קולמוגורוב ומיון מצבים. לאחר מכן חישובים הקשורים לניתוח צעד ראשון מוצגים ולבסוף חישובים של הסתברויות גבוליות עבור שרשראות ארגודיות. בחלק זה המונח של ארגודיות של תהליך סטוכסטי מוגדר עבור שרשראות מרקוב ובנוסף משמש כמבוא למונח ארגודיות עבור תהליכים סטוכסטיים כללים. לאחר מכן מוצג אופן החישוב של הסתברויות גבולות ומוצג המשמעות של ההתפלגות הגבולית ע"י מספר דוגמאות.

פרק ב-1: הגדרת שרשרת מרקוב (זמן בדיד).

הגדרות עזר כלליות ודוגמא:

לפני שנגדיר במפורש מהי שרשרת מרקוב, נזכיר ונגדיר מספר מונחים חשובים:

1. קבוצה היא **סופית** אם קיים מספר $N \in \mathbb{N}$, כך שקיימת התאמה חד-חד ערכית בין הקבוצה לבין $\{1,2,\ldots,N\}$.
2. קבוצה היא **בת-מנייה** אם קיימת התאמה חד-חד ערכית מהקבוצה אל המספרים הטבעיים $\mathbb{N}$. להלן דוגמאות של מספר קבוצות בנות מנייה:
   a. $\mathbb{N}$
   b. $\mathbb{Z}$
   c. $\mathbb{Q}$
   d. הזוגיים.

   הערה: בהקשרים רבים נהוג להגדיר קבוצה בת-מנייה קבוצה שהיא או סופית או בת-מנייה כמוגדר לעיל.
3. **גרף מכוון ממושקל** הוא אוסף **צמתים** V (סופי או בן-מניה), אוסף **קשתות** E שהם זוגות סדורים מעל V (קבוצה חלקית ל VxV) ופונקצית משקל $P: E \to \mathbb{R}$.

   הערה: ביישומים שלנו ניתן להסתפק בטווח של הפונקציה להיות $[0,1)$. ולכן כאן נגדיר גרף מכוון ממושקל להיות כזה שבו פונקצית המשקל היא מהסוג $P: E \to (0,1]$

<u>דוגמא ב-0:</u>

נסתכל על הגרף:

V={1,2,3}

E={(1,1),(1,2),(2,3),(2,2),(3,2)}

P((1,1))=1/2

P((1,2))=1/2

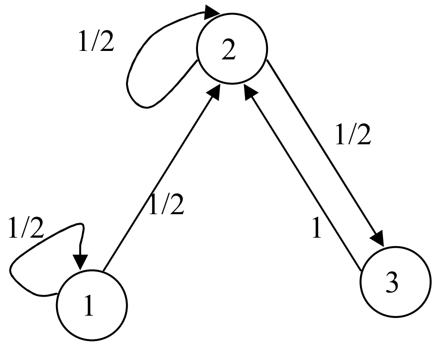
P((2,3))=1/2

P((2,2))=1/2

P((3,2))=1

ניתן לייצג גרפים מכוונים ממושקלים מהסוג המעניין אותנו בשלושה דרכים:

a. ע"י איור של הצמתים והקשתות כולל המשקלות.
   עבור הדוגמא לעיל זה הייצוג:



b. ע"י מטריצה P סופית בעלת מימד $|V|\times|V|$ או אינסופית כאשר האיבר $p_{i,j}$ של המטריצה (בשורה ה i ובעמודה ה j) הוא P((i,j)) (המשקל של הקשת (i,j)) במידה ו $(i,j)\in E$ או 0 אחרת (במידה והקשת אינה קיימת ב E).
עבור הדוגמא לעיל זה הייצוג:

$$P=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & 0\\ 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

c. פשוט ע"י פירוט של הפונקציה $P:E\to(0,1]$, כפי שמתבצע בדוגמא לעיל.

4. נקרא למטריצה P ממימד NxN, בעלת איברים $p_{i,j}$ (בשורה ה i ובעמודה ה j) **מטריצה סטוכסטית** אם סכום כל שורה הוא 1 (ז.א $\sum_{k=1}^{N} p_{i,k}=1$).
מטריצה זו למעשה מגדירה N התפלגויות בדידות (התפלגות עבור כל שורה).
5. באותו אופן כאשר המטריצה P היא אינסופית (אינסוף שורות ואינסוף עמודות), נאמר כי היא **מטריצה סטוכסטית** אם הטור של כל שורה הוא 1: (ז.א $\sum_{k=1}^{\infty} p_{i,k}=1$).

תיאור לא פורמאלי ומוטיבציה:

מהי שרשרת מרקוב?
נסתכל על הגרף בדוגמא לעיל. שרשרת מרקוב היא תהליך סטוכסטי בזמן בדיד בעל מרחב מצבים V. בדוגמא לעיל המצבים נקראים צמתים (בדוגמא יש 3 צמתים, המסומנים 2,1 ו- 3. לכן $V=\{1,2,3\}$). נסמן ב- n את הזמן (כאמור הזמן בדיד, כלומר $n=0,1,2,...$) ונניח שבכל נקודה בזמן התהליך נמצא בצומת אחת מסוימת. נניח גם שהתהליך נע מצומת לצומת (ממצב למצב) על גבי הקשתות שבגרף לאורך הזמן (התנועה נעשית בהתאם לכיוון הקשת). נסמן ב- X_n את הצומת שבה התהליך נמצא בזמן n (זהו "מצב התהליך" בזמן n).
לדוגמא אם $X_7=2$, אז נאמר שבזמן 7 התהליך נמצא במצב 2. נוכל לסמן את כל התהליך ב- $\{X_n,n\geq 0\}$. תהליך שנמצא בצומת X_n בזמן n, יעבור לצומת X_{n+1} בזמן n+1. בגרף שבדוגמא לעיל, אם התהליך נמצא ב- $X_7=2$, אז הוא יכול לעבור ל- $X_8=3$ אבל הוא גם יכול לעבור ל- $X_8=2$ (להישאר בצומת 2 ע"י תנועה על הלולאה).
הערך של התהליך בזמן $n+1$, דהיינו הערך X_{n+1} מוגרל מתוך קבוצת הצמתים שמהם ניתן לעבור מהצומת X_n (תת קבוצה של V). ההגרלה נעשית לפי פונקציית המשקל $P:E'\to(0,1]$ כאשר $E'=\{(i,j)\in E\,|\,i=X_n\}$. זאתי למעשה השורה במטריצה P המייצגת את הגרף המכוון הממושקל. קבלנו אם כך כי ריאליזציה של התהליך שקולה לטיול אקראי בגרף על פי פונקצית המשקל P.

ז"א, כאשר נמצאים בצומת 1, אז יש סיכוי של ½ להישאר בצומת זו גם בנקודת הזמן הבאה וסיכוי של ½ לעבור לצומת 2 (במקרה זה כבר לעולם לא נחזור לצומת 1). כאשר נמצאים בצומת 2, אז יש סיכוי של ½ להישאר בצומת 2 וסיכוי של ½ לעבור לצומת 3. וכאשר נמצאים בצומת 3 אז תמיד נעבור לצומת 2.

בנוסף דרוש גם להגדיר מהו ערך התהליך בזמן 0 (על איזה צומת נמצאים בזמן 0). ניתן להגדיר זאת גם ע"י התפלגות התחלתית כפי שנראה בהמשך.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

הערה: לא כל גרף מגדיר שרשרת מרקוב, רק כזה אשר מקיים את התנאי הנ"ל עבור כל צומת: סכום כל המשקלות של הקשתות היוצאות מהצומת הוא 1. ז"א רק גרף אשר ייצוגו כמטריצה הוא מטריצה סטוכסטית. מעכשיו והלאה נהייה מעוניינים רק בגרפים כאלו.

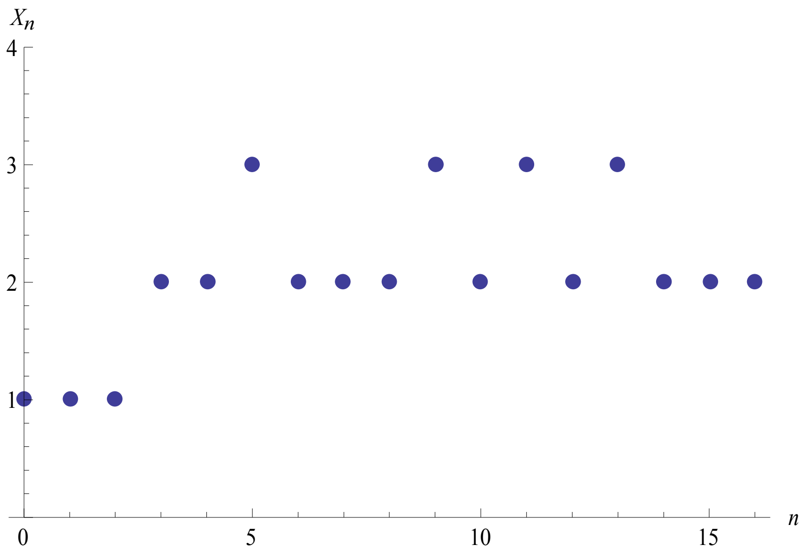
מודל מהסוג שמוצג בדוגמא ב-0 יכול לדוגמא להתאים לסיפור הבא:

שלושה בחורים, נמספרם (1,2,3), משחקים את המשחק הבא עם כדורסל וסל:
כל אחד זורק כדורים לסל כל עוד לא החטיא, לאחר החטאה מוותר על תורו.
בחור מס' 1 – מקבל הזדמנות יחידה, ז"א לאחר שהחטיא נותן את הכדור לבחור 2 ולא משחק יותר. סיכוי הקליעה שלו הוא ½.
בחור מס' 2 – מעביר את הכדור לבחור מס' 3 לאחר שהחטיא, גם סיכויי הקליעה שלו הם ½.
בחור מס' 3 – מעביר את הכדור לבחור מס' 2 לאחר שהחטיא, אבל סיכויי הקליעה שלו הם 0, ז"א הוא תמיד זורק ומייד מעביר את הכדור.

במידה ובחור מס' 1 הוא זה אשר מתחיל לזרוק, אז הוא יזרוק מספר של זריקות המתפלג Geom(1/2) (בממוצע 2). לאחר מכן הכדור יהיה או אצל מס' 2 או אצל מס' 3 כך שכל פעם שהכדור מגיע למס' 2 אז הוא מבצע מספר Geom(1/2) של זריקות וכל פעם שהכדור אצל מס' 3 אז הוא מבצע זריקה בודדת.

בחלק זה של הקורס ננתח מודלים מסוג זה ונלמד כיצד ניתן לענות על שאלות מעניינות לגבי מודלים מהסוג שהוצג לעיל (גם כאלו בעלי מרחב מצבים (צמתים) רב יותר וסבוך יותר).

להלן ריאליזציה לדוגמא:



נשים לב שלאחר שהתהליך "עזב" את מצב 1 הוא לעולם לא חוזר. בנוסף נראה שבכל פעם שהתהליך "מבקר" במצב 3 הוא עובר בצעד הבא למצב 2 בוודאות.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

הגדרה מדויקת והמשך דיון:

הגדרה:
התהליך $\{X_n, n \geq 0\}$ הוא **שרשרת מרקוב** בעל **התפלגות התחלתית** P_{X_0} **ומטריצת מעבר סטוכסטית** P עם **מרחב מצבים** S, סופי או אינסופי אם מתקיים:

1. $P_{X_0}(i) = P(X_0 = i)$
2. איברי המטריצה P מקיימים:

$$p_{i_n, i_{n+1}} = P(X_{n+1} = i_{n+1} \mid X_0 = i_0, \ldots, X_n = i_n) = P(X_1 = i_{n+1} \mid X_0 = i_n)$$

הערה: ההגדרה לעיל מגדירה **שרשרת מרקוב בזמן בדיד – הומוגנית בזמן. בקורס זה נקצר ונקרא לתהליך כזה "שרשרת מרקוב".**

ראשית כפי שאמרנו מדובר בתהליך בזמן בדיד ובעל מרחב מצבים שהוא או סופי או בן-מניה. את מרחב המצבים הספציפי ניתן להגדיר לכל מקרה פרטי (התפלגות התחלתית ומטריצת מעבר) אבל חשוב להבין כי קיימת התאמה בין כל מרחב מצבים סופי שנגדיר לבין קבוצה סופית מהצורה $\{1,2,\ldots,N\}$, ולכל מרחב מצבים בן-מנייה שנגדיר קיימת התאמה ל $\mathbb{N}$.

שנית, ההגדרה אומרת כי קיימת התפלגות התחלתית אשר קובעת את חוק ההסתברות של המשתנה X_0. בהרבה מהדוגמאות והתכונות של שרשראות מרקוב אשר נדון בהם אין משמעות רבה להתפלגות ההתחלתית ולכן לא נדון בה באופן מפורש. הרבה פעמים נניח כי התפלגות ההתחלתית היא מנוונת ע"י כך שנותנת מסת הסתברות 1 לערך כלשהו.

ועכשיו למהות ההגדרה (הדרישה השנייה): דרישה זו דורשת מההתפלגות של המשתנה של התהליך בזמן (n+1) להיות תלויה אך ורק במצב התהליך בזמן n. היא:

א) לא תלויה בערכי התהליך פרט לערך בזמן n – זוהי **התכונה המרקובית.** בכך המשמעות היא שעתיד התהליך אינו תלוי בעבר אלה רק בהווה.

ב) חוק ההסתברות אינו משתנה לאורך הזמן (**הומוגניות בזמן**).

ההגדרה של שרשרת מרקוב מסבירה מייד כיצד ניתן לסמלץ שרשרת מרקוב (ליצור ריאליזציה של שרשרת מרקוב). בשביל זה דרושה בסך הכול היכולת להגריל משתנים מקריים מההתפלגות P_{X_0} ומההתפלגויות המוגדרות בכל שורה במטריצת השרשרת.

פרק ב-2: דוגמאות.

פרק זה מכיל אוסף דוגמאות רב של שרשראות מרקוב. עבור כל דוגמא מוצג "סיפור" המתאים לדוגמא, ולאחר מכן מרחב המצבים ונתוני מטריצת הסתברויות המעבר. בנוסף עבור כל דוגמא, מוצגות שאלות הסתברותיות. הרבה מדוגמאות אלה יהיו בשימוש בפרקים בהמשך.

כדאי לבדוק שמטריצת המעבר היא סטוכסטית (סכום/טור כל שורה הוא 1) עבור כל דוגמא.

דוגמא ב-1 – מזג אוויר:

סיפור: נניח כי באביב בישראל מזג האוויר מתנהג בצורה מרקובות וישנם שלושה מצבים:
1 – יום מעונן כבד.
2 – יום מעונן חלקי.
3 – יום עם שמיים נקיים.

כמובן שבהיבט של מזג האוויר על פי מרחב המצבים הדל אשר תואר לעיל, ההנחה המרקובית כנראה ואינה תואמת את המציאות. הרי סביר להניח כי מזג האוויר מחר אינו רק תלוי במזג האוויר היום אלה תלוי גם בימים הקודמים (תלות יחסית חזקה לפחות בשבוע האחרון).

מרחב המצבים: $\{1,2,3\}$ מתאר את מצב מזג האוויר.

הסתברות מעבר:

$$P=\left(p_{ij}\right)=\begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית 1: בהינתן שנמצאים במצב 1, מה ההסברות להיות במצב 3 בעוד 5 ימים?
שאלה הסתברותית 2: לאחר הרבה ימים, מה ההסתברות שהמצב היה 3?

הערה: ניתן ליצור מודל יותר מציאותי באופן הבא. נגדיר את מרחב המצבים להיות:

$$\begin{aligned}&\{(1,1),(1,2),(1,3),\\&(2,1),(2,2),(2,3),\\&(3,1),(3,2),(3,3)\}\end{aligned}$$

לקחנו את מרחב המצבים המקורי V ויצרנו מרחב מצבים חדש שהוא $V\times V$ (במידה ולא ברור כעת אז נדון בהמשך במשמעות המכפלה הקרטזית $\times$). עכשיו נגיד שכל מצב מהסוג (a,b) אומר כי היום מזג האוויר הוא b ואתמול היה a. מטריצת המעבר תהייה כמובן ממימד $3^2=9$.
נבחין כי בכל שורה, לכל היותר שלושה ערכים מתוך התשעה יהיו חיוביים ממש. זאת בגלל שמעבר ממצב (a,b) חייב להיות למעבר (b,c) כאשר $c\in\{1,2,3\}$.
עקרונית באופן שכזה ניתן להכניס "יותר היסטוריה" לתוך המודל ע"י הוספת יותר ויותר ימים אחורה.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא ב-2– *אוסף משתנים בדידים* i.i.d.:

סיפור: נניח כי $\{X_n, n \geq 0\}$ הינם משתנים מקריים בדידים i.i.d.
ברור כי אוסף המשתנים המקריים הוא שרשרת מרקוב.
מרחב המצבים: $\{z \in \mathbb{Z} : P_X(z) > 0\}$ (התומך של המשתנה המקרי).
הסתברות מעבר: $p_{ij} = P_X(j)$ (זהה כמובן לכל i).

הערה: תהליך ברנולי i.i.d. הוא מקרה פרטי כמובן.

דוגמא ב-3– *שרשרת דו-מצבית:*

סיפור: מערכת מסוימת יכולה להימצא באחד משני מצבים, מצב 0 ומצב 1. כאשר ההסתברות לעזוב את מצב 0 (למצב 1) היא a. וההסתברות לעזוב את מצב 1 (למצב 0) היא b.
הערה: זהו לא תהליך ברנולי i.i.d.
מרחב המצבים: $\{0,1\}$.
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: בהינתן שהשרשרת במצב 1, מה תוחלת הזמן עד שתעבור למצב בפעם הראשונה 0?

דוגמא ב-4– *שרשרת מרקוב דטרמיניסטית מחזורית:*

סיפור: גם תהליכים דטרמיניסטים ניתן לתאר כשרשראות מרקוב. נניח שקיימת מערכת דטרמיניסטית בעלת מרחב מצבים סופי אשר מדלגת בין מצב למצב באופן דטרמיניסטי. לדוגמא: תוכנית מחשב אשר מריצה לולאה והתנהגות הלולאה אינה תלויה בקלט.
מרחב המצבים: $\{0,...,N-1\}$.
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

הערה: ניתן תמיד לבצע סידור המצבים מחדש בסדר שנוח לנו.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא ב-5– תהליך ספירה ברנולי:

סיפור: כפי שנלמד בפרק של תהליכי ספירה ברנולי, סופר את מספר ההצלחות עד זמן n.
מרחב המצבים: $\mathbb{N}$. מתאר כמה הצלחות היו עד כה (כאן $\mathbb{N}$ כולל את 0).
הסתברות מעבר:

$$P=\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & q & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & q & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא ב-6– מהלך מקרי פשוט (Simple Random Walk):

סיפור: אדם יושב על ספסל מול כביש דו-כווני ומסתכל על המכוניות החולפות. האדם שומר מונה (בראש או על דף נייר). כאשר מכונית חולפת לכיוון אחד הוא מעלה את ערך המונה באחד, כאשר מכונית חולפת לכוון השני הוא מוריד את ערך המונה באחד. כך לדוגמא, עם ערך המונה היה 0, וחלפו 20 מכוניות עוקבות לכוון אחד אז ערך המונה יהיה 20. ההסתברות שמכונית תעבור לכוון אחד היא p (וההסתברות שתעבור לכוון השני היא $q=1-p$). סדרת הכוונים של המכוניות הינה i.i.d.
מרחב המצבים: $\mathbb{Z}$.
הסתברות מעבר:

$$P=\begin{pmatrix} \ddots & p & \vdots & \vdots & \cdots \\ q & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & q & 0 & p & \cdots \\ \vdots & \vdots & q & 0 & p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: בהינתן שערך המונה הוא 0. מה הסיכוי שערך המונה יחזור למצב 0 שוב?

דוגמא ב-7– מודל המהמר (Gamblers Ruin):
סיפור: מהמר משחק את המשחק הבא: בכל שלב הוא יכול להרוויח שקל בהסתברות p ולהפסיד בהסתברות q=1-p. הוא מפסיק לשחק באחד משני מקרים: כספו נגמר (מסיים בהפסד) או שיש ברשותו N שקלים (מסיים ברווח). המצבים בשרשרת מרקוב זו יתארו את הכסף שברשות המהמר.
מרחב המצבים: $\{0,\dots,N\}$, מתאר את כמות הכסף ברשות המהמר.
הסתברות מעבר בצורה אלגברית:

$$p_{i,j}=\begin{cases} p & j=i+1 \\ q & j=i-1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$ עבור $i\in\{1,\dots,N-1\}$.

$p_{ij}=I_{\{i\}}(j)$ עבור $i\in\{0,N\}$.

הסתברות מעבר בצורה מטריציונית:

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: בהינתן ערך התחלתי כלשהו (של התהליך) מה הסיכוי שהמהמר יסיים ברווח, מה הסיכוי שיסיים בהפסד.

דוגמא ב-8– שרשרת Ehrenfest:

סיפור: ברשותנו שני כדים (ימני ושמאלי) ו N כדורים ממוספרים {1,…,N} אשר נמצאים במיכלים (חלקם בכד הימיני וחלקם בכד השמאלי). בכל רגע אנו בוחרים מספר באקראי (על פי התפלגות אחידה בדידה על {1,…,N}). את הכדור ועליו המספר אשר בחרנו אנו מעבירים למיכל השני (במידה ונמצא בימני אז מעבירים לשמאלי ובמידה ונמצא בשמאלי אז מעבירים לימני). מצב התהליך מתאר את מספר הכדורים בכד הימיני.

מרחב המצבים: $\{0,...,N\}$.

הסתברות מעבר:

להלן ערכי p_{ij}:

עבור i=0: $p_{01}=1$

עבור i=N: $p_{N,N-1}=1$

עבור $i\in\{1,...,N-1\}$:

$$p_{ij}=\begin{cases} \dfrac{i}{N} & j=i-1 \\ \dfrac{N-i}{N} & j=i+1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

נשים לב שהרישום לעיל בעצם גם נכון עבור $i\in\{0,1,...,N-1,N\}$.

כך לדוגמא עבור N=5 נקבל:

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{5} & 0 & \frac{2}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית: לאחר שהתהליך הזה רץ להרבה זמן, מה פילוג הכדורים במיכל הראשון?

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא ב-9– שרשרת מלאי (Inventory Model):

סיפור: מלאי הרבה פעמים מנוהל בשיטת ה"מסור – (s,S)" בזמן בדיד.
יהי Y כמות הפריטים במלאי לאחר הביקוש באותה יחידה זמן (נניח יום).
חוק המסור– (s,S) אומר: **בסוף כל יום** מתבצע **רענון מלאי** כדלקמן:

א) במידה ו- $Y \le s$ אז מובאים פריטים מבחוץ עד לרמה של S.

ב) אחרת לא מובאים פרטים.

נאמר שהביקוש הוא אוסף משתנים מקריים בדידים אי-שלילים .i.i.d $\{D_n, n \ge 1\}$.
נתאר את שרשרת המרקוב $\{X_n, n \ge 0\}$, המתארת את רמת המלאי בסוף כל יום **לפני** רענון המלאי.
מרחב המצבים של $\{X_n, n \ge 0\}$ הוא $\{0,1,...,s,s+1,...,S\}$.
רואים ששרשרת המרקוב $\{X_n, n \ge 0\}$, תלויה ב $\{D_n, n \ge 1\}$. להלן הפרטים:

אז מה קורה כאן? נרשום את רמת המלאי לפני הרענון ביום n+1 (X_{n+1}) כפונקציה של רמת המלאי לפני הרענון ביום הקודם (X_n) והביקוש ביום ה n+1:

- במידה וביום n, רמת המלאי לא ירדה מתחת לכמות s אז: $X_{n+1} = (X_n - D_{n+1})^+$.
- במידה וביום n, רמת המלאי ירדה מתחת לכמות s אז: $X_{n+1} = (S - D_{n+1})^+$.

הערה: נגדיר את הסימון/פעולה : $(a)^+ = \max(a,0)$.

אם כך מקבלים:

$$X_{n+1} = \begin{cases} (X_n - D_{n+1})^+ & s < X_n \le S \\ (S - D_{n+1})^+ & X_n \le s \end{cases}$$

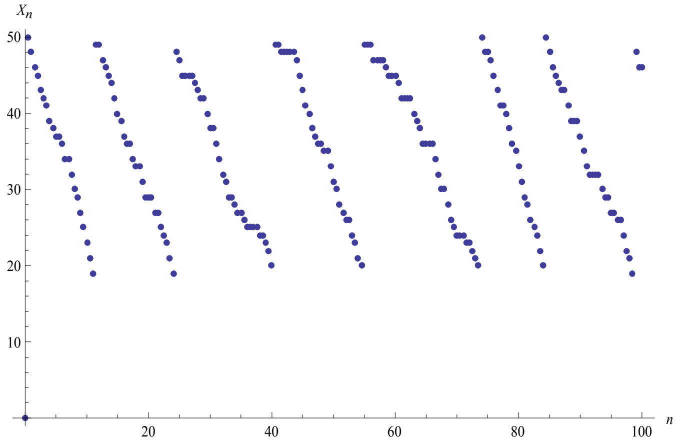
אז לדוגמא עבור $s=1, S=5$ ופילוג של D: $P_{D_n}(k) = p_k$ מתקבלת מטריצת המעבר הבאה:

$$P = \begin{pmatrix} \sum_{k=5}^{\infty} p_k & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ \sum_{k=5}^{\infty} p_k & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \\ \sum_{k=2}^{\infty} p_k & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 \\ \sum_{k=3}^{\infty} p_k & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 \\ \sum_{k=4}^{\infty} p_k & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 \\ \sum_{k=5}^{\infty} p_k & p_4 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 \end{pmatrix}$$

הערה: דוגמא זו (ועוד מספר דוגמאות נוספות) מתוארת ע"י סדרת משתנים מקריים .i.i.d (Z) ה"מזינה" את התהליך ויוצרת משוואה מהסוג $X_{n+1} = f(X_n, Z_{n+1})$ אשר מתארת את ערך התהליך המרקובי בזמן n+1 כפונקציה של ערך התהליך בזמן n והערך האקראי Z. (בדוגמא זו Z הוא הביקוש D).

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

להלן דוגמא של ריאליזציה עבור $s=20, S=50$ וביקוש המפולג אחיד בדיד על התחום $\{0,1,2\}$:



וזאת דוגמא כאשר הביקוש מפולג אחיד בדיד על התחום: $\{0,...,20\}$:

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא ב-10– תהליכי הסתעפות (Branching Processes):

סיפור: נדמיין אוכלוסיה של פריטים אשר בה כל פריט מהדור ה n מוליד מספר אקראי של פריטים לדור ה n+1 ומת. כאשר המספר האקראי הזה הוא מפילוג i.i.d. כלשהו. מצב התהליך מתאר כמה פריטים חיים בדור ה n. ברור כי כאשר המצב מגיע ל 0 אז האוכלוסייה נכחדת. נניח כי פילוג מספר הפריטים אשר כל פריט מוליד הוא $P_Z(k) = p_k$.

מרחב המצבים: $\{0,1,2,3,...\}$

הסתברות מעבר:

$p_{ij} = P(Z_1 + ... + Z_i = j)$ עבור $i > 0$

$p_{0j} = I_{\{0\}}(j)$ (עבור i=0). (אפס הוא מצב "סופג").

לדוגמא: נניח כי הפילוג של מספר הנולדים הוא $Z \sim Bin(2,p)$ i.i.d. (ז"א כל פריט מוליד 0 או 1 או 2 פריטים נוספים). אזי ידוע כי $Z_1 + ... + Z_i \sim Bin(2i, p)$ ואז מטריצת המעבר נראית כך:

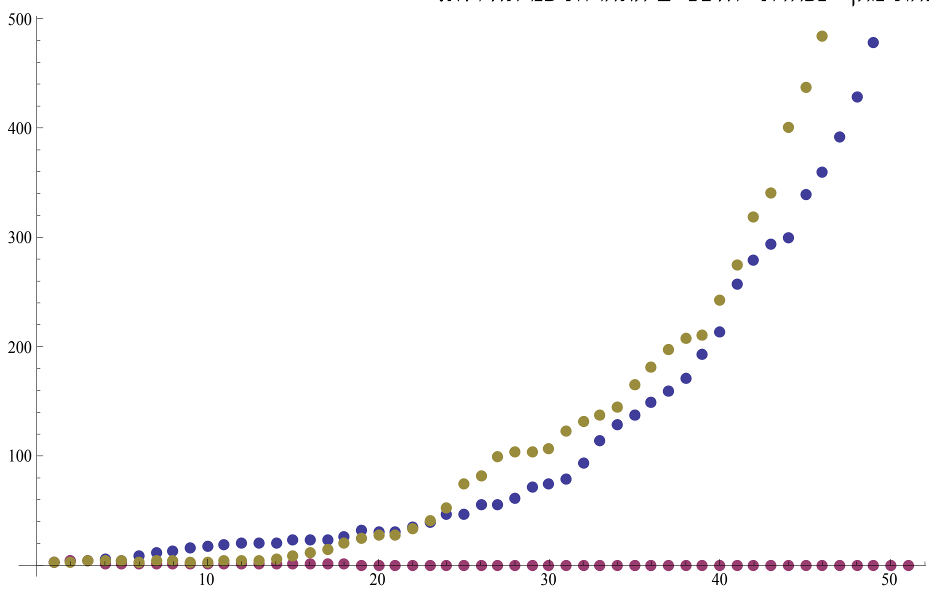
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ {b_0}^2 & {b_1}^2 & {b_2}^2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ {b_0}^4 & {b_1}^4 & {b_2}^4 & {b_3}^4 & {b_4}^4 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

כאשר נסמן: $k = 0,...,n$ $\quad {b_k}^n = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$:

שאלה הסתברותית: מה הסיכוי להיכחד (להגיע למצב 0)?

להלן דוגמא של 3 ריאליזציות כאשר $p = 0.55$.

רואים שאחת מהן "נכחדת" והשניים האחרות כנראה ולא.



חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא ב-11 - סכום מצטבר מודולו:

יהיו $\{Y_n, n\geq 1\}$ משתנים מקריים בעלי תומך $\{0,1,2,3,4\}$ ופו' מסת הסתברות $P_Y(i)$. נסמן $P_Y(i)=p_i$

נגדיר $X_0=0$

$X_{n+1}=(X_n+Y_{n+1})(\text{mod } 5)$ (כאשר הפעולה mod היא שארית החלוקה בחמש).

מרחב המצבים: $\{0,1,2,3,4\}$

הסתברות מעבר:

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ p_4 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 \\ p_3 & p_4 & p_0 & p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 & p_4 & p_0 & p_1 \\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_0 \end{pmatrix}$$

דוגמא: ב-12 שארית אורך החיים:

סיפור: נדמיין רכיב בתוך מכשיר בשימוש תמידי. כאשר הרכיב מתקלקל הוא מוחלף מיידית ע"י רכיב זהה בידי טכנאי. $\{Z_1, Z_2, ...\}$ היא סדרת אורכי החיים של רכיבים (זמן מתחילת השימוש ועד קלקול הרכיב), זאתי סדרת משתנים מקריים i.i.d בדידים, חיוביים ממש מההתפלגות $P_Z(\cdot)$.

n הוא אינדקס שסופר את יחידות הזמן מרגע התקנת הרכיב הראשון. $\{X_n, n\geq 0\}$ הוא תהליך סטוכסטי המציין את אורך החיים שנותר לרכיב עד לקלקול.

מרחב המצבים: התומך של $P_Z(.)$.

הסתברות מעבר:

ניתן לתאר את התהליך X באופן הבא:

$$X_{n+1}=\begin{cases} X_n-1 & X_n\geq 1 \\ Z_{n+1}-1 & X_n=0 \end{cases}$$

(כאשר $\{Z_n, n\geq 1\}$ היא סדרת אורכי החיים של הרכיבים אשר בשימוש.)

ומכן מתקבלת מטריצת מעבר:

$$P=\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא: ב-13

סיפור: אין כאן סיפור, נתון פשוט המודל.
מרחב המצבים: $\{1,2,3,4,5\}$
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

שאלה הסתברותית 1: בהינתן שהשרשרת במצב 2, באיזה מצבים היא יכולה להימצא בעתיד?
שאלה הסתברותית 1: בהינתן שהשרשרת במצב 5, מה תוחלת הזמן שהיא תישאר במצב זה עד אשר תגיע למצב 1?

דוגמא: ב-14

סיפור: אין כאן סיפור, נתון פשוט המודל.
מרחב המצבים: $\{1,2,3,4,5,6,7\}$
הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} .3 & 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 \\ .1 & .2 & .3 & .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ .6 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא: ב-15 הילוך אקראי מוחזר (Reflecting Random Walk):

סיפור: נדמיין רכיב אשר נע על מרחב המצבים $\{0,1,2,3,....\}$ על פי החוק הבא: הרכיב לוקח צעד לימין בהסתברות p ומנסה לקחת צעד שמאלה בהסתברות 1-p. במידה והרכיב במצב 0 אז כאשר מנסה לקחת צעד שמאלה הוא נשאר במקום (לא ניתן לזוז שמאלה לערך 1-).

מרחב המצבים: $\{0,1,2,3,....\}$

הסתברות מעבר:

$p_{i,i+1} = p$ עבור $i \geq 0$

$p_{i,i-1} = 1-p$ עבור $i \geq 1$

$p_{0,0} = 1-p$

או:

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

דוגמא: ב-16 שרשרת דטרמיניסטית למחצה:

סיפור: לפעמים השרשרת "יוצאת לטיול דטרמיניסטי" מהאפס לשליליים ולפעמים לחיובים.

מרחב המצבים: $\{-2,-1,0,1,2,3\}$

הסתברות מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

פרק ב-3: נוסחת השרשרת ונוסחאות צ'פמן קולמוגורוב.

אז עד כה הגדרנו מהי שרשרת מרקוב וראינו אוסף דוגמאות עשיר של שרשראות מרקוב. אבל עדיין לא חקרנו את התכונות של תהליכים אלו. אם כן נתחיל בחקר משעשע זה בפרק הזה.

<u>ההסתברות של מסלול סופי של התהליך:</u>

להלן נוסחת השרשרת של שרשראות מרקוב:

$$P(X_n=i_n, X_{n-1}=i_{n-1},...., X_1=i_1, X_0=i_0)=P(X_0=i_0)\,p_{i_0,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1},i_n}$$

<u>הוכחה:</u>

$$P(\underbrace{X_n=i_n}, \underbrace{X_{n-1}=i_{n-1},...., X_1=i_1, X_0=i_0})=$$

$$=P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-1}=i_{n-2},...., X_1=i_1, X_0=i_0)P(X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-1}=i_{n-2},...., X_1=i_1, X_0=i_0)$$
$$=P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1})P(\underbrace{X_{n-1}=i_{n-1}}, \underbrace{X_{n-1}=i_{n-2},..., X_1=i_1, X_0=i_0})$$

$$=\ldots \qquad\qquad \ldots=$$
$$=P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1})P(X_{n-1}=i_{n-1} \mid X_{n-2}=i_{n-2})\ldots P(X_1=i_1 \mid X_0=i_0)P(X_0=i_0)$$
$$=P(X_0=i_0)\cdot p_{i_0,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1},i_n}$$

מ.ש.ל.

נוסחה זו מגדירה את ההתפלגות המשותפת של $X_0, X_1,..., X_n$.

לדוגמא עבור השרשרת הדו-מצבית (דוגמא ב-3) מתקבלת ההתפלגות המשותפת הבא (עבור שלושת הערכים הראשונים של התהליך):

x_0	x_1	x_2	$P(X_0=x_0, X_1=x_1, X_2=x_2)$
0	0	0	$P_{X_0}(0)(1-a)^2$
0	0	1	$P_{X_0}(0)(1-a)a$
0	1	0	$P_{X_0}(0)ab$
0	1	1	$P_{X_0}(0)a(1-a)$
1	0	0	$P_{X_0}(1)b(1-a)$
1	0	1	$P_{X_0}(1)ba$
1	1	0	$P_{X_0}(1)(1-b)b$
1	1	1	$P_{X_0}(1)(1-b)^2$

נניח והיינו יודעים מהי $P_{X_m}(.)$ (ההתפלגות השולית של התהליך בזמן m) אז ניתן היה לחשב את ההתפלגות המשותפת של $X_m, X_{m+1},..., X_{m+n}$ באותו אופן:

$$P(X_{m+n}=i_n, X_{m+(n-1)}=i_{n-1},...., X_{m+1}=i_1, X_m=i_0)=$$
$$P(X_m=i_0)\cdot p_{i_0,i_1}\cdot p_{i_1,i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_{n-1},i_n}$$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

מטריצת המעבר ב – 2 צעדים:

הגדרה:

ההסתברות $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$ היא **הסתברות המעבר ב n צעדים** עבור $n \geq 0$.

נסמן את המטריצה אשר איבריה הם הסתברויות אלו ב $P^{(n)}$ ונקרא למטריצה זו **מטריצת המעבר ב n צעדים**.

הערה: נשים לב כי על פי ההגדרה $p_{ij}^{(0)} = I_{\{j\}}(i)$ ולכן $P^{(0)} = I$ (מטריצת היחידה). ו - $P^{(1)} = P$.

כעת נחשב את $p_{ij}^{(2)} = P(X_2 = j \mid X_0 = i)$ (אלו איברי המטריצה $P^{(2)}$)..

$$\begin{aligned} p_{ij}^{(2)} &= \sum_{k \in S} P(X_2 = j, X_1 = k \mid X_0 = i) \\ &= \sum_{k \in S} \frac{P(X_2 = j, X_1 = k, X_0 = i)}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in S} \frac{P(X_0 = i) p_{ik} p_{kj}}{P(X_0 = i)} \\ &= \sum_{k \in S} p_{ik} p_{kj} \end{aligned}$$

תזכורת: עבור מטריצות A,B שתיהן בעלות מימד NxN. האיבר ה i,j של מטריצת המכפלה AB הוא: $\sum_{k=1}^{N} a_{ik} b_{kj}$.

קבלנו אם כך כי $P^{(2)} = PP = P^2$. ז"א הכפלה של מטריצה סטוכסטית בעצמה (או העלאה בריבוע של המטריצה).

נוסחאות צ'פמן קולמוגורוב (Chapman-Kolmogorov):

ברצוננו להראות $P^{(n)} = P^n$. לצורך כך נראה תחילה תוצאה קצת יותר כללית:

משפט (נוסחאות צ'פמן קולמוגורוב Chapman-Kolmogorov): $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$

או בכתיבה מטריציונית $P^{(n+m)} = P^{(n)} P^{(m)}$.

הוכחה:

ראשית נבחין בקשר הבא:

$$P(X_{n+m}=j,X_m=k\mid X_0=i)=\frac{P(X_{n+m}=j,X_m=k,X_0=i)}{P(X_0=i)}$$

$$=\frac{P(X_{n+m}=j,X_m=k,X_0=i)}{P(X_0=i)}\frac{P(X_m=k,X_0=i)}{P(X_m=k,X_0=i)}$$

$$=\frac{P(X_{n+m}=j,X_m=k,X_0=i)}{P(X_m=k,X_0=i)}\frac{P(X_m=k,X_0=i)}{P(X_0=i)}$$

$$=P(X_{n+m}=j\mid X_m=k,X_0=i)P(X_m=k\mid X_0=i)$$

$$=P(X_{n+m}=j\mid X_m=k)P(X_m=k\mid X_0=i)=p_{kj}{}^n p_{ik}{}^m$$

ולכן

$$P(X_{n+m}=j\mid X_0=i)=\sum_{k\in S}P(X_{n+m}=j,X_m=k\mid X_0=i)=\sum_{k\in S}p_{kj}{}^n p_{ik}{}^m$$

מ.ש.ל

עכשיו רואים באינדוקציה את התכונה $P^{(n)}=P^n$:

הוכחה:

בסיס: $P^{(1)}=P=P^1$

צעד: נניח $P^{(n)}=P^n$. לפי צ'פמן קולמוגורוב מתקיים $P^{(n+1)}=P^{(n)}P^{(1)}$ ולכן $P^{(n+1)}=P^nP^1=P^{n+1}$.

מ.ש.ל

הפילוג השולי של התהליך בזמן n:

קבלנו אם כך דרך לחשב את $P(X_n=j)$ של התהליך. זוהי התפלגות ערכי התהליך בזמן n (ההתפלגות השולית של התהליך בזמן n).

$$P(X_n=j)=\sum_{k\in S}P(X_n=j\mid X_0=k)P(X_0=k)=\sum_{k\in S}p_{kj}{}^n P_{X_0}(k)$$

ניתן לכתוב זאת גם כך:

$P(X_n=j)=\sum_{i\in S}P_{X_0}(i)p_{ij}{}^n$. כך שאם נתייחס אל ההתפלגות ההתחלתית כאל וקטור שורה P_{X_0} ואל התפלגות X_n גם כאל וקטור שורה P_{X_n} אז קבלנו:

$$P_{X_n}=P_{X_0}P^n.$$

ועבור המקרה בו ההתפלגות ההתחלתית הינה מנוונת, ז"א עבור ערך l מסוים $P(X_0=l)=1$ אז P_{X_n} הוא השורה ה l במטריצה P^n.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא:
בדוגמא ב-3 הוצגה השרשרת הדו-מצבית, בעלת מטריצת מעבר:

$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$ ומצבים $\{0,1\}$.

עבור דוגמא זו ניתן לקבל ביטוי פשוט עבור P^n (עבור הרבה דוגמאות אחרות אין דרך "נקייה" לייצג את P^n והדרך היחידה לקבל מטריצות אלו היא באמצעות חישובים ישירים של הכפלת מטריצות).

כמקובל נסמן ב $P_{X_n}(.)$ את הפילוג השולי של התהליך בזמן n. אם כך:

$$\begin{aligned}
P_{X_{n+1}}(0)&=P(X_{n+1}=0)=P(X_n=0,X_{n+1}=0)+P(X_n=1,X_{n+1}=0)\\
&=P(X_n=0)P(X_{n+1}=0\mid X_n=0)+P(X_n=1)P(X_{n+1}0\mid X_n=1)\\
&=P_{X_n}(0)(1-a)+P_{X_n}(1)b\\
&=P_{X_n}(0)(1-a)+(1-P_{X_n}(0))b\\
&=b+(1-a-b)P_{X_n}(0)
\end{aligned}$$

קיבלנו נוסחה עבור $P_{X_{n+1}}(0)$ במונחי $P_{X_n}(0)$. אם כך בהינתן תנאי ההתחלה $P_{X_0}(0)$ ניתן לחשב:

$P_{X_1}(0)=b+(1-a-b)P_{X_0}(0)$.

$$P_{X_2}(0)=b+(1-a-b)P_{X_1}(0)=b+(1-a-b)(b+(1-a-b)P_{X_0}(0))=b+(1-a-b)b+(1-a-b)^2P_{X_0}(0)$$

כך עבור n כלשהו נקבל:

$$P_{X_n}(0)=b\sum_{j=0}^{n-1}(1-a-b)^j+(1-a-b)^nP_{X_0}(0)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
P_{X_n}(0)&=b\frac{1-(1-a-b)^{n-1+1}}{1-(1-a-b)}+(1-a-b)^nP_{X_0}(0)\\
&=\frac{b}{a+b}(1-(1-a-b)^n)+(1-a-b)^nP_{X_0}(0)\\
&=(1-a-b)^n(P_{X_0}(0)-\frac{b}{a+b})+\frac{b}{a+b}
\end{aligned}$$

מכיוון שהשרשרת היא דו-מצבית:

$$P_{X_n}(1)=1-P_{X_n}(0)=1-\left[(1-a-b)^n\left(P_{X_0}(0)-\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{b}{a+b}\right)\right]=(1-a-b)^n\left(P_{x_0}(1)-\frac{a}{a+b}\right)+\frac{a}{a+b}$$

נשים לב שבגלל סימטריות קיבלנו ביטויים סימטריים ל- $P_{X_n}(0)$ ול - $P_{X_n}(1)$.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

קבלנו אם כך את ההתפלגות הגבולית בזמן n כפונקציה של ההתפלגות ההתחלתית (הגבולית בזמן 0). מעניין לראות כי במידה ו a ו b אינם 0 או 1, אז $|1-a-b|<1$ ואז כאשר n שואף לאינסוף מקבלים:

$\lim_{n\to\infty} P_{X_n} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$. בפרקים הבאים נראה כי זאת נקראת ההתפלגות הגבולית של התהליך. בנוסף קל לראות כי אם בוחרים את P_{X_0} להיות ההתפלגות הגבולית של התהליך אזי $P_{X_n} = (\frac{b}{a+b}, \frac{a}{a+b})$ לכל n!!!

נחשב כעת את P^n.

נתחיל ב $p_{00}{}^n$ (ההסתברות לעבור ממצב 0 למצב 0 לאחר n צעדים). לצורך חישוב זה נניח כי $P_{X_0}(0)=1$, ז"א התהליך מתחיל במצב 0 בוודאות. אם כך:

$$P_{X_n}(0) = p_{00}{}^n P_{X_0}(0) = p_{00}{}^n$$

ולפי החישוב לעיל:

$$p_{00}{}^n = (1-a-b)^n(1-\frac{b}{a+b}) + \frac{b}{a+b} = (1-a-b)^n \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}$$

נמשיך ל $p_{01}{}^n$:

$$p_{01}{}^n = 1 - p_{00}{}^n = 1 - ((1-a-b)^n \frac{a}{a+b} + \frac{b}{a+b}) = \frac{a}{a+b} - (1-a-b)^n \frac{a}{a+b}$$

באופן סימטרי ניתן לקבל כי:

$$p_{11}{}^n = (1-a-b)^n \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b}$$

$$p_{10}{}^n = \frac{b}{a+b} - (1-a-b)^n \frac{b}{a+b}$$

קבלנו אם כך את כל איברי P^n וניתן לסכם זאת באופן הבא:

$$P^n = \frac{1}{a+b}\left(\begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix} + (1-a-b)^n \begin{pmatrix} a & -a \\ -b & b \end{pmatrix}\right)$$

הערה: הפיתוח של נוסחה זאת הוא יחסית מייגע, לעומת זאת, קל להוכיח את נכונות הנוסחא באינדוקציה.