פרק ב-4: מיון מצבים, מצבים חולפים ומצבים מתמידים.

הגדרות עזר כלליות-יחסי שקילות:

נתחיל בחזרה על מספר מושגים בסיסיים מתורת הקבוצות.

1. בהינתן קבוצה V, נסמן ע"י $V \times V$ את **המכפלה הקרטזית** של הקבוצה עם עצמה. זהו אוסף כל הזוגות הסדורים מהסוג $a \in V, b \in V \quad (a,b)$.
   a. דוגמא 1: $V=\{1,2,3\}$ אז
   $$V \times V = \{ \begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3), \\ (2,1),(2,2),(2,3), \\ (3,1),(3,2),(3,3) \quad \} \end{array}$$
   b. דוגמא 2: $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. זהו אוסף הוקטורים במישור.
   c. דוגמא 3: בהינתן V צמתים של גרף, אז אם ניקח את קשתות הגרף E להיות $E = V \times V$ אז נאמר כי הגרף **מלא** (ישנה קשת בין כל צומת לכל צומת).
2. **רלציה/יחס** R על קבוצה V היא קבוצה חלקית של $V \times V$. $R \subseteq V \times V$. ז"א זהו אוסף של זוגות סדורים מהסוג $a \in V, b \in V \quad (a,b)$.
   a. דוגמא 1: אם $V = \mathbb{N}$ אזי היחס $R_{\leq}$ (קטן שווה), הוא אוסף הזוגות הסדורים מהסוג $a \in V, b \in V \quad (a,b)$, כך ש $a \leq b$. למשל $(2,14) \in R_{\leq}$ אבל $(5,4) \notin R_{\leq}$.
   b. דוגמא 2: בגרף מכוון ממושקל (כפי שהוצג בפרק הקודם, E קבוצת הקשתות היא רלציה מעל V, קבוצת הצמתים. (הקשתות מגדירות "יחס" בין הצמתים).
3. **רלציה/יחס שקילות**, היא רלציה E על V אשר מקיימת את שלושת התנאים הבאים:
   i. **רפלקסיביות** – לכל $a \in V$ מתקיים כי $(a,a) \in E$
   ii. **סימטריות** - אם $(a,b) \in E$ אז $(b,a) \in E$.
   iii. **טרנזטיביות** – אם $(a,k) \in E$ וגם $(k,b) \in E$ אז $(a,b) \in E$.
   a. דוגמא 1: יחס השוויון בין מספרים הוא יחס שקילות.
   b. דוגמא 2: תהי V קבוצת הסטודנטים בכיתה. E תהייה אוסף כל הזוגות הסדורים של הסטודנטים בעלי אותו שם: $E = \{(a,b): a,b \in V, Name(a) = Name(b)\}$.
   c. דוגמא 3: יחס גדול/שווה ($\leq$) בין מספרים אינו רלצית שקילות (אינו מקיים סימטריות).
4. בהינתן רלצית שקילות E מעל V, **מחלקת שקילות** של איבר a ב V (נסמן $[a]$). היא אוסף כל האיברים ב V, b, כך ש $(a,b) \in E$. ז"א $[a] = \{b \in V : (a,b) \in E\}$.

תזכורת: **חלוקה** של קבוצה S היא קבוצה של תת קבוצות זרות ולא ריקות אשר איחודן הוא הקבוצה S.
לדוגמא: $S = \{1,2,3,4,5\}$ אז $\{\{2,3\},\{4\},\{1,5\}\}$ היא חלוקה של S.

להלן תוצאה חשובה מתורת הקבוצות המקשרת בין רלציה/יחס שקילות לחלוקות:

<u>משפט:</u>

נניח שנתונה קבוצה V (אצלנו זאת תהייה קבוצת המצבים בשרשרת מרקוב). ונניח שנתונה רלציה/יחס, E, מעל V שהוא רלציה/יחס שקילות (מקיים רפלקסיביות, סימטריות וטרנזטיביות). (אצלנו רלציה זאת תהייה כל המעברים האפשריים בין מצבים בשרשרת המרקוב). אז E מגדירה חלוקה של S כך שהקבוצות המרכיבות את החלוקה הן מחלקות השקילות.

לדוגמא עבור הרלציה בדוגמא 2 (לעיל) יחס השקילות של השמות מהווה חלוקה של קבוצת הסטודנטים על פי שמותם (כל קבוצה בחלוקה היא אוסף כל הסטודנטים בעלי אותו שם).

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

יחס הקשירות הוא יחס שקילות ולכן יוצר מחלקות שקילות:

נגדיר את המשתנים המקריים: $j \in S$ T_j כך ש - $T_j = \inf\{n \geq 1 | X_n = j\}$.
במידה ו - $X_0 = i$ אז המשמעות של משתנה מקרי זה הוא מספר הצעדים שלוקח לעבור ממצב i למצב j.
נקרא למשתנים מקריים אלו **זמני פגיעה.**

דוגמא: כאשר הסתכלנו על תהליך ספירה ברנולי אז תהליך זמני ההצלחה ($\{T_k, k \geq 1\}$ מורכב מזמני הפגיעה במצבים $k = 1,2,3,...$ כאשר מתקיים $X_0 = 0$ (כאן ה $\{X_n, n \geq 0\} = \{N_n, n \geq 0\}$ על פי הסימון של פרק א-5).

כאשר נסתכל על T_j וגם $X_0 = j$ אז המשמעות של T_j היא מספר הצעדים שלוקח לחזור למצב j.

נשים לב שכאשר לעולם לא מגיעים למצב j אז $T_j = \infty$.

סביר להניח שעד כה לא פגשנו משתנים מקריים אשר יכולים לקבל את הערך ∞. משתנים מקריים כאלו ישמשו אותנו בפרק הזה ובפרק הבא וניתן להתייחס אליהם כמו לכל משתנה מקרי אחר. צריך להבחין שאם X הוא משתנה מקרי כך ש $P(X = \infty) > 0$ אז מתקיים ש $E[X] = \infty$. כמובן שהכוון השני אינו תמיד נכון: ישנם משתנים מקריים בעלי תוחלת אינסופית אבל המשתנים המקריים סופיים.

הגדרה:
נאמר כי מצב j **נגיש** ממצב i אם קיים $n \geq 0$ כך ש $p_{ij}^{(n)} > 0$. נסמן ב $i \to j$.
הערה: כל מצבי נגיש לעצמו כי $p_{ii}^{(0)} = P(X_0 = i | X_0 = i) = 1$. (כזכור המטריצה $P^{(0)}$ היא מטריצת היחידה).

הגדרה חלופית (שקולה): נאמר שכל מצב i נגיש לעצמו. בנוסף עבור $i \neq j$ נאמר ש j נגיש מ i אם $P(T_j < \infty | X_0 = i) > 0$.

הגדרה:
נאמר כי מצבים i ו j **מתקשרים** אם $i \to j$ (j נגיש מ i), וגם $i \leftarrow j$ (i נגיש מ j). נסמן ב $i \leftrightarrow j$.

הגדרה:
יחס הקשירות על מרחב המצבים של שרשרת מרקוב הוא היחס $(i, j) \in R$ אמ"מ $i \leftrightarrow j$.

משמעות: נתונה לנו שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר P. מטריצת המעבר מגדירה גרף מכוון (קיימת קשת בין i ל – j כאשר $p_{ij} > 0$). "נוסיף" קשתות לגרף המכוון ע"י הסתכלות על האיברים במטריצה P^2 (כאשר $p_{ij}^{(2)} > 0$ נוסיף קשת). ייתכן ולא יתווספו קשתות וייתכן שכן. נמשיך תהליך זה עבור $n = 3,4,5...$ ונקבל גרף מכוון שהצמתים שלו הם מצבי שרשרת המרקוב וקשת בין מצב i למצב j מציינת שקיימת הסתברות חיובית לעבור ממצב i למצב j (במספר כלשהו של צעדים) (מצב j נגיש ממצב i).

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

עכשיו נבדוק מהן זוגות הצמתים i,j אשר קיימת עבורם גם הקשת מ i לj וגם הקשת מ j לi. צמתים אלו הם "מתקשרים". ואת יחס הקשירות ניתן לציין ע"י אוסף כל זוגות הצמתים המתקשרים.

משפט:

יחס הקשירות על מרחב המצבים הוא יחס שקילות.

הוכחה:

i. רפלקסיביות - כל מצב נגיש לעצמו.

ii. סימטריות - מיידי מההגדרה של מצבים מתקשרים (כי ההגדרה סימטרית).

iii. טרנזטיביות – צריך להוכיח כי אם $i \leftrightarrow l$ וגם $l \leftrightarrow j$ אזי $i \leftrightarrow j$.

$i \leftrightarrow l$ ולכן $i \rightarrow l$ אזי קיים $n \geq 0$ כך ש $p_{il}^{(n)} > 0$

$l \leftrightarrow j$ ולכן $l \rightarrow j$ אזי קיים $m \geq 0$ כך ש $p_{lj}^{(m)} > 0$

לפי צ'פמן-קולמוגורוב $p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)}$

סכום זה גדול שווה לכל מחובריו (כי איברי הסכום חיוביים) ואחד מהמחוברים הוא $p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$. מחבור זה חיובי ממש ולסיכום קבלנו:

$$p_{ij}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{ik}^{(n)} p_{kj}^{(m)} \geq p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)} > 0$$

ולכן קבלנו כי $i \rightarrow j$.

באופן זהה לחלוטין ניתן להראות כי $i \rightarrow j$

ומכאן נובע כי $i \leftrightarrow j$.

מ.ש.ל

הערה: בהוכחת המשפט הקודם קבלנו את אי-השוויון $p_{ij}^{(n+m)} \geq p_{il}^{(n)} p_{lj}^{(m)}$. הסיבה לכך שאי שוויון זה מתקיים, היא שהמאורע שעבורו מחושבת ההסתברות בצד שמאל של האי שוויון, מכיל את המאורע שעבורו מחושבת ההסתברות בצד שמאל של האי שוויון. כלומר, בצד שמאל מופיע ההסתברות להגיע ממצב i למצב j, ב- n+m צעדים. מצד ימין מופיעה ההסתברות להגיע ממצב i למצב j, ב- n+m, כאשר בדרך, לאחר n צעדים התהליך מבקר במצב l.

תוצאה מהמשפט: יחס הקשירות על מרחב המצבים מגדיר **מחלקות שקילות** על מרחב המצבים.

הגדרה:

נסמן את מרחב המצבים של שרשרת מרקוב ב S.

מחלקת קשירות או פשוט **מחלקה** של מצבים היא הקבוצה A, $A \subseteq S$. כך שלכל $i, j \in A$ מתקיים $i \leftrightarrow j$ ואין מצב $k \in S \setminus A$ ומצב $i \in A$ כך ש $i \leftrightarrow k$.

הגדרה:

שרשרת מרקוב היא **פריקה** במידה ויש לה יותר ממחלקת קשירות אחת.

במידה ויש מחלקת קשירות אחת אז נאמר שהשרשרת היא **אי-פריקה.**

כלומר שרשרת מרקוב היא אי-פריקה אם מכל מצב במרחב המצבים אפשר להגיע לכל מצב אחר במרחב המצבים.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמאות:

- בדוגמא ב-0 יש שתי מחלקות קשירות.
- בדוגמא ב-1 יש מחלקת קשירות בודדת ולכן השרשרת היא אי-פריקה.
- בדוגמא ב-3 אם $0 < a,b < 1$ אז השרשרת אי-פריקה. אם $a = b = 0$ אז השרשרת לא אי-פריקה (השרשרת פריקה) ויש בה שתי מחלקות קשירות. אם $a = 1, b = 0$ עדיין ישנם שתי מחלקות קשירות.
- בדוגמא ב-5 יש אינסוף מחלקות קשירות. כל מחלקה היא מצב בודד.
- בדוגמא ב-13, מחלקות הקשירות הן: $\{1,2\},\{3,4\},\{5\}$

אלגוריתמים למציאת מחלקות הקשירות:

לא נעסוק בקורס זה באלגוריתמים למציאת מחלקות הקשירות. רוב הדוגמאות אשר נעסוק יהיה מבנה סדור ביותר או שהדוגמאות יהיו די קטנות כך שניתן לחפש ידנית את כל מחלקות הקשירות.
למרות זאת, כל המעוניין, מוזמן לחפש את האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף בספר:

“Introduction to Algorithms", by T. H. Corman, C. E. Leiserson, and R. L. Rivest (MIT Press and McGraw-Hill 1994)

רכיב קשיר היטב בגרף מכוון הוא רכיב אשר בו קיים מסלול בין כל זוג צמתים. כאשר מיישמים אלגוריתם שכזה על מרחב המצבים של שרשרת מרקוב, דרוש לבנות גרף מכוון ובו יש קשת מכל מצב למצבים הנגישים ממנו. וזה אומר גם קשת מכל מצב לעצמו (גם אם הסתברות המעבר ממצב לעצמו היא 0 לכל n). להלן איור הנלקח מהספר המראה את פעולת האלגוריתם למציאת רכיבים קשירים היטב בגרף מכוון.

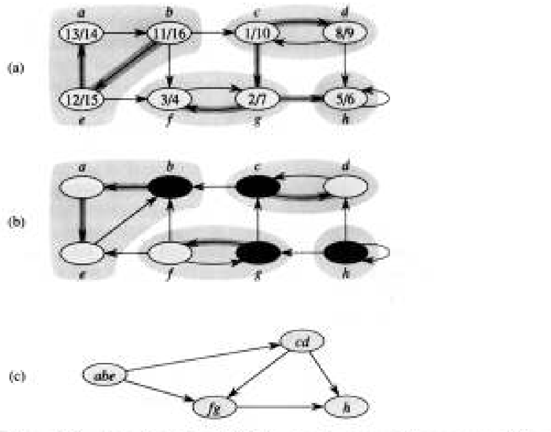

Figure 23.9 (a) A directed graph G. The strongly connected components of G are shown as shaded regions. Each vertex is labeled with its discovery and finishing times. Tree edges are shaded. (b) The graph G^T, the transpose of G. The depth-first tree computed in line 3 of STRONGLY-CONNECTED-COMPONENTS is shown, with tree edges shaded. Each strongly connected component corresponds to one depth-first tree. Vertices b, c, g, and h, which are heavily shaded, are forefathers of every vertex in their strongly connected component; these vertices are also the roots of the depth-first trees produced by the depth-first search of G^T. (c) The acyclic component graph G^{SCC} obtained by shrinking each strongly connected component of G to a single vertex.

אלגוריתם נוסף למציאת יחס קשירות בין מצבים הוא האלגוריתם הבא:

א) בהינתן מטריצת מעבר P, סמן 1 בתאים בהם יש ערך חיובי.
ב) סמן 1 באלכסון.
ג) בצע את החישוב הבא: $\widetilde{P} = \sum_{k=1}^{|S|} P^k$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

כאשר המשמעות של כפל היא And והמשמעות של חיבור היא Or
(1+1=1,1+0=1,0+1=1,0+0=0).

ד) המטריצה אשר התקבלה ($\widetilde{P}$) מכילה 1 במקום ה i,j במידה וניתן להגיע ממצב i למצב j (אחרת היא מכילה 0 במקום זה).

ה) בדוק במטריצה $\widetilde{P}$ מהם צמדי המצבים אשר עבורם $\widetilde{P}_{ij}=1$ וגם $\widetilde{P}_{ji}=1$, כל הצמדים הללו הינם קשירים.

חלוקת מרחב המצבים בשרשרת למצבים חולפים ומתמידים:

<u>הגדרה:</u>

נגדיר את **הסתברות המעבר <u>אי-פעם</u> ממצב i למצב j** , f_{ij} להיות:

$f_{ij}=P(\exists n>0, X_n=j \mid X_0=i)=P(T_j<\infty \mid X_0=i)$.

כמקרה פרטי נסתכל על **הסתברות החזרה <u>אי-פעם</u> למצב i**, f_i :

$f_i=f_{ii}=P(\exists n>0, X_n=i \mid X_0=i)=P(T_i<\infty \mid X_0=i)$.

ברור לנו שכאשר מצב j נגיש ממצב i ($i\to j$) אז $f_{ij}>0$.

בנוסף כאשר מצב j אינו נגיש ממצב i אז $f_{ij}=0$.

במקרים פשוטים ניתן לחשב את f_{ij} ללא כל מאמץ (ראה דוגמא ב-0 בהמשך) אבל במקרים נוספים יש צורך בחישוב קצת יותר מורכב (נדגים בפרק הבא).

<u>דוגמא:</u>

עבור דוגמא ב-1 (מזג אוויר) רואים ש $f_1=f_2=f_3=1$.וגם לכל $i\neq j$, $f_{ij}=1$.

<u>דוגמא:</u>

בדוגמא ב-0, רואים

$f_2=f_3=f_{23}=f_{32}=f_{12}=f_{13}=1$. אבל $f_1=\frac{1}{2}$ ו- $f_{21}=f_{31}=0$.

נגדיר N_i - **מספר הביקורים במצב i** (לאחר זמן 0): $N_i=\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{i\}}(X_n)$.

הערך של משתנה מקרי זה מציין כמה מהמשתנים $X_1,X_2,...$ בריאליזציה של השרשרת הינם בעלי הערך i.

<u>הגדרה:</u>

נאמר כי מצב i הוא ***מתמיד*** אם $f_i=1$.

או לחלופין $P(N_i=\infty \mid X_0=i)=1$.

<u>הגדרה:</u>

נאמר כי מצב i הוא **חולף** אם $f_i<1$.

או לחלופין $P(N_i<\infty \mid X_0=i)=1$.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

ז"א כל מצב הוא או מתמיד או חולף, במידה ומתמיד אז אם השרשרת נמצאת במצב זה היא תחזור אליו שוב ושוב (מספר אינסופי של פעמים). ובמידה וחולף אז אם נמצאת במצב זה, אז ישנה סבירות שתחזור אליו f_i, וישנה סבירות שלא תחזור אליו לעולם: $1-f_i$ (היא תהייה במצב מספר סופי של פעמים).

נבחין כי במידה והשרשרת חזרה למצב i, אז עקב תכונת המרקוביות "הכול מתחיל מהתחלה" והסבירות שתחזור שוב למצב i היא שוב f_i. כך ניתן להסתכל על הטיול אשר שרשרת מטיילת במצביה לאחר ביקור במצב i כטיול אשר בסופו נותן תוצאה של משתנה מקרי ברנולי, כאשר הצלחה (במונחי ניסויי הברנולי) מיוחסת לאי-חזרה אי פעם למצב i (וההסתברות של הצלחה היא $1-f_i$) וכשלון מיוחס לחזרה למצב i – ואז מתחיל הניסוי הבא.

מכאן התוצאה הבאה:

<u>משפט:</u>

במידה והמצב חולף אז $N_i \sim Geom_0(1-f_i)$ (סופר כישלונות).

ז"א:

$$P(N_i = k \mid X_0 = i) = (1-f_i)(f_i)^k \quad k = 0,1,2,...$$
$$E[N_i \mid X_0 = i] = \frac{f_i}{1-f_i}$$

הערה: בכדי להוכיח את המשפט לעיל באופן מפורש צריך להוכיח תוכנה שנקראת "התכונה המרקובית החזקה". אנחנו לא עושים זאת כאן.

כעת נתאר משפט המסווג מצבים חולפים ומתמידים על פי סדרת הסתברויות המעבר ב n צעדים.

<u>משפט:</u>

התכנסות או התבדרות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ קובעת אם מצב i הוא מתמיד או חולף:

(1) אם הטור מתבדר ($\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$) אז מצב i הוא מתמיד.

(2) אם הטור מתכנס ($\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$) אז מצב i הוא חולף.

הערה: משפט זה מאפיין כל מצב כמתמיד או חולף, באמצעות התבדרות או התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$ בהתאמה.

הוכחה:
ראשית נבחין:

$$E[N_i \mid X_0 = i] = E[\sum_{n=1}^{\infty} I_{\{i\}}(X_n) \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} E[I_{\{i\}}(X_n) \mid X_0 = i] = \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = i \mid X_0 = i) = \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)}$$

אם מצב i הוא מתמיד אז $P(N_i = \infty \mid X_0 = i) = 1$ ולכן $E(N_i \mid X_0 = i) = \infty$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$ (מתבדר).

אם מצב i הוא חולף אז $E[N_i \mid X_0 = i] = \frac{f_i}{1-f_i}$ ועבור $f_i < 1$ זה מספר סופי ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} < \infty$ (מתכנס).
מ.ש.ל.

משפט:
עבור כל מחלקת שקילות, או שכל המצבים במחלקה מתמידים או שכל המצבים חולפים.

הוכחה:
ראשית נראה שאם i מתמיד וגם $i \leftrightarrow j$ אז j מתמיד.
קיימים $k,m \in \mathbb{N}$ כך ש $p_{ij}^{(k)} > 0$ וגם $p_{ji}^{(m)} > 0$.
אם כך עבור כל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $p_{jj}^{(m+n+k)} \geq p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)}$ וזאת בגלל שמאורע המעבר מ j ל j ב m+n+k צעדים מכיל את המאורה אשר עבורו מחושבת ההסתברות בצד ימין של אי השוויון (מעבר מ j ל i ב m צעדים, לאחר מכן מעבר מ i לעצמו ב n צעדים ולבסוף מעבר מ i ל j ב k צעדים).
אם כך אז ניתן לסכום על כל n ולקבל:

$$\sum_{n=m+k+1}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(m+n+k)} \geq \sum_{n=1}^{\infty} p_{ji}^{(m)} p_{ii}^{(n)} p_{ij}^{(k)} = p_{ji}^{(m)} p_{ij}^{(k)} \sum_{n=1}^{\infty} p_{ii}^{(n)} = \infty$$

כאן עשינו שימוש בעובדה ש i מתמיד ולכן הטור עבורו מתבדר.
ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{jj}^{(n)}$ מתבדר (הזנב שלו מתבדר) ולכן j מצב מתמיד.
אם כך הראנו כי אם מצב הוא מתמיד אז כל המצבים במחלקה שלו (כל ה j כך ש $i \leftrightarrow j$) הם גם מתמידים.
מכאן נובע גם כי אם מצב i הוא חולף אז כל ה j כך ש $i \leftrightarrow j$ הם גם חולפים כי אם היה j כזה שהוא מתמיד אז גם i היה צריך להיות מתמיד.
מ.ש.ל.

הערה: כתוצאה ממשפט זה ניתן לומר כי **מחלקה היא מתמידה** או **מחלקה היא חולפת** בהתאם להתמדה/חליפות של המצבים במחלקה (המשפט מבטיח כי כל המצבים במחלקה יהיו מאותו סוג).

משפט:
בשרשרת מרקוב עם מרחב מצבים סופי לא כל המצבים יכולים להיות חולפים.
הוכחה:
נניח כי המצבים מסומנים $\{0,1,...,N\}$ ונניח בשלילה כי כל המצבים חולפים. אז לאחר זמן T_0 (סופי) השרשרת כבר לא תהייה במצב 0, ולאחר זמן סופי T_1 השרשרת כבר לא תהייה במצב 1 וכן הלאה. אם כך

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

לאחר זמן $T = \max\{T_0, T_1, ..., T_N\}$ השרשרת לא תמצה באף מצב. אבל בזמן זה השרשרת חייבת להיות במצב כלשהו וכאן הסתירה.
מ.ש.ל.

הערה: בניגוד לכך, נראה דוגמאות בהן השרשרת היא אינסופית וכל המצבים חולפים.

משפט:
בשרשרת מרקוב אי פריקה עם מרחב מצבים סופי, כל המצבים הם מתמידים.

הוכחה:
על פי המשפט הקודם חייב להיות מצב מתמיד אחד ועל פי המשפט שלפניו כל המצבים במחלקת השקילות הבודדה (השרשרת היא אי-פריקה) צריכים להיות מאותו סוג. ולכן כולם מתמידים.

הערה: הרבה מהדוגמאות בהמשך יהיו על שרשראות מרקוב אי-פריקות בעלות מרחב מצבים סופי. נראה שבמידה ואין בעיות של מחזוריות אז שרשראות אלו הינן בעלות התפלגות סטציונרית (תוגדר בפרקים הבאים).

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב- 14 ובה מטריצת המעבר היא:

$$P = \begin{pmatrix} .3 & 0 & 0 & 0 & .7 & 0 & 0 \\ .1 & .2 & .3 & .4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & .5 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & .5 & 0 & .5 & 0 \\ .6 & 0 & 0 & 0 & .4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & .2 & .8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לצייר את הגרף המתאים למרחב המצבים $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ ולחלק למחלקות מתמידות וחולפות:
מחלקות מתמידות: $\{1,5\}$, $\{4,7,6\}$.
מחלקות חולפות: $\{2\},\{3\}$.

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב-7, מודל המהמר על מרחב מצבים $\{0,...,N\}$ קל לראות כי המחלקות המתמידות הן: $\{0\},\{N\}$ והמחלקה החולפת היא $\{1,...,N-1\}$.

הגדרה:
במחלקה מתמידה אשר מורכבת ממצב יחיד, המצב היחיד נקראה **מצב סופג**.
לדוגמא, בדוגמא לעיל המצבים 0,N הם סופגים.
הערה: מצב i הוא סופג אמ"מ מתקיים $p_{ii} = 1$.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא:
נסתכל על דוגמא ב- 6 (הילוך אקראי).
ברור כי כל המצבים מתקשרים ($i \leftrightarrow j$ לכל $i, j \in \mathbb{Z}$) ולכן מדובר בשרשרת אי-פריקה, ז"א יש בשרשרת מחלקת קשירות אחת. במידה והשרשרת הייתה בעלת מרחב מצבים סופי אז היינו יודעים שכל המצבים מתמידים, אבל לא כך המצב (ייתכן שכולם חולפים)...
אם כך נסתכל על המצב 0, וננסה לראות אם מצב זה הוא חולף או מתמיד (וזה יקבע התמדה/חליפה של כל המצבים).

נסתכל על הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}{}^{(n)}$, על פי המשפט לעיל התכנסות, התבדרות התור תקבע האם המצב 0 חולף או מתמיד בהתאמה.
ראשית נבחין כי לאחר מספר אי-זוגי של צעדים לא ניתן לחזור למצב 0 (זאת כי מספר הצעדים ימינה דרוש להשתוות למספר הצעדים שמאלה ולכן חייב להיות זוגי):

$p_{00}{}^{(2n+1)} = 0$ עבור $n = 1, 2, 3, ...$

מצד שני, לאחר מספר זוגי של צעדים (2n), דרוש כי מספר הצעדים לצד אחד ישתווה למספר הצעדים לצד השני בשביל שתתבצע חזרה למצב 0, ולכן:

$$p_{00}{}^{(2n)} = \binom{2n}{n} p^n (1-p)^n = \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n$$

הסבר:
לפי נתוני הדוגמא, ההסתברות לצעד ימינה היא p, וההסתברות לצעד שמאלה היא 1-p. נתייחס לצעדים כאל סידרת ניסויי ברנולי, כאשר צעד ימינה הוא הצלחה, שמתרחשת בהסתברות p (צעד שמאלה הוא כישלון).
נסמן את סך כל הצעדים ב- 2n (מספר זוגי של צעדים) וב- K את מספר הצעדים ימינה מתוך סך כל הצעדים, אז $K \sim Bin(2n, p)$. מספר הצעדים שמאלה יהיה שווה למספר הצעדים ימינה אם K=n.

טענה: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!} p^n (1-p)^n$ מתבדר אם ורק אם $p = \frac{1}{2}$ (הוכחה חלקית בהמשך).

אם כך קיבלנו שכאשר ההילוך אקראי סימטרי אז מצב 0 מתמיד (ולכן כל המצבים מתמידים) וכאשר ההילוך האקראי אינו סימטרי ($p \neq \frac{1}{2}$). אז מצב 0 חולף (ולכן כל המצבים חולפים). ז"א במקרה הלא סימטרי, יש סיכוי חיובי ממש לעזוב מצב ולעולם לא לחזור אליו.

הערה: תוצאה מעניינת היא שבהילוך אקראי תלת מימדי ומעלה (הילוך אקראי על $\mathbb{Z}^n$ $n \geq 3$) כל המצבים תמיד חולפים.

ועכשיו להתבדרות/התכנסות הטור:

ניתן לקרב את $p_{00}{}^{(2n)}$ זה ע"י נוסחת סטירלינג ($n! \sim \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$):

$$p_{00}{}^{2n} = \frac{(2n)!}{n!n!}(p(1-p))^n \sim \frac{(2n)^{2n+1/2} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{((n)^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi})((n)^{n+1/2} e^{-n} \sqrt{2\pi})}(p(1-p))^n = \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$$

אם כך הטור $\sum_{n=1}^{\infty} p_{00}{}^{(n)}$ מתכנס אמ"מ הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$ יתכנס.

<u>חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)</u>

הערה: נשים לב ש $\frac{(4p(1-p))^n}{\sqrt{n\pi}}$ הוא קרוב של $p_{00}{}^{(2n)}$ הנובע מהקרוב של נוסחת סטירלינג. אם כך, דרושה הוכחה לכך שהתכנסות הטור האחד מתקיימת אמ"מ הטור השני מתכנס. לא נציג הוכחה זאת כאן.

אם כך האם הטור מתכנס? התשובה תלויה בפרמטר p.
נבחין כי $4p(1-p) \le 1$ ומתקיים שוויון אמ"מ $p = 1/2$. קל לראות זאת כי פתרונות המשוואה הריבועית $p - p^2$ הם 0 ו – 1. וזוהי פרבולה בעלת מקסימום (נפתחת כלפי מטה) ולכן נקודת המקסימום היא בין הפתרונות.

אז עבור $p = 1/2$ מדובר בטור: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-1/2}$.

ועבור $p \ne 1/2$ מדובר בטור: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n n^{-1/2}$ (כאשר $\alpha = 4p(1-p) \in [0,1/2)$.