# פרק ב-5: ניתוח צעד ראשון.

תכונת המרקוביות של שרשראות מרקוב מאפשרת לנו לפעמים לבצע חישובים הקשורים לשרשרת באמצעות התניה בצעד הראשון שהשרשרת מבצעת. בפרק זה מספר דוגמאות לכך.

**חישוב הסיכוי להגיע ממצב למצב (אי-פעם) ( $f_{ij}$ ):**

דוגמא:
כזכור בפרק הקודם הגדרנו: $f_{ij} = P(T_j < \infty \mid X_0 = i)$ זאת ההסתברות לעבור אי-פעם ממצב i למצב j.
חישוב של ערכים אלו מעניין עבור שרשראות פריקות סופיות (בשרשראות אי-פריקות סופיות ערכים אלו הם 1).
כיצד ניתן לחשב את $f_{ij}$ ?
ניתן להשתמש בנוסחא הבאה:
$$\boxed{f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in S \setminus \{j\}} p_{ik} f_{kj}}.$$
הוכחה:
$$f_{ij} = P(T_j < \infty \mid X_0 = i) = \sum_{k \in S} P(T_j < \infty \mid X_0 = i, X_1 = k) P(X_1 = k \mid X_0 = i)$$
כאן השתמשנו בנוסחת ההסתברות השלמה עבור פונקצית ההסתברות המותנה: $P(\cdot \mid X_0 = i)$ .
נפרק את הסכום למקרה שבו $k = j$ ו $k \neq j$:
$$= \underbrace{P(T_j < \infty \mid X_0 = i, X_1 = k) P(X_1 = k \mid X_0 = i)}_{k=j} + \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} P(T_j < \infty \mid X_0 = i, X_1 = k) P(X_1 = k \mid X_0 = i)$$
$$= p_{ij} + \sum_{\substack{k \in S \\ k \neq j}} p_{ik} f_{kj}$$

השוויון האחרון הוא בגלל ש:
א) $P(T_j < \infty \mid X_0 = i, X_1 = j) = 1$ .
ב) $P(T_j < \infty \mid X_0 = i, X_1 = k) = f_{kj}$ עבור $k \neq j$ .
ג) $P(X_1 = j \mid X_0 = i) = p_{ij}$ וגם $P(X_1 = k \mid X_0 = i) = p_{ik}$ .

מ.ש.ל.

הנוסחה שניתנה בדוגמא הקודמת מאפשרת לחשב את $f_{ij}$ באמצעות עבור i ו-j נתונים באמצעות שימוש בערכים של i ו- j אחרים.

דוגמא:
נתונה מטריצת מעבר על מרחב המצבים $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

$$P=\begin{pmatrix}1/2&1/2&0&0&0&0&0\\1/2&1/2&0&0&0&0&0\\0&0&1/3&2/3&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0\\1/3&0&0&0&0&0&2/3\\0&0&1/2&0&0&1/2&0\end{pmatrix}$$

ניתן לראות יחסית בקלות שמחלקות הקשירות הן: $\{1,2\}$, $\{3,4,5\}$ ו $\{6,7\}$. כאשר המצבים במחלקה $\{6,7\}$ חולפים והמצבים בשתי המחלקות האחרות מתמידים.

במידה ונתון שהשרשרת מתחילה במחלקות (הפילוג $P_{X_0}$) $\{1,2\}$ או $\{3,4,5\}$ אז למעשה ניתן להתייחס אל השרשרת כשרשרת אי-פריקה בעלת 2 או 3 מצבים מתמידים. אבל במידה ונתון שהשרשרת מתחילה במצבים 6 או 7 אז ישנו סיכוי ל"הספג" או במחלקה $\{1,2\}$ או במחלקה $\{3,4,5\}$.

נחשב את $f_{ij}$ עבור כל המצבים: יש כאן 49 ערכים (הרבה בשביל חישוב ידני) אבל אנחנו כבר יודעים:

א) $f_{ij}=1\ i,j\in\{1,2\}$ , $f_{ij}=0\ i\in\{1,2\}\ j\notin\{1,2\}$ (כי זאת מחלקה מתמידה).

ב) $f_{ij}=1\ i,j\in\{3,4,5\}$ , $f_{ij}=0\ \ i\in\{3,4,5\}\ j\notin\{3,4,5\}$ (כי זאת מחלקה מתמידה).

נסכם את כל מה שידועה לנו ללא חישוב במטריצה אשר האיבר ה i,j שלה הוא $f_{ij}$ :

$$F=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0\\1&1&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&1&0&0\\?&?&?&?&?&?&?\\?&?&?&?&?&?&?\end{pmatrix}$$

נותר לנו לחשב את $f_{ij}$ כאשר $i\in\{6,7\}$. נשתמש בנוסחה אשר מתקבלת מהתניה בצעד ראשון:

$$\begin{aligned}
f_{66}&=p_{66}+(p_{61}f_{16}+p_{62}f_{26}+p_{63}f_{36}+p_{64}f_{46}+p_{65}f_{56}\qquad+\qquad p_{67}f_{76}\ )\\
f_{67}&=p_{67}+(p_{61}f_{17}+p_{62}f_{27}+p_{63}f_{37}+p_{64}f_{47}+p_{65}f_{57}+p_{66}f_{67}\qquad)\\
f_{76}&=p_{76}+(p_{71}f_{16}+p_{72}f_{26}+p_{73}f_{36}+p_{74}f_{46}+p_{75}f_{56}\qquad+\qquad p_{77}f_{76}\ )\\
f_{77}&=p_{77}+(p_{71}f_{17}+p_{72}f_{27}+p_{73}f_{37}+p_{74}f_{47}+p_{75}f_{57}+p_{76}f_{67}\qquad)
\end{aligned}$$

הרבה מאוד מהאיברים במשוואות לעיל הם אפסים:

$$\begin{aligned}
f_{66}&=0+(p_{61}0+00+00+00+00\qquad+\qquad p_{67}f_{76}\ )\\
f_{67}&=p_{67}+(p_{61}0+00+00+00+00+0f_{67}\qquad)\\
f_{76}&=p_{76}+(00+00+p_{73}0+00+00\qquad+\qquad 0f_{76}\ )\\
f_{77}&=0+(00+00+p_{73}0+00+00+p_{76}f_{67}\qquad)
\end{aligned}$$

נשארנו עם:

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

$$f_{66} = p_{67} f_{76}$$
$$f_{67} = p_{67}$$
$$f_{76} = p_{76}$$
$$f_{77} = p_{76} f_{67}$$

קבלנו:

$$f_{66} = f_{77} = 1/3$$

ויש לנו עכשיו:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1/3 & 2/3 \\ ? & ? & ? & ? & ? & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

בשביל לחשב את ההמשך נשים לב ש - $f_{61} = f_{62}$ וגם $f_{63} = f_{64} = f_{65}$.
ובאותו אופן $f_{71} = f_{72}$ וגם $f_{73} = f_{74} = f_{75}$.
אז:

$$f_{61} = p_{61} + p_{67} f_{71}$$
$$f_{71} = p_{76} f_{61}$$
$$f_{63} = p_{67} f_{73}$$
$$f_{73} = p_{73} + p_{76} f_{63}$$

(כל שאר האיברים במשוואות הם 0).
לאחר הצבת מספרים:

$$\begin{cases} f_{61} = 1/3 + 2/3\ f_{71} \\ f_{71} = 1/2\ f_{61} \end{cases} \Rightarrow f_{61} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{2} f_{61} \Rightarrow f_{61} = \frac{1}{2} \quad f_{71} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{cases} f_{63} = 2/3\ f_{73} \\ f_{73} = 1/2 + 1/2\ f_{63} \end{cases} \Rightarrow f_{73} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{2}{3} f_{73} \Rightarrow f_{73} = \frac{3}{4} \quad f_{63} = \frac{1}{2}$$

אם כך קבלנו:

$$F=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 1/4 & 3/4 & 3/4 & 3/4 & 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

## ***חישובים נוספים באמצעות התניה בצעד ראשון:***

ניתן לבצע חישובים נוספים באמצעות התניה בצעד ראשון. העיקרון הוא:
**לבצע התניה בצעד הראשון ששרשרת המרקוב מבצעת לצורך קבלת משוואות:**

להלן דוגמאות:

דוגמא:
$\mu_{ij}=E[T_j \mid X_0=i]$. זו תוחלת מספר הצעדים שלוקח לעבור ממצב i למצב j:
ע"י התניה בצעד הראשון מקבלים:
$\mu_{ij}=1\cdot p_{ij}+\sum_{k\in S\setminus\{j\}} p_{ik}\mu_{kj}$ .

דוגמא:
$\mu_{iA}$ - תוחלת מספר הצעדים עד שמגיעים למצב השייך לקבוצת המצבים A ($A\subseteq S$):
$\mu_{iA}=1\cdot\sum_{k\in A} p_{ik}+\sum_{k\notin A} p_{ik}\mu_{kA}$ (הדוגמא הקודמת היא מקרה פרטי: $A=\{j\}$).

## ***דוגמא: מודל המהמר***

כעת נסתכל על דוגמא קצת יותר מורכבת: דוגמא ב-7:
מרחב המצבים הוא $\{0,\dots,N\}$ ומטריצת המעבר היא:

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ q & 0 & p & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & q & 0 & p \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ראשית אנו רואים כי מצבים 0 ו N – הינם סופגים ולכן הם מהווים מחלקות קשירות מתמידות. שאר המצבים: $\{1,\dots,N-1\}$ הינם חולפים ומהווים מחלקה חולפת.

$f_{iN}$ היא ההסתברות שהמהמר מסיים ברווח (נספג במצב N) במידה והוא מתחיל/נמצא במצב i.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

נבחין כי $f_{0N}=0$ ו $f_{NN}=1$.

מהו $f_{iN}$ עבור $i\notin\{0,N\}$?

על פי התניה בצעד ראשון מקבלים: $f_{iN}=p\,f_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$

אם כך,

$$(p+q)f_{iN}=pf_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$$

או

$$pf_{iN}+qf_{iN}=pf_{i+1,N}+qf_{i-1,N}$$

או

$$q(f_{iN}-f_{i-1,N})=p(f_{i+1,N}-f_{iN})$$

או

$$\frac{q}{p}(f_{iN}-f_{i-1,N})=(f_{i+1,N}-f_{iN})$$

$f_{iN}$ היא פונקציה של i עבור הערכים $i=0,...,N$ ומקבלת 0 עבור i=1 ו 1 עבור i=N. כיצד היא מתנהגת בערכי הביניים? ראשית נטפל במקרה הפשוט יותר ובו p=q=1/2. אם כך המשוואה היא $f_{iN}-f_{i-1,N}=f_{i+1,N}-f_{iN}$ וזה אומר שהשינוי בערך הפונקציה הוא קבוע לכל הקטע ולכן הפונקציה חייבת להיות ליניארית ובגלל שבקצבות ערכיה נתונים (0 ו – 1) אזי הפונקציה היא:

$f_{iN}=\dfrac{i}{N}$. הסבר מפורט:

$f_{i,N}-f_{i-1,N}=f_{i+1,N}-f_{i,N}=C$ עבור $\{1,2,...,N-1\}$. זה אומר שהשינוי בערך הפונקציה $f_{iN}$ הוא קבוע לכל הקטע וגודלו $C$. הפונקציה, חייבת, על כן, להיות ליניארית, כלומר מהצורה $y=ax+b$. כאשר, על ציר ה- $x$ נמצאים המצבים, לכן $x=i$, ושינויים של יחידה בציר ה- $x=i$, גורמים לשינויים בגודל $a=C$, בציר טווח הפונקציה, $y=f_{iN}$. קיבלנו ש: $f_{iN}=Ci+b$. כלומר, קיבלנו משוואה בשני נעלמים, $b$ ו- $C$. נפתור אותה ע"י שנציב שני פתרונות ידועים של המשוואה: $0=f_{0N}=C\cdot 0+b$, לכן $b=0$.

$1=f_{NN}=C\cdot N+0=CN$, לכן $C=\dfrac{1}{N}$. קיבלנו: $f_{iN}=\dfrac{i}{N}$.

המשמעות היא כמובן שבמקרה בו p=q=1/2 (המשחק הוגן לחלוטין) אז הסיכוי לסיים ברווח עולה ליניארית ככל שמתחילים עם יותר כסף.

ניתן לראות תוצאה זו גם באופן אלגברי: אם $f_{iN}-f_{i-1,N}=f_{i+1,N}-f_{iN}$ אזי $f_{iN}-f_{i-1,N}=c$ (קבוע לכל i). עכשיו:

$$1=f_{N,N}-f_{0,N}=\sum_{i=1}^{N}(f_{i,N}-f_{i-1,N})=Nc$$

(כאשר השוויון השמאלי הוא בגלל ערכי הפונקציה בקצוות, השוויון הבא הוא טור טלסקופי) והשוויון לאחר מכן נובע מכך ש $f_{iN}-f_{i-1,N}=c$.

אז אם כך $f_{iN} - f_{i-1,N} = \frac{1}{N}$ אז אם כך:

$$f_{iN} = f_{iN} - f_{0,N} = \sum_{j=1}^{i} (f_{jN} - f_{j-1,N}) = \frac{i}{N}$$

דוגמא (עבור p=q=1/2), התאמת מטבעות:
לאיציק יש 15 מטבעות ולמוחמד יש 10 מטבעות והם משחקים משחק: כל אחד מטיל מטבע, במידה והמטבעות זהים (אותו צד) אז איציק מקבל את שתי המטבעות, במידה והמטבעות שונים אז מוחמד מקבל את שתי המטבעות. הם מפסיקים את המשחק ברגע שאחד מהם קיבל את כל המטבעות. מה ההסתברות שמוחמד יצא מרווח?

תשובה: נמדל כמודל המהמר כאשר ערך התהליך מציין את הונו של מוחמד, ו-N=25. אם כך $f_{10,25} = \frac{10}{25}$ הוא הסיכוי שמוחמד יצא בעל הרווח.

## ***המקרה הלא-סימטרי במודל המהמר***

ניתן לחשב גם את $f_{iN}$ עבור מודל המהמר כאשר $p \neq q$. לא נציג כאן את הפרטים, רק את התוצאה הסופית:

$$f_{i,N} = \begin{cases} \dfrac{1-(\frac{q}{p})^i}{1-(\frac{q}{p})^N} & i = 1,\dots,N \\ 0 & i = 0 \end{cases}$$

דוגמא:
ברולטה, סיכוי הזכייה הוא $p = \frac{18}{38} \approx 0.47$. אדם מגיע עם 50$ לקזינו ומעוניין להכפיל את הונו (להגיע ל 100$) בהימורים של 1$. מה סיכוי ההצלחה שלו?

$q = \frac{20}{38}$ ולכן $\frac{q}{p} = \frac{20}{18}$

אם כך,

$$f_{50,100} = \frac{1-(\frac{20}{18})^{50}}{1-(\frac{20}{18})^{100}} \approx \frac{1-194}{1-194^2} = \frac{1}{1+194} \approx 0.005$$

רואים שהסיכוי להכפיל את הכסף בהימורים קטנים הוא אפסי (לעומת זאת בהימור חד פעמי הסיכוי כמעט חצי).

## מודל המהמר – תוחלת מספר הצעדים עד הפגיעה במצב 0 או N:

כעת נתעניין בשאלה אחרת הקשורה למודל המהמר – תוחלת מספר הצעדים עד לספיגה (פגיעה במצב 0 או N).

נגדיר $\tau = \min\{n \in \mathbb{N} \mid X_n \in \{0, N\}\}$ להיות זמן הפגיעה באחד משני המצבים הסופגים. נרצה לחשב את $\mu_i = E[\tau \mid X_0 = i]$.

ברור כי $\mu_0 = \mu_N = 0$.

עבור $i \in \{1,..., N-1\}$ נחשב את $\mu_i$ ע"י הסתכלות על כל מה שיכול להתרחש בצעד הראשון:

$\mu_i = 1 + p\mu_{i+1} + q\mu_{i-1}$. נוסחה זאת נובעת מהעובדה שדרוש צעד אחד לנוע לאחד משני המצבים i+1 או i-1 וההסתברויות לנוע לכל אחד מהמצבים הללו הינן p או q בהתאמה. לאחר מעבר למצבים אלו, תוחלת מספר הצעדים עד לספיגה תלויה במצב החדש $\mu_{i+1}$ או $\mu_{i-1}$.

נחשב את $\mu_i$ אך למקרה בו $p = q = \dfrac{1}{2}$.

מתקיים:

$$\mu_i = 1 + \frac{\mu_{i+1} + \mu_{i-1}}{2}$$

או

$\mu_{i+1} - \mu_i = -2 + \mu_i - \mu_{i-1}$ נסמן משוואה זו ב (*).

נסכם כעת משוואה זו עבור $i = 1,..., N-1$ ונקבל

$$\mu_N - \mu_1 = -2(N-1) + \mu_{N-1} - \mu_0$$

נבחין כי מתקיים $\mu_0 = \mu_N = 0$

בנוסף על פי סימטריה צריך להתקיים ש - $\mu_1 = \mu_{N-1}$

ולכן:

$$0 - \mu_1 = -2(N-1) + \mu_1 - 0$$

ולכן:

$$\mu_1 = \mu_{N-1} = N-1$$

על פי (*) מתקיים:

$$\mu_2 - \mu_1 = -2 + \mu_1 - \mu_0 = -2 + (N-1)$$

באותו אופן מתקיים:

$$\mu_3 - \mu_2 = -2 + \mu_2 - \mu_1 = -2 - 2 + (N-1) = -4 + (N-1)$$

או באופן כללי:

$$\mu_{i+1} - \mu_i = -2i + (N-1)$$

כאשר נסכם משוואה זו על הערכים: $i \in \{0,..., j-1\}$ נקבל:

$$\sum_{i=0}^{j-1} (\mu_{i+1} - \mu_i) = \sum_{i=0}^{j-1} (-2i + (N-1))$$

ולכן:

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

$$\mu_j = -2\sum_{i=0}^{j-1} i + j(N-1)$$

ולכן:

$$\mu_j = -2\frac{(j-1)(j-1+1)}{2} + j(N-1) = j(N-1) - j(j-1) = j(N-j)$$

דוגמא:

נפעיל משוואה זו ( $\mu_j = j(N-j)$ ) על דוגמת התאמת המטבעות מהסעיף. שם התקיים כי N=25 והערך ההתחלתי היה j=15. אם כך תוחלת מספר השלבים במשחק הוא $15(25-15) = 150$.

לא נרחיב כאן על המקרה הכללי יותר בו $p \in (0,1)$ אלה רק נציין את התוצאה:

$$\mu_i = \frac{i}{q-p} - \frac{N}{q-p} \cdot \frac{1-\left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^N}$$