פרק ב-6: ארגודיות וסטציונריות

הסבר אינטואיטיבי לארגודיות:

נניח ונתון לנו מודל של תהליך סטוכסטי כלשהו $X=\{X_t,t\in T\}$ ואנחנו מממשים סימולציה של התהליך (הכוונה היא לסימולציה במחשב ובה המחשב מגריל את המשתנים המקריים הדרושים ויכול לייצר ריאליזציות של התהליך). מטרת הסימולציה היא להריץ את התהליך ולאסוף סטטיסטיקות לגבי התפתחות התהליך. לדוגמא: אם התהליך הוא מודל של מלאי, אז היינו רוצים לראות מהו אחוז הזמן ובו במערכת יש חוסר מלאי (נסמן מדד זה ב - θ).

כאשר אנו מריצים את הסימולציה אז עומדות בפנינו שתי אפשרויות:
1. להריץ את הסימולציה על ריאליזציה אחת לפרק זמן מאוד ארוך, וכך לאמוד את θ.
2. לבצע הרבה הרצות, ובכל הרצה לאמוד את θ, ולשכלל את תוצאות כל ההרצות לאמד אחד.

בכלליות, תהליך סטוכסטי הוא **ארגודי** אם ניתן להסתפק בשיטה מס' 1 (סימלוץ ריאליזציה בודדת). ז"א הסתכלות על ריאליזציה בודדת (אך ארוכה) תספק לנו את כל המידע הדרוש לגבי חוק ההסתברות של התהליך.

הגדרה זו אינה פורמאלית, הגדרה פורמאלית של מונח הארוגודית עבור תהליכים סטוכסטיים כללים דורשת תחכום מתמטי רב.

<u>להלן דוגמא של המונח ארגודיות:</u>

יהיה $\{X_t,t\in\mathbb{R}^+\}$ תהליך סטוכסטי (מרחב הפרמטר הוא החיוביים). אם כך אז אפשר להסתכל על $\{X_t,t\in\mathbb{R}^+\}$ גם כעל אוסף של משתנים מקריים וגם כפונקציה של $\omega\in\Omega$. נניח ואנו מריצים ריאליזציה בודדת. בכך בעצם בחרנו $\omega_0\in\Omega$ והסתכלנו על הריאליזציה אשר נוצרת מ ω_0. במידה ואנו מסתכלים על הריאליזציה אשר נוצרה רק ב T יחידות הזמן הראשונות. אזי דרך טובה לאמוד את תוחלת התהליך על פי ההרצה שהרצנו היא:

$$\widehat{EX}=\frac{1}{T}\int_0^T X_t(\omega_0)dt$$. (זהו כמובן ממוצע הריאליזציה על פני פרק הזמן $[0,T]$).

נניח ואנו לוקחים T מאוד גדול ($T\to\infty$). האם האמד שלנו $\widehat{EX}^T(\omega_0)\underset{T\to\infty}{\to}EX_T$ בהסתברות 1?

במידה וכן אז התהליך הוא ארגודי ביחס לתוחלת. ז"א, הייתה לנו ריאליזציה בודדת וכאשר הסתכלנו עלייה מספיק זמן (הרצנו אותה עד ל T גדול), הערך אשר קבלנו שאף לתוחלת בזמן T מאוד גדול: $\lim_{T\to\infty}EX_T$.

במידה והתהליך לא היה ארגודי, אז לצורך אמידה נכונה של $\lim_{T\to\infty}EX_T$ דרוש לקחת מספר ריאליזציות ($\omega_0,\omega_1,\omega_2,...,\omega_{N-1}\in\Omega$). ועבור כל ω_i להריץ עד לזמן T ולקבל $X_T(\omega_i)$ ואז לאמוד את התוחלת כך:

$$\widehat{EX}=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}X_T(\omega_i)$$.

הערה: ייתכן ותהליך סטוכסטי הוא ארגודי ביחס לערך מסוים אשר קשור לחוק ההסתברות (לדוגמא: התוחלת) אבל אינו ארגודי לגבי ערך אחר (לדוגמא: כל חוק ההסתברות). לא נדון בדוגמאות כאלו כאן.

ארגודיות של שרשראות מרקוב:

לאחר הדיון המופשט לגבי ארגודיות נחזור לתהליכים הסטוכסטיים אשר אנו מכירים, שרשראות מרקוב. עבור שרשראות מרקוב, ארגודיות הוא מונח המוגדר היטב וזה יהיה הנושא של המשך החלק הזה של שרשראות מרקוב.

לפני שנדגים את המשמעות של ארגודיות של שרשראות מרקוב בדוגמא, נגדיר מושג פשוט ושימושי, פונקציות רווח.

הגדרה:
פונקציה $r : S \to \mathbb{R}$ (ממרחב המצבים S לממשיים) היא **פונקצית רווח**.

בנוסף, **הרווח הממוצע** על פני n יחידות הזמן הראשונות של ריאליזציה $\{x_0, x_1, ...\}$ הוא: $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(x_k)$.

דוגמא:
כאשר פונקצית הרווח היא $r(i) = I_{\{j\}}^{(i)}$ (עבור $i \in S$), אזי הרווח לכל מצב ששונה מ j הוא 0. והרווח למצב j הוא 1. אם מתקבלת התחלה של ריאליזציה: $x_0, x_1, ..., x_{n-1}$ אזי $\sum_{k=0}^{n-1} r(x_k)$ הוא מספר הפעמים אשר הריאליזציה ביקרה במצב j במהלך התחלה זו. ולכן הרווח הממוצע הוא פרופורציית הזמן שבו הריאליזציה הייתה במצב i.
לדוגמא, עבור דוגמא ב-3 (השרשרת הדו-מצבית). נניח כי הדוגמא משקפת את מצב מכונה, יכול להיות תקין 0, או תקול 1. אזי עבור $r(i) = I_{\{0\}}^{(i)}$, הרווח הממוצע משקף את פרופורציית הזמן שהמכונה תקינה (ולא תקולה).

דוגמא:
נסתכל על שרשרת המלאי (דוגמא ב-9). בדוגמא זו המצב של התהליך מסמל את מספר הפריטים אשר במלאי בזמן n. נגדיר כאן את פונקצית הרווח להיות $r(i) = ci$ (כאשר c קבוע חיובי). כל בעל מכולת, מפעל או רשת חנויות יודע כי מלאי גורר עלויות ולכן כדאי למזער (ככל שניתן) את כמות המלאי. פונקצית הרווח אשר קבענו מציינת את העלות הנגרמת עקב המלאי כאשר העלות ליחידה אחת היא c. אם כך לאחר הרצה של התהליך למשך n צעדים (n ימים). הרווח הממוצע מציין את העלות הממוצעת הנגרמת מהחזקת מלאי ביחידת זמן אחת.

כעת לאחר שהכרנו את המונח של פונקצית רווח, נסתכל על דוגמא אשר תמחיש את המשמעות של ארגודית של שרשראות מרקוב.

דוגמא:
נסתכל על השרשרת בדוגמא ב – 14, ראינו כי בדוגמה זו המחלקות החולפות הן $\{2\},\{3\}$ והמחלקות המתמידות הן $\{1,5\}$, $\{4,7,6\}$.
בנוסף אנו רואים כי במידה ומתחילים לרוץ במצב 2 אזי יש סיכוי שהריאליזציה **"תיספג"** במחלקה $\{1,5\}$ וסיכוי שהריאליזציה תיספג במחלקה $\{4,7,6\}$: $f_{2,\{1,5\}}$ ו $f_{2,\{4,7,6\}}$ (לא נתעסק בלחשב אותם כעת).
מתקיים כי $f_{2,\{4,7,6\}} + f_{2,\{1,5\}} = 1$ (התהליך בהכרח נספג באחת מהמחלקות הללו).

<u>חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)</u>

כעת נניח כי פונקצית הרווח היא פונקצית הזהות $r(i)=i$

בנוסף נניח כי $P_{X_0}(i)=I_{\{2\}}{}^{(i)}$, התהליך מתחיל במצב 2 (בהסתברות 1).

בגלל שהתהליך ייספג באחת משתי המחלקות הסופגות ברור כי כל ריאליזציה תהייה מהצורה:

- $x_0, x_1, ..., x_m, y_{m+1}, y_{m+2}, ...$ כאשר $y_i \in \{1,5\}$.

או

- $x_0, x_1, ..., x_m, z_{m+1}, z_{m+2}, ...$ כאשר $z_i \in \{4,7,6\}$.

(עבור m כלשהו).

ז"א לאחר זמן מספיק ארוך (m), התהליך ייספג באחת משתי המחלקות הסופגות (ולאחר מכן יישאר במחלקות אלו). אם כך עבור n מספיק גדול (גדול בהרבה מ – m). יתקיים כי הרווח הממוצע יהיה:

- מבוסס על הרווח הממוצע במחלקה $\{1,5\}$.

או

- מבוסס על הרווח הממוצע במחלקה $\{4,7,6\}$.

ז"א עבור n מספיק גדול, הרווח המתקבל מהמצבים החולפים בהם התהליך שהה בהתחלה (מצבים 2, 3) לא תורם באופן משמעותי לרווח הממוצע.

המצבים בכל אחת משתי המחלקות $\{1,5\}$, $\{4,7,6\}$ הינם מתמידים ונראה בהמשך כי עבור שרשרת מרקוב המורכבת אך ורק מהמחלקה האי-פריקה $\{1,5\}$ קיימות פרופורציות π_1, π_5 כך ש $\pi_1+\pi_5=1$. ו π_i הוא ההסתברות שהתהליך נמצא במצב i לאחר שרץ הרבה מאוד זמן.

כנ"ל עבור שרשרת מרקוב אשר מורכבת רק מהמחלקה $\{4,7,6\}$ קיימות פרופורציות π_4, π_7, π_6 אשר סכומם 1 וגם להן את אותה משמעות.

אם כך:

- במידה ונספגנו במחלקה $\{1,5\}$ אז הרווח הוא הממוצע הוא בקרוב $1\cdot\pi_1+5\cdot\pi_5$

או

- במידה ונספגנו במחלקה $\{4,7,6\}$ אז הרווח הוא הממוצע הוא בקרוב $4\cdot\pi_4+7\cdot\pi_7+6\cdot\pi_6$

אם כך לסיכום, לא די בריאליזציה אחת בשביל לאמוד את הרווח הממוצע (זהו הערך הממוצע של התהליך) ולכן השרשרת המרקוב הנ"ל אינה ארוגודית. כי הרי בשביל לשערך מהו הרווח הממוצע דרוש להריץ הרבה ריאליזציות ולמצע על פני הריאליזציות הללו.

מה אם כך הוא התנאי המתאים לארוגודיות של שרשראות מרקוב?

את התשובה נגדיר במדויק בפרק ב-8. בינתיים נסתפק בהגדרה:

<u>הגדרה</u> <u>(חלקית לבינתיים):</u>

שרשרת מרקוב היא **ארגודית** אם היא אי-פריקה.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

סטציונריות:

פגשנו כבר מונח דומה לסטציונריות בחלק א' של הקורס: אינקרימנטים סטציונרים. המשמעות שם הייתה שחוק ההסתברות של האינקרימנטים של התהליך קבוע לאורך הזמן. כעת נתאר מהו תהליך סטציונרי. זהו מושג חזק יותר מתהליך בעל אינקרימנטים סטציונרים. תהליך סטציונרי הוא תהליך אשר חוק ההסתברות שלו עצמו (לא רק של האינקרימנטים) אינו משתנה לאורך זמן.

הגדרה:
תהליך סטוכסטי $\{X_n, n \geq 0\}$ הוא **סטציונרי** אם עבור כל $m \in \mathbb{N}$ ועבור כל $n_1,...,n_k \in \mathbb{N}$ לכל $k \in \mathbb{N}$ (לכל אורך של סדרה) מתקיים כי ההתפלגות המשותפת של $X_{n_1},...,X_{n_k}$ זהה להתפלגות המשותפת של $X_{n_1+m},...,X_{n_k+m}$.

הערה: קל לראות כי סטציונרית גוררת אינקרימנטים סטציונרים.
הערה: ההגדרה דורשת שההתפלגות השולית של התהליך בכל נקודת זמן תהייה זהה (זה מקרה פרטי עבור k=1).

דוגמא:
אוסף משתנים מקריים i.i.d. הוא תהליך סטציונרי.
דוגמא:
תהליך ספירה ברנולי אינו סטציונרי.

סטציונריות של שרשראות מרקוב:

מה לגבי שרשראות מרקוב?
בפרק 2, ראינו שבהינתן התפלגות התחלתית P_{X_0} ניתן לקבל את P_{X_n} ע"י הכפלת וקטור השורה P_{X_0} במטריצה P^n (המינוחים כאן הם עבור המקרה של מרחב מצבים סופי אבל התוצאות הינן כלליות) ז"א קבלנו:

$$P_{X_n} = P_{X_0} P^n$$

לרוב P_{X_n} יהיה שונה מ - P_{X_0} ולכן שרשראות מרקוב לרוב יהיו לא סטציונריות.
אבל מה עם נבחר את P_{X_0} כך שיקיים:

$$P_{X_0} = P_{X_0} P^n$$

מכאן נובעות משוואות שווי המשקל:

$$\boxed{\begin{array}{l} \pi_j = \sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} \quad \forall j \in S \\ \sum_{j \in S} \pi_j = 1 \end{array}}$$ או בכתיבה מטריציונית $\boxed{\begin{array}{l} \pi P = \pi \\ \pi e = 1 \end{array}}$ (כאשר e הוא וקטור עמודה של 1).

הן בדיוק פותרות עבור ה P_{X_0} הזה אשר מקיים את התנאי.
בפרקים הבאים נראה שפתרונות למשוואות שווי המשקל קיימים כאשר השרשרת היא ארגודית ויש להתפלגות זו משמעויות רבות.

פרק ב-7: הסתברויות גבוליות/סטציונריות.

הערה: הדיון בפרק זה הוא עדיין לא פורמאלי ואינו מתאר את "התמונה המלאה". הסיכום המלא הוא בפרק הבא.

משוואות שווי משקל ומשמעות הפתרון שלהן:

שוב נזכר **במשוואות שווי המשקל**:

$$\boxed{\begin{aligned}&\pi_j = \sum_{i\in S}\pi_i P_{ij} \quad \forall j\in S\\ &\sum_{j\in S}\pi_j = 1\end{aligned}}$$

לצורך המחשה נסתכל על קבוצת המשוואות כאשר S סופי. יש כאן $|S|+1$ משוואות:

$$\begin{aligned}
&\pi_1 = \pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \ldots + \pi_N P_{N1}\\
&\pi_2 = \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} + \ldots + \pi_N P_{N2}\\
&\ldots\\
&\pi_N = \pi_1 P_{1N} + \pi_2 P_{2N} + \ldots + \pi_N P_{NN}\\
&\pi_1 + \pi_2 + \ldots \pi_N = 1
\end{aligned}$$

כאשר השרשרת היא ארגודית אז יש לפתרון המשוואות מספר משמעויות:

<u>משמעות 1: **ההתפלגות הסטציונרית**</u>

במידה ונבחר $P_{X_0} = \pi$ אז התהליך יהיה סטציונרי. (ז"א $P_{X_n} = \pi$ לכל n). ולכן π נקרא וקטור ההסתברות הסטציונרית או **ההתפלגות הסטציונרית**.

<u>משמעות 2: **ההתפלגות הגבולית**</u>

גם אם $P_{X_0} \neq \pi$ אז עדיין נקבל כי עבור n גדול $P_{X_n} \approx \pi$ ובגבול (כאשר n אינסוף) נקבל שוויון: $\lim_{n\to\infty} P_{X_n} = \pi$. באופן שקול מתקיים $\lim_{n\to\infty} P_{ij}{}^n = \pi_j$ לכל $i, j \in S$. ולכן π נקרא וקטור ההסתברויות הגבוליות או **ההתפלגות הגבולית**.

<u>משמעות 3: **ההופכי של תוחלת זמן החזרה למצב**</u>

כזכור זמן הפגיעה במצב i הוא המשתנה המקרי $T_i = \min\{n \geq 1 : X_n = i\}$.

מתקיים: $E[T_i \mid X_0 = i] = \dfrac{1}{\pi_i}$.

<u>משמעות 4: **ההתפלגות המשמשת לחוק החזק עבור שרשראות מרקוב**</u>

כזכור מהפרק הקודם הרווח הממוצע עבור פונקצית רווח $r: S \to \mathbb{R}$ כאשר הריאליזציה היא $\{x_0, x_1, \ldots\}$ הוא: $\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} r(x_k)$. **החוק החזק עבור שרשראות מרקוב** הוא:

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r(X_k) = \sum_{i\in S} r(i)\pi_i$ בהסתברות 1.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

ז"א הרווח הממוצע שואף לתוחלת הרווח המתקבלת תחת ההתפלגות π .

מקרה פרטי של חוק זה מתקבל ע"י פונקצית הרווח $r(i) = I_{\{j\}}{}^{(i)}$. במקרה זה החוק טוען:

$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{\{j\}}{}^{(X_k)} = \pi_j$ בהסתברות 1. ז"א פרופורציית הזמן בו התהליך נמצא במצב j שואפת ל π_j .

דוגמא:

נזכר בדוגמא ב – 1, מזג אוויר.

להלן המצבים בדוגמא:

1 – מעונן כבד.

2 – מעונן חלקי.

3 – שמיים נקיים.

להלן מטריצת המעבר:

$$P = \begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix}$$

נרשום את משוואות שווי המשקל:

בצורה מטריציונית המשוואות הן

$$\pi P = \pi$$

$$\pi e = 1$$

(כאשר π הוא וקטור שורה ו e הוא וקטור עמודה של אחדים).

אם כך,

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .4 & .6 & 0 \\ .2 & .5 & .3 \\ .1 & .7 & .2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \pi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

וכאשר משוואות אלו נרשמות באופן מפורש:

$$\pi_1 .4 + \pi_2 .2 + \pi_3 .1 = \pi_1$$

$$\pi_1 .6 + \pi_2 .5 + \pi_3 .7 = \pi_2$$

$$\pi_1 0 + \pi_2 .3 + \pi_3 .2 = \pi_3$$

$$\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

נחפש את פתרון המשוואות:

נתחיל בפתרון המשוואה השלישית, נניח כי π_3 ידוע:

$$\pi_2 = \frac{.8}{.3}\pi_3 = \frac{8}{3}\pi_3$$

נציב במשוואה השנייה:

$$\pi_1 .6 + (\frac{4}{3} + .7)\pi_3 = \frac{8}{3}\pi_3$$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

או

$$\pi_1 .6 = (\frac{4}{3} - .7)\pi_3 = .6333\pi_3$$

או

$$\pi_1 = 1.0556\pi_3$$

נשתמש עכשיו במשוואה האחרונה (משוואת הסכום לאחד):

$$1.0556\pi_3 + 2.6667\pi_3 + \pi_3 = 1$$

או

$$4.7223\pi_3 = 1$$

$$\pi_3 = .2118$$

ולכן

$$\pi_1 = 1.0556\pi_3 = 1.0556 \cdot .2118 = .2235$$

ולכן

$$\pi_2 = \frac{8}{3}\pi_3 = \frac{8}{3}.2118 = .5647$$

אם כך קבלנו שהוקטור π הוא $(.2118 \quad .5647 \quad .2235)$

נתחיל להתבונן בארבעת המשמעויות של π:

התפלגות סטציונרית: אם מתחילים את תהליך מזג האוויר על פי ההתפלגות π אזי פילוג התהליך בכל נקודת זמן יהיה π.

התפלגות גבולית: נראה מה קורה כאשר המטריצה P מועלה בחזקות:

להלן דוגמא שנלקחה מתוכנת MATLAB:

```
>> P =[.4 .6 0
       .2 .5 .3
       .1 .7 .2]
P =
   0.4000   0.6000        0
   0.2000   0.5000   0.3000
   0.1000   0.7000   0.2000
>> P^2
ans =
   0.2800   0.5400   0.1800
   0.2100   0.5800   0.2100
   0.2000   0.5500   0.2500
>> P^3
ans =
   0.2380   0.5640   0.1980
   0.2210   0.5630   0.2160
   0.2150   0.5700   0.2150
>> P^4
ans =
   0.2278   0.5634   0.2088
   0.2226   0.5653   0.2121
   0.2215   0.5645   0.2140
>> P^5
ans =
   0.2247   0.5645   0.2108
   0.2233   0.5647   0.2120
   0.2229   0.5649   0.2121

>> P^6
ans =
   0.2239   0.5646   0.2115
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2234   0.5647   0.2119
```

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

```
>> P^7
ans =
   0.2236   0.5647   0.2117
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
>> P^8
ans =
   0.2236   0.5647   0.2117
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
>> P^9
ans =
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
   0.2235   0.5647   0.2118
```

רואים כמובן ששורות P^n מתכנסות ל π. כבר לאחר תשעה צעדים השורות זהות כאשר בוחנים אותן בדיוק של 4 ספרות משמעותיות. המשמעות היא שבכל תנאי התחלה (P_{X_0}) פילוג התהליך לאחר תשעה צעדים יהיה זהה (עד לדיוק של 4 ספרות). ז"א תנאי ההתחלה אינם משמעותיים בשרשראות ארגודיות.

הערה: לא נמשיך נדון ב"קצב ההתכנסות" $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = \pi_j$ אבל הדוגמא המספרית לעיל מעידה שהוא "מהיר".

<u>תוחלת זמן החזרה למצב:</u>

נסתכל על π_i^{-1}:

$$\begin{pmatrix} 4.47 & 1.77 & 4.72 \end{pmatrix}$$

ז"א שבמידה והיום מעונן כבד (מצב 1) אז תוחלת מספר הימים עד ששוב יהיה מעונן כבד היא 4.47 וכו'.

<u>החוק החזק:</u>

ראשית כאשר משתמשים בפונקצית רווח שהיא אינדיקאטור עבור מצב מסוים לדוגמא (מצב 2):
$r(i) = I_{\{2\}}{}^{(i)}$ אזי לפי החוק החזק פרופורציית הזמן בו התהליך הוא במצב 2 (מעונן חלקי) היא $\pi_2 = .5647$.

שנית נניח ופונקצית הרווח מציינת את הטמפרטורה במעלות צלסיוס בכל מצב:

$$r(i) = \begin{cases} 13 & i=1 \\ 17 & i=2 \\ 25 & i=3 \end{cases}$$

אזי הטמפרטורה הממוצעת שואפת לטמפרטורה:

$$13\pi_1 + 17\pi_2 + 25\pi_3 = 17.8$$

<u>אינטואיציה של משוואות שווי המשקל:</u>

נניח שמרחב המצבים הוא $\{1,2,3,4\}$ נסתכל על המשוואה עבור j=3:

$$\pi_3 = \pi_1 P_{13} + \pi_2 P_{23} + \pi_3 P_{33} + \pi_4 P_{43}$$

מה המשמעות של משוואה זו?

צד שמאל הוא π_3, ההסתברות שהתהליך הסטציונרי (או התהליך הגבולי) יהיה במצב 3 בזמן מסוים (נניח n).

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

צד ימין מתאר את כל הדרכים להגיע למצב 3 מהזמן הקודם (n-1).
ניתן בזמן הקודם להיות בכל אחד מהמצבים: $\{1,2,3,4\}$ וההסתברות להיות בכל אחד מהמצבים הללו ניתנת על פי π וההסתברות לעבור למצב 3 על פי העמודה השלישית ב P.
אם כך המשוואות מתארות עבור כל מצב, את כל הדרכים אשר ניתן להגיע להיות במצב הזה.

משוואות שווי משקל מפורטות:

לפעמים ניתן לנסח ולפתור משוואות קצת שונות עבור π:

הגדרה:
משוואות תנאי שווי משקל מפורט (detailed balance condition) הן:

$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ לכל $i,j \in S$.

$$\sum_{i \in S} \pi_i = 1$$

כאן ישנה משוואה עבור כל צמד מצבים ב S ועוד משוואת הסכום לאחד.

טענה:
במידה וקיים פתרון למשוואות תנאי שווי המשקל המפורט אז קיים פתרון למשוואות שווי המשקל.

הוכחה:
ניקח את המשוואות $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ עבור j קבוע כלשהו ונסכם על כל ה i:

$$\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \sum_{i \in S} \pi_j P_{ji}.$$

בצד ימין π_j קבוע ביחס לסכום ו $\sum_{i \in S} P_{ji} = 1$ ולכן

$$\sum_{i \in S} \pi_i P_{ij} = \pi_j.$$

אם כך הפתרון π של משוואות תנאי שווי המשקל המפורטות מקיים גם את משוואות שווי המשקל.
מ.ש.ל.

דוגמא:
נסתכל על השרשרת הבאה:
$S = \{1,2,3,4\}$ ומתאפשרת תנועה בין מצבים עוקבים בלבד (כולל בין מצבים 4 ו- 1) על פי המטריצה הנ"ל:

$$P = \begin{pmatrix} .5 & .1 & 0 & .4 \\ .3 & .5 & .2 & 0 \\ 0 & .2 & .5 & .3 \\ .4 & 0 & .1 & .5 \end{pmatrix}$$

משוואות תנאי שווי משקל המפורטות:

בין מצבים 1,2: $\pi_1 .1 = \pi_2 .3$

בין מצבים 2,3: $\pi_2 .2 = \pi_3 .2$

בין מצבים 3,4: $\pi_3 .3 = \pi_4 .1$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

בין מצבים 4,1: $\pi_4.4=\pi_1.4$

בין שאר המצבים $P_{ij}=0$ ולכן אין משוואות.

משוואת הסכום לאחד: $\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_4=1$

אם כך: $\pi_1=\pi_4$ ו $\pi_2=\pi_3$

ובגלל ש - $\pi_1.1=\pi_2.3$ אז $\pi_1=\pi_2 3$ וכשנציב במשוואת הסכום לאחד:

$$3\pi_2+\pi_2+\pi_2+3\pi_2=1$$

ולכן

$$\pi_2=\frac{1}{8}$$

ולכן

$$\pi=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8}\end{pmatrix}$$

על פי הטענה הקודמת פתרון זה צריך להיות גם הפתרון של משוואות שווי המשקל. נוודא זאת: צריך להתקיים:

$$\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}.5 & .1 & 0 & .4\\ .3 & .5 & .2 & 0\\ 0 & .2 & .5 & .3\\ .4 & 0 & .1 & .5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\pi_1 & \pi_2 & \pi_3 & \pi_4\end{pmatrix}$$

ובאמת כפי שרואים ב MATLAB :

```
P =

   0.5000    0.1000         0    0.4000
   0.3000    0.5000    0.2000         0
        0    0.2000    0.5000    0.3000
   0.4000         0    0.1000    0.5000

ppp =

   0.3750    0.1250    0.1250    0.3750

>> ppp*P

ans =

   0.3750    0.1250    0.1250    0.3750
>> sum(ppp)

ans =

     1
```

הערה: לא תמיד ניתן להשתמש במשוואות תנאי שווי משקל המפורט למציאת ההתפלגות הסטציונרית. אבל הראנו שכאשר קיים פתרון למשוואות תנאי שווי המשקל המפורט אז הוא גם הפתרון של משוואות שווי המשקל.

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

דוגמא: (לתהליך אשר אין לו פתרון למשוואות תנאי שווי המשקל המפורט) אבל הוא כן ארוגודי.

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

להלן משוואות תנאי שווי משקל המפורטות:

$$\pi_1\frac{1}{3}=\pi_2 0$$

$$\pi_1\frac{1}{3}=\pi_3 1$$

$$\pi_2\frac{1}{2}=\pi_3 0$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

הפתרון היחיד אשר מקיים את שלושת המשוואות הראשונות הוא $\pi=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ אבל אז המשוואה הרביעית אינה מתקיימת.

מאידך קיים פתרון למשואות שווי המשקל:

$$\pi_2=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_3=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2$$

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=1$$

על פי שתי המשוואות הראשונות $\pi_2=\pi_3$

ואז ע"י הצבה של שוויון זה במשואה השנייה מקבלים: $\pi_2=\frac{1}{3}\pi_1+\frac{1}{2}\pi_2$

ולכן $\pi_2=\frac{2}{3}\pi_1$

ואז ע"י הצבה במשוואה השלישית מקבלים:

$\pi_1+\frac{2}{3}\pi_1+\frac{2}{3}\pi_1=1$ ולכן $\pi_1=\frac{3}{7}$ ולכן $\pi_2=\pi_3=\frac{2}{7}$