פרק ב-9: ניתוח דוגמאות.

בפרקים הקודמים בחלק זה של הקורס למדנו וחקרנו תכונות רבות של שרשראות מרקוב. המעניינת מבין התכונות היא תכונת ההפלגות הגבולית עבור שרשראות מרקוב ארוגודיות והחוק החזק של שרשראות מרקוב העושה שימוש בהתפלגות זו. כעת נפנה לחקר מספר דוגמאות יישומיות ובהן מציאת ההתפלגות הגבולית ושימוש בה לצורך חישובים נלווים הינה פעולה יישומית ומעניינת.

שרשרת דו-מצבית:

ניזכר בדוגמא ב-3, שרשרת דו מצבית. המצבים הינם 0 ו – 1 ומטריצת המעבר היא:

$$P=\begin{pmatrix}1-a & a\\ b & 1-b\end{pmatrix}$$

למודל זה יישומים רבים. לדוגמא:
מכונה יכולה להיות במצב תקין (0) או תקול (1). בכל יום הסיכוי להתקלקל הוא a (במידה ובמצב תקין) והסיכוי לעבור ממצב תקול למצב תקין הוא b.

בפרק ב-3 הצלחנו לבצע עבור מודל זה, מה שלרוב לא ניתן לעשות, לחשב באופן מפורש את מטריצת המעבר ב – n צעדים:

$$P^n=\frac{1}{a+b}\left(\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+(1-a-b)^n\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}\right)$$

מה קורה כאן כאשר $n\to\infty$?
מתקיים כי $|1-a-b|<1$ (כאשר a ו b שניהם אינם 0 או 1 וכך השרשרת ארוגודית) ולכן

$$\lim_{n\to\infty}P^n=\frac{1}{a+b}\left(\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}a & -a\\ -b & b\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{a+b}\begin{pmatrix}b & a\\ b & a\end{pmatrix}$$

וכך מצאנו את ההתפלגות הגבולית:

$$\pi=\begin{pmatrix}\frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b}\end{pmatrix}$$

לרוב כמובן לא נצליח למצוא כך את ההפלגות הגבולית (ע"י לקיחת גבול באופן מפורש) ונצטרך לפתור את המשוואות באופן מפורש:

$$\begin{aligned}\pi_0&=\pi_0P_{00}+\pi_1P_{10}\\ \pi_1&=\pi_0P_{01}+\pi_1P_{11}\\ \pi_0+\pi_1&=1\end{aligned}$$

או

$$\begin{aligned}\pi_0&=\pi_0(1-a)+\pi_1b\\ \pi_1&=\pi_0a+\pi_1(1-b)\\ \pi_0+\pi_1&=1\end{aligned}$$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

נציב את המשוואה השלישית ($\pi_0 = 1 - \pi_1$) במשוואה הראשונה ונקבל:

$$1 - \pi_1 = (1 - \pi_1)(1 - a) + \pi_1 b$$

או

$$1 - (1 - a) = \pi_1 (1 - (1 - a) + b)$$

או

$$\frac{a}{a+b} = \pi_1$$

ולכן

$$\pi_0 = 1 - \pi_1 = \frac{b}{a+b}.$$

כך לדוגמא עם a=0.9 ו b=0.3 אז ממצב 0 יש סיכוי רב לעבור למצב 1 אבל ממצב 1 יש פחות סיכוי לעבור למצב 0 ואז

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

ובאמת רואים שרוב הזמן (75% מהזמן) נמצא במצב 1.

תיקון חלקים במכונה:

למכונה יש שלושה חלקים (1,2,3) קריטיים אשר עלולים להתקלקל. לצורך תפקוד תקין של המכונה דרושה תקינות של שתיים מתוך שלושת החלקים (ז"א שכאשר המכונה מתפקדת, לכל היותר חלק אחד יכול להיות מקולקל). מדיניות החלפת החלקים המקולקלים היא כזאת: ברגע ששני חלקים נמצאים במצב מקולקל, הם מוחלפים והמכונה חוזרת לעבוד ביום הבא.

ההסתברות לקלקול חלקים 1, 2 ו – 3 הן 0.01, 0.02 ו 0.04 בהתאמה, אבל שני חלקים לא יכולים להתקלקל באותו יום.

מהו המודל המרקובי אשר מתאים לסיפור זה?

אם נפעיל את המכונה למשך 1800 ימים (בערך 5 שנים) כמה חלקים מסוג, 1, 2, 3 יוחלפו?

המודל: נתאר את מרחב המצבים כך: $S = \{0,1,2,3,12,13,23\}$ כאשר כל מצב מתאר מהם החלקים המקולקלים. לדוגמא מצב 0 מתאר כי אין חלקים מקולקלים, מצב 3 מתאר כי חלק מס' 3 מקולקל ומצב 23 מתאר כי חלקים 2 ו 3 מקולקלים.

אם כך אז זוהי מטריצת המעבר:

$$P = \begin{array}{r|l} 0 & \\ 1 & \\ 2 & \\ 3 & \\ 12 & \\ 13 & \\ 23 & \end{array} \!\!\!\! \begin{pmatrix} .93 & .01 & .02 & .04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & .94 & 0 & 0 & .02 & .04 & 0 \\ 0 & 0 & .95 & 0 & .01 & 0 & .04 \\ 0 & 0 & 0 & .97 & 0 & .01 & .02 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כעת נתעניין בקרוב (הגבולי) של תוחלת מס' החלקים מסוג 1, 2 ו – 3 אשר יוחלפו לאחר 1800 ימי פעולה.

אנו יודעים כי חלקים מוחלפים בכל פעם שהשרשת במצב 12, 13 או 23:

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

חלק 1 מוחלף כאשר אנו במצבים 12 או 13.
חלק 2 מוחלף כאשר אנו במצבים 12 או 23.
חלק 3 מוחלף כאשר אנו במצבים 13 או 23.
רואים בקלות שהשרשת היא אי-פריקה ולכן בגלל שמרחב המצבים שלה סופי אז קיימת עבורה התפלגות גבולית π.

אם כך הקרוב הגבולי לתוחלת מס' החלקים המוחלפים מכל סוג הוא:
חלק 1: $1800(\pi_{12}+\pi_{13})$
חלק 2: $1800(\pi_{12}+\pi_{23})$
חלק 3: $1800(\pi_{13}+\pi_{23})$

נותר כעת רק לחשב את π:

נרשום את משוואות שווי המשקל עבור כל העמודות פרט לעמודה הראשונה (ניתן תמיד לדלג על עמודה/משוואה אחת).

$$.01\pi_0+.94\pi_1=\pi_1$$
$$.02\pi_0+.95\pi_2=\pi_2$$
$$.04\pi_0+.97\pi_3=\pi_3$$
$$.02\pi_1+.01\pi_2=\pi_{12}$$
$$.04\pi_1+.01\pi_3=\pi_{13}$$
$$.04\pi_2+.02\pi_3=\pi_{23}$$
$$\pi_0+\pi_1+\pi_2+\pi_3+\pi_{12}+\pi_{13}+\pi_{23}=1$$

נניח כי π_0 ידוע:
אז לפי המשוואה הראשונה, השנייה והשלישית בהתאמה מתקיים:

$$\pi_1=\pi_0\frac{1}{6}$$
$$\pi_2=\pi_0\frac{2}{5}$$
$$\pi_3=\pi_0\frac{4}{3}$$

או לאחר מכנה משותף:

$$\pi_1=\pi_0\frac{5}{30}$$
$$\pi_2=\pi_0\frac{12}{30}$$
$$\pi_3=\pi_0\frac{40}{30}$$

נציב כעת במשוואות הרבעית, החמישית והשישית:

$$\pi_{12}=\pi_0\frac{10+12}{3000}$$
$$\pi_{13}=\pi_0\frac{20+40}{3000}$$
$$\pi_{23}=\pi_0\frac{48+80}{3000}$$

כעת נשתמש במשוואת הסכום:

$$\frac{3000+500+1200+4000+22+60+128}{3000}\pi_0=1$$

ולכן $\pi_0=\frac{3000}{8910}$

ומכאן:

$$\pi_1=\frac{500}{8910}$$
$$\pi_2=\frac{1200}{8910}$$
$$\pi_3=\frac{4000}{8910}$$
$$\pi_{12}=\frac{22}{8910}$$
$$\pi_{13}=\frac{60}{8910}$$
$$\pi_{23}=\frac{128}{8910}$$

ומכאן לאחר 1800 ימים משתמשים בממוצע ב 16.56 פריטים מסוג 1, 30.30 פריטים מסוג 2, ו 37.98 פריטים מסוג 3.

מודל אמינות:

מערכת יצור נמצאת באחד מאוסף מצבים $S=\{1,...,N\}$. קיימת קבוצה מצבים A, $A\subseteq S$ שהיא קבוצת **המצבים התקינים** בה המערכת מייצרת. הקבוצה המשלימה $A^c=S\setminus A$ היא קבוצת **המצבים התקולים** בהם המערכת אינה מייצרת.

נניח כי מצב מערכת הייצור מתנהג על פי שרשרת מרקוב בעלת מטריצת מעבר P והשרשרת היא אי-פריקה ואינה מחזורית.

נתעניין במספר מדדים לגבי מערכת היצור:
1. פרופורציית הזמן בה המערכת במצב תקין.
2. פרופורציית הזמן בה המערכת במצב תקול.
3. הקצב אשר בו מערכת היצור עוברת ממצב תקין למצב תקול, ז"א קצב הקלקולים.
4. הקצב אשר בו מערכת היצור עוברת ממצב תקול למצב תקין, ז"א קצב התיקונים.
5. הזמן הממוצע בו המערכת נשארת במצב תקין לאחר תיקון (זהו הזמן הממוצע בין קלקולים – נקרא Mean Time Between Failures – MTBF).

<u>חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)</u>

6. הזמן הממוצע בו המערכת נשארת במצב תקול לאחר התקלקלות (זהו הזמן הממוצע להתאוששות מקלקול).

<u>פתרון:</u>

ראשית בגלל שהשרשרת היא ארגודית אז קיימת התפלגות סטציונרית π, אם בנוסף נניח כי השרשרת במצב שווי משקל (המערכת כבר עבדה מספר ימים רב) אז ההסתברות שהמערכת במצב i היא π_i.

אם כך, ההסתברות להיות במצב תקין היא $\sum_{i\in A}\pi_i$. (שאלה 1).

וההסתברות להיות במצב תקול היא $\sum_{i\in A^c}\pi_i$. (שאלה 2).

שנית נגדיר שרשרת מרקוב דו מצבית (כפי שהוצגה בתחילת הפרק הזה). נקרא למצב 0 – המצב התקין ולמצב 1 – המצב התקול. נבנה את הסתברויות המעבר של השרשרת הדו-מצבית (מבוססים על הפרמטרים a ו – b) כך שיתאימו לשרשרת שלנו (השרשרת ה N מצבית):

עבור כל ריאליזציה של השרשרת שלנו (המטיילת בין N מצבים). נגדיר ריאליזציה של השרשרת הדו-מצבית כך:

נסמן את השרשרת שלנו (ה- N מצבית) ב - Y_n ואת השרשרת הדו-מצבית ב X_n. אז:

$$X_n = I_{A^c}(Y_n)$$

ז"א כאשר השרשרת שלנו במצב תקול אז השרשרת הדו-מצבית במצב – 1 וכאשר השרשרת שלנו במצב תקין אז השרשרת הדו- מצבית במצב 0.

במצב יציב (כאשר הפילוג השולי לכל זמן n של השרשרת שלנו הוא π) נחשב את a ו- b (הסתברויות המעבר בשרשרת הדו-מצבית). אנו יודעים כי קצב המעבר ממצב i למצב j הוא $\pi_i P_{ij}$. כל מעבר ממצב ב A למצב ב A^c בשרשרת שלנו (N מצבים) גורר מעבר ממצב 0 למצב 1 בשרשרת הדו –מצבית. ולכן:

$a = \sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}$ וזהו הקצב בו המכונה עוברת ממצב תקין למצב תקול (שאלה 3).

ובאופן דומה, $b = \sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c}\pi_i P_{ij}$ וזהו הקצב בו המכונה עוברת ממצב תקול למצב תקין. (שאלה 4).

מהם התשובות לשאלות 5,6 (הזמן הממוצע בו השרשרת במצב תקול והזמן הממוצע בו השרשרת במצב תקין).

וכן בכל שרשרת מרקוב הזמן הממוצע בו נשארים במצב לא סופג i הוא $\frac{1}{1-P_{ii}}$ (כי נשארים במצב מספר גיאומטרי של פעמים עם הסתברות הצלחה = יציאה ממצב $1-P_{ii}=\sum_{j\neq i}P_{ij}$).

<u>חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)</u>

בפרט בשרשרת הדו מצבית נשאר במצב 0 בממוצע $\frac{1}{a}$ צעדים ובמצב 1 בממוצע $\frac{1}{b}$ צעדים. ולכן בשרשרת שלנו (ה-N מצבית) נישאר במצב תקין בממוצע למשך $\frac{1}{\sum_{j\in A^c}\sum_{i\in A}\pi_i P_{ij}}$ צעדים (שאלה 5) ומצב תקול בממוצע למשך $\frac{1}{\sum_{j\in A}\sum_{i\in A^c}\pi_i P_{ij}}$ צעדים.

לדוגמא:

עבור מרחב מצבים $S = A\bigcup A^c$ כאשר $A=\{1,2\}$ ו $A^c=\{3,4\}$ נניח כי מטריצת המעבר היא

$$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

התפלגות שווי המשקל מתקבלת ע"י המשוואות הבאות:

$$\pi_1 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4$$
$$\pi_2 = \frac{1}{4}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3 + \frac{1}{4}\pi_4$$
$$\pi_3 = \frac{1}{2}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_2 + \frac{1}{4}\pi_3$$
$$1 = \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4$$

פתרון המשוואות הוא:

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{9}{48} & \frac{12}{48} & \frac{14}{48} & \frac{13}{48} \end{pmatrix}$$

פרופורציית הזמן בו המערכת במצב תקין: $\frac{21}{48}$

פרופורציית הזמן בו המערכת במצב תקול: $\frac{27}{48}$

קצב הקלקולים הוא:

$$\sum_{j\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{ij} = \pi_1(P_{13}+P_{14}) + \pi_2(P_{23}+P_{24}) = \frac{9}{48}\left(\frac{1}{2}+0\right) + \frac{12}{48}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{32}$$

<u>חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)</u>

וקצב התיקונים היא:

$$\sum_{j\in A}\sum_{j\in A^c}\pi_i P_{ij}=\pi_3(P_{31}+P_{32})+\pi_4(P_{41}+P_{42})=\frac{14}{48}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{13}{48}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)=\frac{9}{32}$$

ומשך הזמן הממוצע בו המערכת מקולקלת הוא:

$$\frac{1-\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{ij}}=\frac{1-(\pi_1+\pi_2)}{\pi_1(P_{13}+P_{14})+\pi_2(P_{23}+P_{24})}=\frac{1-\frac{21}{48}}{\frac{9}{32}}=\frac{\frac{9}{16}}{\frac{9}{32}}=2$$

ומשך הזמן הממוצע בו המערכת תקינה הוא:

$$\frac{\sum_{i\in A}\pi_i}{\sum_{j\in A^c}\sum_{j\in A}\pi_i P_{ij}}=\frac{(\pi_1+\pi_2)}{\pi_1(P_{13}+P_{14})+\pi_2(P_{23}+P_{24})}=\frac{\frac{21}{48}}{\frac{9}{32}}=\frac{14}{9}$$

<u>סכום מצטבר מודולו:</u>

נזכר בדוגמא ב-11. מטריצת המעבר אשר התקבלה עבור מרחב המצבים $\{0,1,2,3,4\}$ היא:

$$P=\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & p_4\\ p_4 & p_0 & p_1 & p_2 & p_3\\ p_3 & p_4 & p_0 & p_1 & p_2\\ p_2 & p_3 & p_4 & p_0 & p_1\\ p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_0 \end{pmatrix}$$

ניתן לראות כי במטריצת המעבר P לא רק שסכום כל שורה הוא אחד (המטריצה היא סטוכסטית כמובן) אלה גם הסכום של כל העמודה הוא אחד (P^T היא סטוכסטית גם כן). ז"א לכל $j\in S$ מתקיים $\sum_{i\in S}P_{ij}=1$ (וזאת מעבר לתנאי הרגיל של מטריצה סטוכסטית: לכל $i\in S$ מתקיים $\sum_{j\in S}P_{ij}=1$). למטריצה כזאת נקראה מטריצה **סטוכסטית כפולה**.

קל לראות שעבור שרשראות מרקוב אי-פריקות, סופיות, בעלות מטריצות סטוכסטיות כפולות (כמו דוגמת הסכום מצטבר מודולו) מתקיים כי ההתפלגות הסטציונרית היא $\pi_i=\frac{1}{|S|}$ (אחידה בדידה על מרחב המצבים).

הרי משואת שווי המשקל עבור מצב j היא: $\pi_j=\sum_{i\in S}\pi_i P_{ij}$. ואם נציב $\pi_i=\frac{1}{|S|}$ אז נקבל: $\frac{1}{|S|}1=\sum_{i\in S}\frac{1}{|S|}P_{ij}=\frac{1}{|S|}$. ובנוסף משוואת הסכום לאחד מתקיימת ולכן $\pi_i=\frac{1}{|S|}$ הוא הפתרון.

ולכן במקרה הפרטי של דוגמת סכום מצטבר מודולו 5, ההסתברות להיות בכל מצב מסוים לאחר שהשרשרת רצה לפרק זמן ארוך היא $\frac{1}{5}$.

הילוך אקראי מוחזר (Reflecting Random Walk):

ניזכר בדוגמא ב-15. מטריצת המעבר היא:

$$P=\begin{pmatrix} 1-p & p & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

בפרק ב-4, חקרנו דוגמא זו בהקשר של מצבים מתמידים חיוביות ומתמידים אפס. שם ראינו כי תנאי הכרחי ומספיק להתמדה חיובית של מצבי השרשרת הוא קיום פתרון למשוואות שווי המשקל. פתרנו את מערכת משוואות שווי המשקל עבור שרשרת זו וקבלנו עבור $p<0.5$ את הפתרון:

$$\pi_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{p}{1-p})^k}$$

$$\pi_k=\pi_0(\frac{p}{1-p})^k$$

כך לדוגמא עבור $p=\frac{1}{4}$ מקבלים:

$$\pi_0=\frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{3})^k}=\frac{1}{\frac{1}{1-\frac{1}{3}}}=\frac{1}{3/2}=\frac{2}{3}$$

$$\pi_k=\frac{2}{3}(\frac{1}{3})^k$$

ז"א π הוא וקטור מסת ההסתברות של משתנה מקרי גיאומטרי סופר כישלונות עם פרמטר להצלחה $\frac{2}{3}$.

הערה: קל לקבל פתרון זה באמצאות משוואות תנאי שווי משקל המפורט:

$$\pi_0 p=\pi_1(1-p)$$
$$\pi_1 p=\pi_2(1-p)$$

....
$$\pi_k p = \pi_{k+1}(1-p)$$

אם כך:
$$\pi_k = \pi_{k-1}\frac{p}{1-p} = \pi_{k-2}\left(\frac{p}{1-p}\right)^2 = ... = \pi_0\left(\frac{p}{1-p}\right)^k$$
ואז π_0 מתקבל ממשוואת הסכום לאחד.

בהמשך הקורס (בעיקר בחלק ה') נמשיך ונדון בפתרונות מסוג זה (עבור תהליכי לידה ומוות).

שארית אורך החיים:

ניזכר בדוגמא ב-12. מטריצת המעבר היא:
$$P = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & p_4 & p_5 & p_6 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

להלן משוואות שווי המשקל:
$$\pi_0 = \pi_0 p_1 + \pi_1$$
$$\pi_1 = \pi_0 p_2 + \pi_2$$
$$\pi_2 = \pi_0 p_3 + \pi_3$$
....
$$\pi_k = \pi_0 p_{k+1} + \pi_{k+1}$$
....

נניח כי π_0 ידוע אז:

$$\pi_1 = \pi_0(1-p_1) = \pi_0(p_2+p_3+...) = \pi_0 P(Z>1) = \pi_0 \overline{F}_Z(1)$$
$$\pi_2 = \pi_1 - \pi_0 p_2 = \pi_0(1-p_1-p_2) = \pi_0(p_3+p_4+...) = \pi_0 P(Z>2) = \pi_0 \overline{F}_Z(2)$$
$$\pi_3 = \pi_2 - \pi_0 p_3 = \pi_0(1-p_1-p_2-p_3) = \pi_0(p_4+p_5+...) = \pi_0 P(Z>3) = \pi_0 \overline{F}_Z(3)$$
....
$$\pi_k = \pi_0(1-p_1-...-p_k) = \pi_0(p_{k+1}+p_{k+2}+...) = \pi_0 \overline{F}_Z(k)$$

חלק ב: שרשראות מרקוב (זמן בדיד)

($\overline{F}_Z(k)$ היא פונקצית השרידות של המשתנה המקרי Z המציין את שארית אורך החיים)

משוואת הסכום לאחד תיתן:

$$1=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_k=\sum_{k=0}^{\infty}\pi_0\overline{F}_Z(k)$$

מכאן $\frac{1}{\pi_0}=\sum_{k=0}^{\infty}\overline{F}_Z(k)=EZ$

ולכן $\pi_0=\frac{1}{EZ}$.

אם כך, במידה ותוחלת אורך החיים סופית אז קיימת התפלגות סטציונרית והיא

$$\pi_k=\frac{1}{EZ}\overline{F}_Z(k)$$

נשים לב שבגלל ש $1\le Z$ אז $p_0=0$ ולכן $\overline{F}_Z(0)=1$ ולכן הנוסחה לעיל נכונה גם עבור π_0.

לדוגמא עבור $Z\sim Geom(p)$, $\overline{F}_Z(k)=(1-p)^k$ ו $EZ=\frac{1}{p}$ ואז:

$\pi_k=p(1-p)^k$ (מתפלג כמו גיאומטרי סופר כישלונות).

לעומת זאת עבור Z המתפלג כך:

$P_Z(k)=\frac{1}{k(k+1)}$ התוחלת היא אינסופית ולכן לא קיימת התפלגות סטציונרית לשרשרת המרקוב (כל המצבים מתמידים אפס).

הערות לגבי משתנה מקרי זה:

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$$

ולכן $\sum_{k=1}^{\infty}P_Z(k)=\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})=(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+....=1$

בנוסף $EZ=\sum_{k=1}^{\infty}kP_Z(k)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)}=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k}$

וזהו הטור ההרמוני וידוע כי הוא מתבדר.